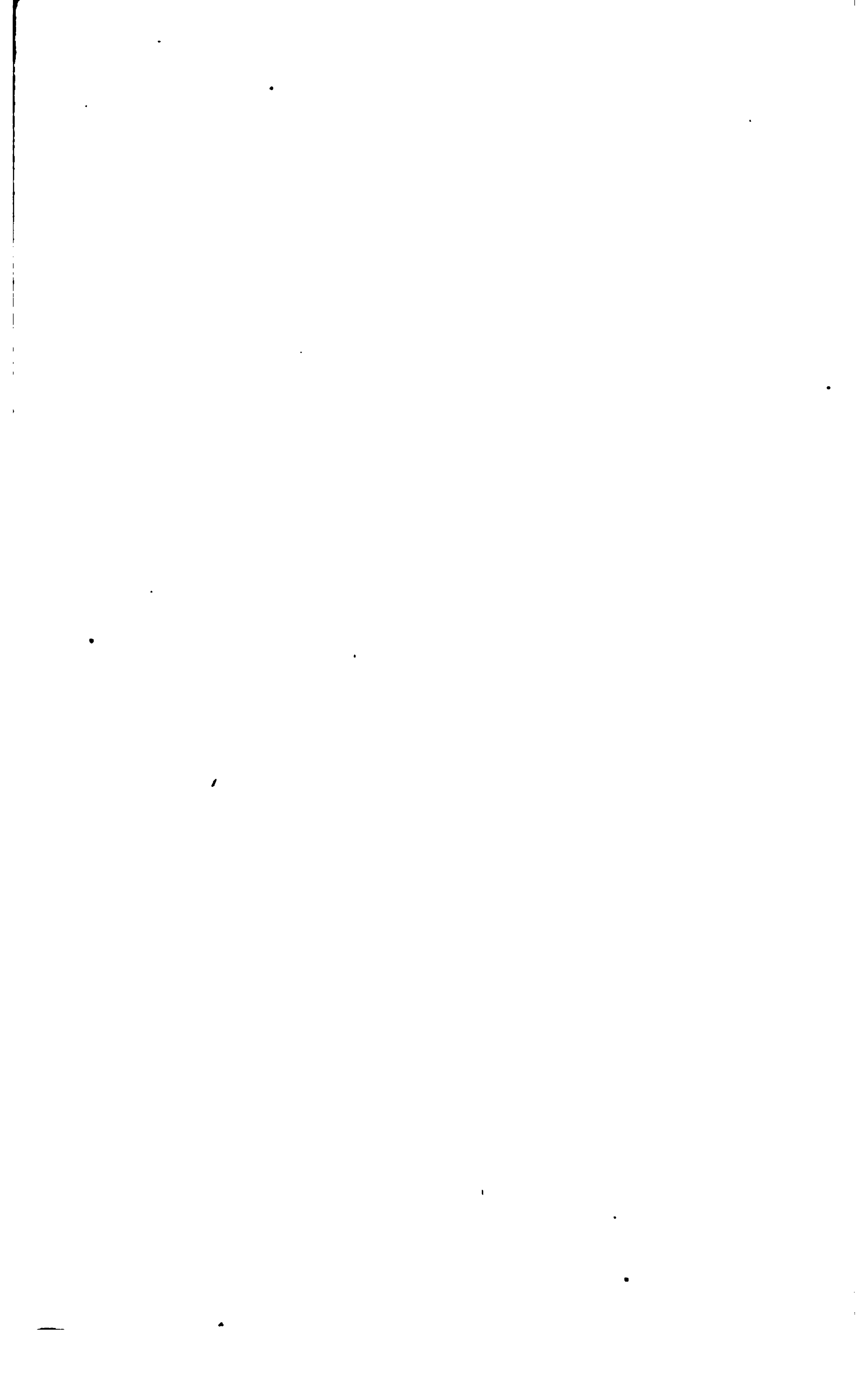
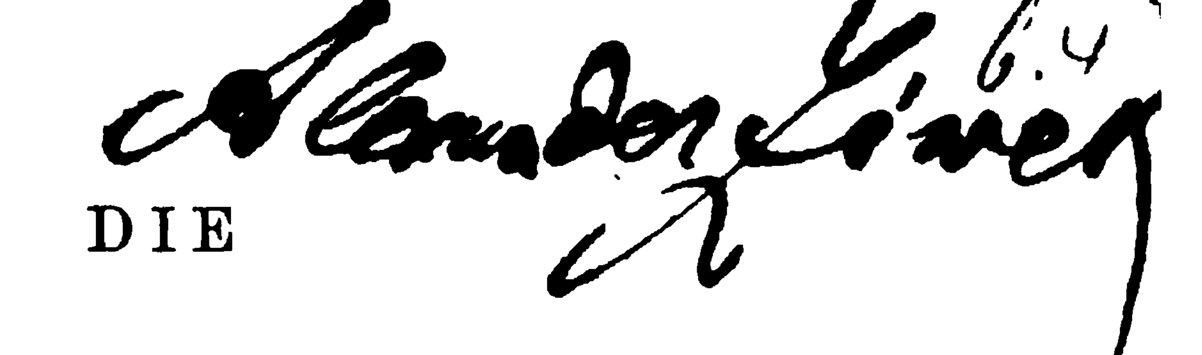




DIE

MECHANISCHE

WÄRMETHEORIE

VON

R. CLAUSIUS.

ZWEITE

umgearbeitete und vervollständigte Auflage des unter dem Titel
„Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie"
erschienenen Buches.

ERSTER BAND.

Entwickelung der Theorie, soweit sie sich aus den beiden
Hauptsätzen ableiten lässt, nebst Anwendungen.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1876.

Alex. Ziwet
gt.
8-30-1922

VORREDE.

Nachdem ich während einer langen Reihe von Jahren eine grosse Anzahl von Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie veröffentlicht hatte, und mir zu wiederholten Malen und von sehr verschiedenen Seiten bemerklich gemacht worden war, dass sie bei dem allmälig in weiten Kreisen rege gewordenen Interesse für die mechanische Wärmetheorie nicht Allen, welche sie zu lesen wünschten, zugänglich seien, gab ich eine Sammlung dieser Abhandlungen heraus.

Da nun gegenwärtig eine neue Auflage dieses Buches nothwendig geworden ist, so habe ich mich entschlossen, ihm bei dieser Gelegenheit eine andere Form zu geben. Die mechanische Wärmetheorie bildet in ihrer jetzigen Entwickelung schon ein für sich bestehendes, ausgedehntes Lehrobject. Es ist aber nicht leicht, aus getrennten, zu verschiedenen Zeiten veröffentlichten Abhandlungen, welche zwar ihrem Inhalte, aber nicht ihrer Form nach zusammenhängen, einen

solchen Gegenstand zu studiren, und wenn ich auch zur Erleichterung des Verständnisses und zur Vervollständigung die Abhandlungen an vielen Stellen mit Anmerkungen und Zusätzen versehen hatte, so war damit diesem Uebelstande doch nur theilweise abgeholfen. Ich habe es daher jetzt zweckmässig gefunden, den Inhalt der Abhandlungen so umzuarbeiten, dass er ein in zusammenhängender Weise sich entwickelndes Ganzes bilde, und dass daher das Werk die Form eines Lehrbuches annehme.

Ich sah mich dazu um so mehr veranlasst, als ich seit langer Zeit an einem Polytechnicum und mehreren Universitäten die mechanische Wärmetheorie vorgetragen und dadurch reichliche Gelegenheit gehabt habe, zu prüfen, welche Anordnung des Stoffes und welche Form der Darstellung am geeignetsten ist, die durch neue Anschauungen und Rechnungsweisen etwas schwierige Theorie dem Verständnisse leicht zugänglich zu machen.

Bei der aus diesem Grunde vorgenommenen Umgestaltung konnte ich auch manche Untersuchungen anderer Autoren mit aufnehmen und dadurch der Auseinandersetzung des Gegenstandes eine grössere Vollständigkeit und Abrundung geben, wobei ich natürlich nicht unterlassen habe, diese Autoren jedesmal namhaft zu machen. Da ferner während des seit dem Erscheinen meiner Abhandlungensammlung verflossenen Zeitraumes von zehn Jahren viele neue Untersuchungen über die mechanische Wärmetheorie veröffentlicht wur-

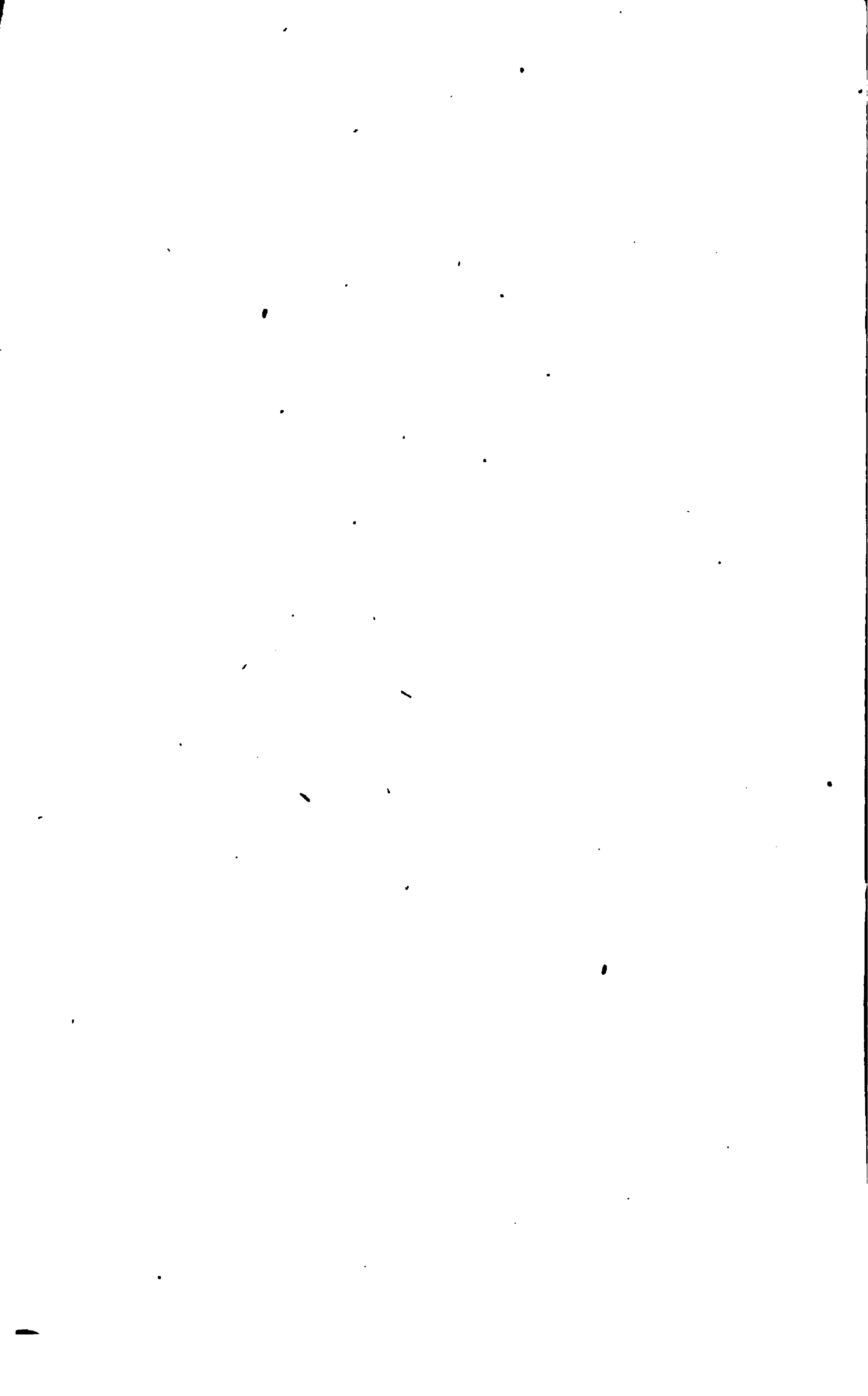


den, so sollen auch diese weiterhin ihre Berücksichtigung finden, was eine beträchtliche Inhaltsvermehrung zur Folge haben wird.

Demnach glaube ich die neue Bearbeitung der mechanischen Wärmetheorie, deren ersten Band ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, obwohl sie ihrer Entstehung nach die zweite Auflage meiner früher erschienenen Abhandlungensammlung bildet, doch in vieler Beziehung als ein neues Werk bezeichnen zu dürfen.

Bonn, im December 1875.

R. Clausius.



INHALT.

Mathematische Einleitung.

Abschnitt I.

Abschnitt II.

Abschnitt III.

Abschnitt IV.

Abschnitt V.

Abschnitt VI.

Abschnitt VII.

Abschnitt VIII.

Abschnitt IX.

Abschnitt X.

Abschnitt XI.

Abschnitt XII.

Abschnitt XIII.

MATHEMATISCHE EINLEITUNG.

Ueber die mechanische Arbeit und die Energie und über die Behandlung nicht integrabler Differential-gleichungen.

§. 1. Begriff und Maass der mechanischen Arbeit.

Jede Kraft sucht den Körper, auf welchen sie wirkt, in Bewegung zu setzen; sie kann aber daran durch andere, ihr entgegenwirkende Kräfte verhindert werden, so dass ein Gleichgewicht stattfindet und der Körper in Ruhe bleibt. In diesem Falle leistet die Kraft keine Arbeit. Sobald aber der Körper sich unter ihrem Einflusse bewegt, findet eine Arbeitsleistung statt.

Um für die Bestimmung der Arbeit einen möglichst einfachen Fall zu haben, möge zunächst statt eines ausgedehnten Körpers ein blosser materieller Punkt angenommen werden, auf welchen die Kraft wirkt. Wenn dieser Punkt, welchen wir p nennen wollen, sich in derselben Richtung bewegt, in welcher die Kraft ihn zu bewegen sucht, so drückt *das Product aus Weg und Kraft* die mechanische Arbeit aus, welche die Kraft bei der Bewegung leistet. Wenn dagegen die Bewegungsrichtung des Punktes eine beliebige ist, welche von der Kraftrichtung verschieden sein kann, so stellt *das Product aus dem Wege und der in die Richtung des Weges fallenden Componente der Kraft* die von der Kraft geleistete Arbeit dar.

Die in dieser Definition vorkommende Kraftcomponente kann positiv oder negativ sein, je nachdem sie in der betreffenden Geraden, in welcher die Bewegung stattfindet, nach derselben Seite fällt,

nach welcher die Bewegung geht, oder nach der entgegengesetzten Seite. Im ersteren Falle wird auch die Arbeit als *positiv* und im letzteren als *negativ* angesehen. Will man diesen Unterschied lieber durch das Verbum ausdrücken, was bei manchen Auseinandersetzungen bequem ist, so kann man, nach einem bei einer früheren Gelegenheit von mir gemachten Vorschlage, sagen, im ersteren Falle *leiste* oder *thue* die Kraft eine Arbeit, im letzteren Falle *erleide* sie eine Arbeit.

Aus dem Vorigen ist ersichtlich, dass die Grösse der Arbeit durch Zahlen dargestellt wird, deren Einheit diejenige Arbeit ist, welche eine Kraft von der Stärke Eins auf dem Wege Eins leistet. Um nun hieraus ein leicht anwendbares Maass zu erhalten, müssen wir eine für das Verständniss und die Messung bequeme Kraft als Normalkraft anwenden. Als solche pflegt man die Schwerkraft zu wählen.

Die Schwere wirkt auf ein gegebenes Gewicht als eine abwärts gerichtete Kraft, welche bei nicht zu langen Strecken als constant anzusehen ist. Wollen wir nun durch irgend eine uns zu Gebote stehende Kraft das Gewicht in die Höhe heben, so haben wir dabei die Schwerkraft zu überwinden, und diese bildet daher das Maass für die Kraft, welche wir beim langsamen Heben anzuwenden haben.

Demgemäss bezeichnet man als Arbeitseinheit diejenige Arbeit, welche geleistet werden muss, um eine Gewichtseinheit um eine Längeneinheit zu heben. Welche Gewichtseinheit und welche Längeneinheit man dabei in Anwendung bringen will, ist natürlich gleichgültig; indessen pflegt man in der praktischen Mechanik das Kilogramm als Gewichtseinheit und das Meter als Längeneinheit zu wählen, und dann die Arbeitseinheit mit dem Worte *Kilogrammeter* zu bezeichnen.

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass zur Hebung von a Kilogramm auf die Höhe von b Meter eine Arbeit von ab Kilogrammeter nöthig ist, und auch andere Arbeitsgrössen, bei welchen die Schwerkraft nicht direct ins Spiel kommt, kann man durch Vergleichung der angewandten Kraft mit der Schwerkraft in Kilogrammetern ausdrücken.

§. 2. Mathematische Bestimmung der Arbeit bei veränderlicher Kraftcomponente.

In den vorigen Erklärungen der Arbeit wurde stillschweigend angenommen, dass die wirksame Kraftcomponente auf der ganzen Länge des betrachteten Weges einen bestimmten Werth habe. In der Wirklichkeit ist dieses aber bei einem Wege von endlicher Länge der Regel nach nicht der Fall. Einerseits braucht die Kraft an verschiedenen Stellen des Raumes nicht gleich zu sein, und andererseits würde, wenn die Kraft auch in dem ganzen betrachteten Raume an Grösse und Richtung gleich wäre, bei einem Wege, der nicht geradlinig, sondern gekrümmt ist, wegen dieses letzteren Grundes die in die Richtung des Weges fallende Componente der Kraft veränderlich sein. Demnach lässt sich das Verfahren, die Arbeit durch ein einfaches Product auszudrücken, nur für ein unendlich kleines Wegstück, oder ein Wegelement anwenden.

Sei ds ein Wegelement und S die in die Richtung desselben fallende Componente der auf den Punkt p wirkenden Kraft, so erhalten wir zur Bestimmung der bei der unendlich kleinen Bewegung gethanen Arbeit, welche durch dW bezeichnet werden möge, die Gleichung:

$$dW = S ds. \tag{1}$$

Bezeichnen wir die ganze auf den Punkt wirkende Kraft mit P, und den Winkel, welchen die Richtung dieser Kraft an der Stelle, wo sich das Wegelement befindet, mit der Bewegungsrichtung bildet, mit φ, so ist:

$$S = P \cos \varphi,$$

und demnach können wir schreiben:

$$dW = P \cos \varphi \, ds. \tag{2}$$

Für die Rechnung ist es bequem, nach Einführung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Projectionen des Wegelementes auf die Coordinatenrichtungen und die in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft in Anwendung zu bringen.

Wir wollen vorläufig der Einfachheit wegen annehmen, die Bewegung, um welche es sich handelt, finde in einer Ebene statt, indem sowohl die ursprüngliche Bewegungsrichtung, als auch die

Kraftrichtungen in dieser Ebene gelegen seien. Dann wollen wir auch ein in dieser Ebene gelegenes, rechtwinkliges Coordinatensystem einführen, und die Coordinaten des beweglichen Punktes p zu einer gewissen Zeit mit x und y bezeichnen. Wenn dann der Punkt von dieser Lage aus sich in der Ebene um ein unendlich kleines Stück ds bewegt, so sind die Projectionen dieser Bewegung dx und dy, und sie werden als positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Coordinaten durch die kleine Bewegung zu- oder abnehmen. Ferner mögen die in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft P mit X und Y bezeichnet werden.

Wenn nun die Kraft P mit den Coordinatenrichtungen Winkel bildet, deren Cosinus a und b sind, so hat man:

$$X = aP;\ Y = bP.$$

Wenn ferner das Wegelement ds mit den Coordinatenrichtungen Winkel bildet, deren Cosinus α und β sind, so hat man:

$$dx = \alpha ds;\ dy = \beta ds.$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen zu je zweien und Addition der Producte erhält man:

$$Xdx + Ydy = (a\alpha + b\beta)\, Pds.$$

Nun ist aber aus der analytischen Geometrie bekannt, dass die in Klammer stehende Summe den Cosinus des Winkels zwischen der Kraftrichtung und der Richtung des Wegelementes darstellt, also:

$$a\alpha + b\beta = \cos\varphi.$$

Wir erhalten somit:

$$Xdx + Ydy = \cos\varphi . Pds,$$

und demnach unter Berücksichtigung der Gleichung (2):

$$dW = Xdx + Ydy. \tag{3}$$

Um nun aus dieser für eine unendlich kleine Bewegung geltenden Gleichung die bei einer endlichen Bewegung geleistete Arbeit abzuleiten, müssen wir die Gleichung integriren.

§. 3. Integration des Differentials der Arbeit.

Bei der Integration einer Differentialgleichung von der unter (3) gegebenen Form, in welcher X und Y Functionen von x und y sind, und welche daher auch so geschrieben werden kann:

(3a) $$dW = \varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy,$$

kommt ein Unterschied zur Sprache, welcher nicht bloss für den vorliegenden Fall, sondern auch für die später vorkommenden Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie von grosser Wichtigkeit ist, und wir wollen ihn daher bei der sich hier bietenden Gelegenheit etwas vollständiger besprechen, um später einfach auf diese Besprechung verweisen zu können.

Je nach der Beschaffenheit der Functionen, mit welchen die Differentiale dx und dy multiplicirt sind, zerfallen die Differentialgleichungen der obigen Form in zwei Classen, welche sowohl in Bezug auf die Behandlung, die sie erfordern, als auch in Bezug auf das Resultat, zu dem sie führen, wesentlich verschieden sind. Zur ersten Classe gehören die Fälle, wo die Functionen folgende Bedingungsgleichung erfüllen:

(4) $$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx},$$

und die zweite Classe umfasst alle Fälle, wo die Functionen diese Bedingungsgleichung nicht erfüllen.

Wenn die Bedingungsgleichung (4) erfüllt ist, so ist der Ausdruck, welcher die rechte Seite der gegebenen Differentialgleichung (3) resp. (3a) bildet, integrabel, d. h. er ist das vollständige Differential einer Function von x und y, in welcher diese beiden Veränderlichen als von einander unabhängig betrachtet werden können, und man erhält daher durch Integration eine Gleichung von der Form:

(5) $$W = F(x,y) + \text{Const.}$$

Ist die Bedingungsgleichung (4) nicht erfüllt, so ist die rechte Seite der gegebenen Differentialgleichung nicht integrabel, und daraus folgt, *dass W sich nicht durch eine Function von x und y darstellen lässt, so lange diese beiden Veränderlichen als von einander unabhängig betrachtet werden.* Denn in der That, wenn man setzen wollte:

$$W = F(x,y),$$

so würde man erhalten:

$$X = \frac{dW}{dx} = \frac{dF(x,y)}{dx}$$

$$Y = \frac{dW}{dy} = \frac{dF(x,y)}{dy},$$

und daraus würde folgen:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d^2F(x,y)}{dy\,dx}.$$

Da nun für eine Function von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen der Satz gilt, dass, wenn man sie nach beiden Veränderlichen differentiirt, die Ordnung der Differentiationen gleichgültig ist, und man daher setzen kann:

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d^2F(x,y)}{dy\,dx},$$

so würde man aus den beiden vorigen Gleichungen wieder zur Gleichung (4) gelangen, von welcher wir in unserem gegenwärtigen Falle angenommen haben, dass sie nicht erfüllt sei.

In einem solchen Falle ist also die Integration in der Weise, dass die Grössen x und y dabei ihre Eigenschaft als von einander unabhängige Veränderliche beibehalten, nicht möglich. Wenn man dagegen zwischen diesen beiden Grössen irgend eine bestimmte Relation annimmt, in Folge deren die eine sich als Function der anderen darstellen lässt, so wird dadurch die Integration der gegebenen Differentialgleichung ausführbar. Setzen wir nämlich:

$$f(x,y) = 0, \tag{6}$$

worin f eine beliebige Function andeutet, so können wir mittelst dieser Gleichung eine der Veränderlichen durch die andere ausdrücken, und dann die so ausgedrückte Veränderliche nebst ihrem Differentiale aus der Differentialgleichung (1) eliminiren. Die allgemeine Form, in welcher die Gleichung (6) gegeben ist, umfasst natürlich auch den speciellen Fall, wo eine der Veränderlichen für sich allein als constant angenommen wird, in welchem Falle das Differential dieser Veränderlichen dadurch, dass es Null wird, ohne Weiteres aus der Differentialgleichung fortfällt, und die Veränderliche selbst einfach durch die betreffende Constante zu ersetzen ist. Nehmen wir nun z. B. an, es sei die Veränderliche y nebst ihrem Differentiale mit Hülfe der Gleichung (6) aus der Differentialgleichung (3) resp. (3a.) eliminirt, und die letztere dadurch in folgende einfachere Gestalt gebracht:

$$dW = \Phi(x)\,dx,$$

so lässt sich die so veränderte Differentialgleichung offenbar integriren, und giebt eine Gleichung von der Form:

(7) $$W = F(x) + \text{Const.}$$

Demnach sind die beiden Gleichungen (6) und (7) zusammen als eine Auflösung der gegebenen Differentialgleichung zu betrachten. Da die in (6) vorkommende Function $f(x,y)$ eine beliebige ist, und für jede veränderte Form dieser Function auch die in (7) vorkommende Function $F(x)$ im Allgemeinen eine andere wird, so sieht man, dass es unendlich viele Auflösungen dieser Art giebt.

In Bezug auf die Form der Gleichung (7) ist noch zu bemerken, dass dieselbe verschiedene Abänderungen zulässt. Hätte man mittelst der Gleichung (6) x durch y ausgedrückt, und dann die Veränderliche x nebst ihrem Differentiale aus der gegebenen Differentialgleichung eliminirt, so wäre deren Gestalt geworden:

$$dW = \Phi_1(y)dy,$$

und man hätte daraus durch Integration eine Gleichung von der Form

(7a) $$W = F_1(y) + \text{Const.}$$

erhalten. Zu eben dieser Gleichung kann man auch dadurch gelangen, dass man in der durch das zuerst angedeutete Verfahren gewonnenen Gleichung (7) nachträglich mit Hülfe der Gleichung (6) für die Veränderliche x die Veränderliche y einführt. Auch könnte man, statt x vollständig aus (7) zu eliminiren, eine theilweise Elimination von x vornehmen. Wenn nämlich die Function $F(x)$ die Veränderliche x mehrmals in verschiedenen Verbindungen enthält (was man, selbst wenn es in der ursprünglichen Form der Function nicht der Fall sein sollte, leicht durch eine abgeänderte Schreibweise bewirken kann, indem man für x z. B. schreiben kann: $(1-a)x + ax$ oder $\frac{x^{n+1}}{x^n}$), so kann man in einigen Verbindungen y für x einführen, und in anderen x stehen lassen. Dadurch nimmt die Gleichung folgende Form an:

(7b) $$W = F_2(x,y) + \text{Const.},$$

welche Form die allgemeinere ist, und die beiden anderen als specielle Fälle umfasst.

Es versteht sich aber von selbst, dass diese drei Gleichungen (7), (7a) und (7b), deren jede nur mit der Gleichung (6) zusammen gültig ist, nicht verschiedene Auflösungen, sondern nur verschiedene Ausdrücke einer und derselben Auflösung bilden.

Man kann, um die Integration der Differentialgleichung (3) zu ermöglichen, statt der Gleichung (6) auch eine Gleichung von weniger einfacher Form annehmen, welche ausser den beiden Veränderlichen x und y noch W enthält, und selbst auch eine Differentialgleichung sein kann; indessen für unsere Zwecke genügt die einfachere Form, und indem wir uns auf diese beschränken, wollen wir die Resultate der Betrachtungen dieses Paragraphen noch einmal kurz zusammenfassen.

Wenn die unter (4) *gegebene Bedingungsgleichung der unmittelbaren Integrabilität erfüllt ist, so erhält man ohne Weiteres als Integral eine Gleichung von der Form:*

$$\text{(A)} \qquad W = F(x,y) + \text{Const.}$$

Wenn dagegen jene Bedingungsgleichung nicht erfüllt ist, so muss man erst eine Relation zwischen den Veränderlichen annehmen, um die Integration ausführen zu können, und erhält daher ein System von zwei Gleichungen folgender Art:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ W = F(x,y) + \text{Const.}, \end{cases}$$

worin die Form der Function F ausser von der Differentialgleichung auch von der Form der willkürlich angenommenen Function f abhängig ist.

§. 4. Geometrische Bedeutung der vorstehenden Resultate und Bemerkung über die Differentialcoefficienten.

Der wesentliche Unterschied der auf die beiden Fälle bezüglichen Resultate wird besonders durch eine geometrische Betrachtung anschaulich, wobei wir der Einfachheit wegen die in (A) vorkommende Function $F(x,y)$ als eine solche voraussetzen wollen, die für jeden Punkt der Ebene nur Einen Werth hat.

Es möge angenommen werden, es sei für die Bewegung unseres Punktes p der Anfangs- und Endpunkt im Voraus gegeben und durch die Coordinaten x_0, y_0 und x_1, y_1 bestimmt. Dann können wir im ersteren Falle die Arbeit, welche bei dieser Bewegung von der wirksamen Kraft gethan wird, sofort angeben, ohne dass wir dazu den Verlauf der Bewegung selbst zu kennen brauchen. Diese Arbeit wird nämlich gemäss (A) ausgedrückt durch die Differenz:

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0).$$

Während also der bewegliche Punkt auf sehr verschiedenen Wegen von der einen Stelle zur anderen gelangen kann, ist die Grösse der Arbeit, welche die Kraft dabei thut, davon ganz unabhängig, und ist vollständig bestimmt, sobald der Anfangs- und Endpunkt der Bewegung gegeben sind.

Anders im zweiten Falle. In dem auf diesen Fall bezüglichen Systeme von zwei Gleichungen (B) ist die erste Gleichung als die Gleichung einer Curve zu betrachten, und man kann daher das eben Gesagte geometrisch folgendermaassen aussprechen: die Arbeit, welche die wirksame Kraft bei der Bewegung des Punktes p thut, lässt sich in diesem Falle erst dann bestimmen, wenn der ganze Verlauf der Curve, auf welcher der Punkt sich bewegt, bekannt ist. Wenn der Anfangs- und Endpunkt der Bewegung im Voraus gegeben sind, so muss jene erste Gleichung so gewählt werden, dass die ihr entsprechende Curve durch diese beiden Punkte geht; dabei sind aber noch unendlich viele Gestalten der Curve möglich, für welche man, trotz ihrer gleichen Grenzpunkte, unendlich viele verschiedene Arbeitsgrössen erhält.

Nimmt man speciell an, der Punkt p solle eine geschlossene Curve beschreiben, so dass der Endpunkt seiner Bewegung mit dem Anfangspunkte zusammenfalle, und somit die Coordinaten x_1, y_1 dieselben Werthe haben, wie x_0, y_0, so ist für diese Bewegung im ersten Falle die Arbeit gleich Null; im zweiten Falle dagegen braucht sie nicht gleich Null zu sein, sondern kann irgend einen positiven oder negativen Werth haben.

Durch den hier behandelten Fall wird es auch recht klar, wie eine Grösse, welche sich nicht durch eine Function von x und y (so lange diese letzteren als von einander unabhängige Veränderliche betrachtet werden) darstellen lässt, doch partielle Differentialcoefficienten nach x und y haben kann, die durch bestimmte Functionen dieser Veränderlichen ausgedrückt werden. Denn offenbar sind die Kraftcomponenten X und Y im strengen Sinne des Wortes *die partiellen Differentialcoefficienten der Arbeit W nach x und y* zu nennen, da, wenn x um dx wächst, während y constant bleibt, die Arbeit um Xdx zunimmt, und wenn y um dy wächst, während x constant bleibt, die Arbeit um Ydy zunimmt. Man kann daher auch, mag nun W eine solche Grösse sein, die sich allgemein durch eine Function von x und y darstellen lässt, oder eine solche Grösse, die sich erst dann bestimmen lässt, wenn der Weg, welchen der Punkt beschreibt, bekannt ist, für die

partiellen Differentialcoefficienten von W die gewöhnliche Bezeichnung anwenden, und demnach schreiben:

$$(8)\qquad \begin{cases} X = \frac{dW}{dx} \\ Y = \frac{dW}{dy}. \end{cases}$$

Unter Anwendung dieser Bezeichnung kann man die Bedingungsgleichung (4), deren Erfüllung oder Nichterfüllung den besprochenen Unterschied in der Behandlung der Differentialgleichung und in den Resultaten zur Folge hat, auch so schreiben:

$$(9)\qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right),$$

oder man kann sagen: der in Bezug auf die Grösse W zur Sprache gekommene Unterschied hängt davon ab, ob die Differenz

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right)$$

Null ist, oder einen angebbaren Werth hat.

§. 5. Ausdehnung des Vorigen auf drei Dimensionen.

Wenn der betrachtete Punkt p in seiner Bewegung nicht auf eine Ebene beschränkt ist, sondern sich frei im Raume bewegen kann, so erhält man für das Arbeitselement einen Ausdruck, welcher dem in (3) gegebenen sehr ähnlich ist. Seien a, b, c die Cosinus der Winkel, welche die auf den Punkt wirkende Kraft P mit den drei Richtungen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bildet, so werden die Componenten X, Y, Z dieser Kraft bestimmt durch die Gleichungen:

$$X = aP; \quad Y = bP; \quad Z = cP.$$

Seien ferner α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche das Wegelement ds mit den Coordinatenrichtungen bildet, so werden die drei Projectionen dx, dy und dz des Wegelementes auf die Coordinatenaxen bestimmt durch die Gleichungen:

$$dx = \alpha ds; \quad dy = \beta ds; \quad dz = \gamma ds.$$

Daraus folgt:

$$Xdx + Ydy + Zdz = (a\alpha + b\beta + c\gamma)Pds.$$

Nun ist aber, wenn φ den Winkel zwischen P und ds bedeutet:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \cos\varphi,$$

und somit kommt:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \cos\varphi . Pds.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit (2) ergiebt sich:

$$dW = Xdx + Ydy + Zdz. \tag{10}$$

Dieses ist die Differentialgleichung zur Bestimmung der Arbeit. Die hierin vorkommenden Grössen X, Y, Z sind ganz beliebige Functionen der Coordinaten x, y, z; denn, welches auch die Werthe dieser drei Componenten an verschiedenen Stellen des Raumes sein mögen, immer lässt sich daraus eine Kraft P zusammensetzen.

Bei der Behandlung dieser Gleichung sind zunächst folgende drei Bedingungsgleichungen zu betrachten:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}; \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}; \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz}, \tag{11}$$

und es kommt darauf an, ob die Functionen X, Y, Z diesen drei Bedingungsgleichungen genügen oder nicht.

Wenn die drei Bedingungsgleichungen erfüllt sind, so ist der Ausdruck an der rechten Seite von (10) das vollständige Differential einer Function von x, y, z, worin diese drei Veränderlichen als von einander unabhängig betrachtet werden können. Man kann daher die Integration ohne Weiteres ausführen, und erhält dadurch eine Gleichung von der Form:

$$W = F(x,y,z) + \text{Const.} \tag{12}$$

Denken wir uns nun, dass der bewegliche Punkt p sich von irgend einem gegebenen Anfangspunkte x_0, y_0, z_0 bis zu einem gegebenen Endpunkte x_1, y_1, z_1 bewegen soll, so wird die dabei von der Kraft gethane Arbeit dargestellt durch die Differenz:

$$F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0).$$

Die Arbeit ist also, wenn wir wieder $F(x,y,z)$ als eine solche Function voraussetzen, die für jeden Punkt des Raumes nur Einen Werth hat, durch den Anfangs- und Endpunkt der Bewegung vollständig bestimmt, und daraus folgt, dass, wenn der bewegliche Punkt sich auf verschiedenen Wegen von dem ersten dieser beiden Punkte zum zweiten bewegt, die dabei von der Kraft gethane Arbeit immer dieselbe ist.

Wenn die drei Bedingungsgleichungen (11) nicht erfüllt sind, so lässt sich die Integration in der vorigen Allgemeinheit nicht ausführen. Sobald aber der Weg, auf dem die Bewegung statt-

findet, bekannt ist, so wird dadurch die Integration möglich. Wenn in diesem Falle zwei Punkte als Anfangs- und Endpunkt der Bewegung gegeben sind, und man sich zwischen diesen Punkten verschiedene Curven gezogen denkt, in welchen der Punkt p sich bewegen soll, so erhält man für jeden dieser Wege einen bestimmten Werth der Arbeit, aber die den verschiedenen Wegen entsprechenden Arbeitswerthe brauchen nicht, wie im vorigen Falle, unter einander gleich zu sein, sondern sind im Allgemeinen verschieden.

§. 6. Das Ergal.

In solchen Fällen, wo die Arbeit sich einfach durch eine Function der Coordinaten darstellen lässt, spielt diese Function bei den Rechnungen eine wichtige Rolle. Hamilton hat ihr daher einen besondern Namen, *force function*, gegeben, welcher im Deutschen als *Kraftfunction* oder *Kräftefunction* gebräuchlich geworden ist, und welcher sich auch auf den allgemeineren Fall anwenden lässt, wo statt Eines beweglichen Punktes eine beliebige Anzahl solcher Punkte gegeben und die Bedingung erfüllt ist, dass die Arbeit nur von den Lagen der Punkte abhängt. Bei der neueren, erweiterten Auffassung der Bedeutung der durch diese Function dargestellten Grösse hat es sich als zweckmässig herausgestellt, lieber für den *negativen* Werth der Function, oder, anders gesagt, für diejenige Grösse, deren *Abnahme* die geleistete Arbeit darstellt, einen besonderen Namen einzuführen, und Rankine hat dafür den Namen *potentielle Energie* vorgeschlagen. Dieser Name drückt zwar die Bedeutung der Grösse sehr treffend aus, ist aber etwas lang, und ich habe mir daher erlaubt, den Namen *Ergal* für dieselbe in Vorschlag zu bringen.

Unter den Fällen, in welchen die auf einen Punkt wirkende Kraft ein Ergal hat, ist besonders der hervorzuheben, wo die Kraft von Anziehungen oder Abstossungen herrührt, welche der bewegliche Punkt von festen Punkten erleidet, und deren Stärke nur von der Entfernung abhängt, oder, mit anderen Worten, wo die Kraft sich in *Centralkräfte* zerlegen lässt.

Nehmen wir zunächst nur Einen festen Punkt π mit den Coordinaten ξ, η, ζ als wirksam an, und bezeichnen seine Entfernung von dem beweglichen Punkte p mit ϱ, so dass zu setzen ist:

$$(13) \qquad \varrho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

und stellen wir die Kraft, welche π auf p ausübt, durch $\varphi'(\varrho)$ dar, wobei ein positiver Werth der Function Anziehung und ein negativer Abstossung bedeuten soll, so erhalten wir für die Componenten der Kraft die Ausdrücke:

$$X = \varphi'(\varrho)\frac{\xi - x}{\varrho}; \quad Y = \varphi'(\varrho)\frac{\eta - y}{\varrho}; \quad Z = \varphi'(\varrho)\frac{\zeta - z}{\varrho}.$$

Da ferner aus (13) folgt:

$$\frac{d\varrho}{dx} = -\frac{\xi - x}{\varrho},$$

so kommt:

$$X = -\varphi'(\varrho)\frac{d\varrho}{dx},$$

und entsprechend für die beiden anderen Coordinatenrichtungen. Führen wir nun die Function $\varphi(\varrho)$ ein mit der Bedeutung:

$$(14) \qquad \varphi(\varrho) = \int \varphi'(\varrho)d\varrho,$$

so lässt sich die vorige Gleichung so schreiben:

$$(15) \qquad X = -\frac{d\varphi(\varrho)}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dx} = -\frac{d\varphi(\varrho)}{dx},$$

und ebenso erhalten wir:

$$(15a) \qquad Y = -\frac{d\varphi(\varrho)}{dy}; \quad Z = -\frac{d\varphi(\varrho)}{dz}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\left[\frac{d\varphi(\varrho)}{dx}dx + \frac{d\varphi(\varrho)}{dy}dy + \frac{d\varphi(\varrho)}{dz}dz\right].$$

Da nun in dem unter (13) gegebenen Ausdrucke von ϱ nur die Grössen x, y, z veränderlich sind, und daher auch $\varphi(\varrho)$ als eine Function dieser drei Grössen zu betrachten ist, so bildet die in der eckigen Klammer stehende Summe ein vollständiges Differential, und wir können somit schreiben:

$$(16) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = -d\varphi(\varrho).$$

Das Arbeitselement wird also durch das negative Differential von $\varphi(\varrho)$ dargestellt, woraus folgt, dass $\varphi(\varrho)$ für diesen Fall das Ergal ist.

Es möge nun weiter statt Eines festen Punktes eine beliebige Anzahl von festen Punkten π, π_1, π_2... gegeben sein, welche sich vom Punkte p in den Entfernungen ϱ, ϱ_1, ϱ_2... befinden, und auf ihn mit Kräften wirken, die durch $\varphi'(\varrho)$, $\varphi_1'(\varrho_1)$, $\varphi_2'(\varrho_2)$... dar-

gestellt werden. Dann bilden wir aus diesen Functionen durch Integration, wie es in Gleichung (14) angedeutet ist, die Functionen $\varphi(\varrho)$, $\varphi_1(\varrho_1)$, $\varphi_2(\varrho_2)\ldots$, mit Hülfe deren wir, entsprechend der Gleichung (15), setzen können:

$$X = -\frac{d\varphi(\varrho)}{dx} - \frac{d\varphi_1(\varrho_1)}{dx} - \frac{d\varphi_2(\varrho_2)}{dx} - \cdots$$
$$= -\frac{d}{dx}\left[\varphi(\varrho) + \varphi_1(\varrho_1) + \varphi_2(\varrho_2) + \cdots\right]$$

oder unter Anwendung des Summenzeichens:

$$X = -\frac{d}{dx}\sum \varphi(\varrho), \tag{17}$$

und ebenso für die anderen Coordinatenrichtungen:

$$Y = -\frac{d}{dy}\sum \varphi(\varrho); \quad Z = -\frac{d}{dz}\sum \varphi(\varrho). \tag{17a}$$

Daraus folgt dann weiter:

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\sum \varphi(\varrho), \tag{18}$$

und die Summe $\sum \varphi(\varrho)$ ist somit das Ergal.

§. 7. Erweiterung des Vorigen.

Im Vorigen wurde nur ein einzelner beweglicher Punkt betrachtet; wir wollen nun aber die Betrachtung dahin erweitern, dass wir ein System von beliebig vielen beweglichen Punkten annehmen, welche theils von Aussen her Kräfte erleiden, theils unter einander Kräfte ausüben.

Wenn dieses ganze System von Punkten eine unendlich kleine Bewegung macht, so wird von den auf einen einzelnen Punkt wirkenden Kräften, die wir uns in Eine Kraft zusammengesetzt denken können, eine Arbeit geleistet, welche durch den Ausdruck

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

dargestellt wird, woraus folgt, dass die von allen in dem Systeme wirkenden Kräften geleistete Gesammtarbeit durch einen Ausdruck von der Form

$$\sum(Xdx + Ydy + Zdz)$$

dargestellt wird, worin die Summe sich auf alle beweglichen Punkte bezieht. Auch dieser complicirtere Ausdruck kann unter Umständen die entsprechende Eigenschaft haben, wie jener einfachere, dass er

das vollständige Differential einer Function der Coordinaten aller beweglichen Punkte ist, in welchem Falle wir den negativen Werth dieser Function das Ergal des ganzen Systemes nennen. Daraus folgt dann weiter, dass bei einer endlichen Bewegung die Gesammtarbeit einfach gleich der Differenz zwischen dem Anfangs- und Endwerthe des Ergals ist, und daher, (unter der Voraussetzung, dass die betreffende Function, welche das Ergal darstellt, für jede Lage der Punkte nur Einen Werth hat), durch die Anfangs- und Endlage der Punkte vollständig bestimmt ist, ohne dass man die Wege, auf welchen sie aus der einen Lage in die andere gelangt sind, zu kennen braucht.

Dieser Fall, welcher begreiflicher Weise eine grosse Erleichterung für die Bestimmung der Arbeit darbietet, tritt z. B. ein, wenn alle in dem Systeme wirkenden Kräfte Centralkräfte sind, welche die beweglichen Punkte entweder von festen Punkten erleiden oder unter einander ausüben.

Was die von festen Punkten ausgehenden Centralkräfte anbetrifft, so haben wir für einen einzelnen beweglichen Punkt den Beweis schon geführt, und dieser Beweis ist auch für die Bewegung des ganzen Systemes von Punkten ausreichend, da die bei der Bewegung mehrerer Punkte geleistete Arbeit einfach gleich der Summe der Arbeitsgrössen ist, welche bei den Bewegungen der einzelnen Punkte geleistet werden. Demnach können wir den auf die Wirkung der festen Punkte bezüglichen Theil des Ergals ebenso, wie früher, durch $\sum \varphi(\varrho)$ darstellen, wenn wir nur dem Summenzeichen die erweiterte Bedeutung beilegen, dass es nicht bloss so viele Glieder umfasst, als feste Punkte vorhanden sind, sondern so viele Glieder, als es Combinationen aus je einem festen und einem beweglichen Punkte giebt.

Was ferner die Kräfte anbetrifft, welche die beweglichen Punkte unter einander ausüben, so wollen wir zunächst nur zwei Punkte p und p_1 mit den Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 betrachten. Indem wir den Abstand der beiden Punkte r nennen, haben wir zu setzen:

$$(19) \qquad r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

und die Kraft, welche die Punkte auf einander ausüben, wollen wir durch $f'(r)$ bezeichnen, wobei wieder ein positiver Werth Anziehung und ein negativer Werth Abstossung bedeuten soll. Dann

sind die Componenten der Kraft, welche der Punkt p durch diese gegenseitige Wirkung erleidet:

$$f'(r)\frac{x_1-x}{r};\quad f'(r)\frac{y_1-y}{r};\quad f'(r)\frac{z_1-z}{r},$$

und die Componenten der entgegengesetzten Kraft, welche der Punkt p_1 erleidet:

$$f'(r)\frac{x-x_1}{r};\quad f'(r)\frac{y-y_1}{r};\quad f'(r)\frac{z-z_1}{r}.$$

Da nun nach (19) zu setzen ist:

$$\frac{dr}{dx}=-\frac{x_1-x}{r};\quad \frac{dr}{dx_1}=-\frac{x-x_1}{r},$$

so kann man die beiden in die x-Richtung fallenden Kraftcomponenten auch so schreiben:

$$-f'(r)\frac{dr}{dx};\quad -f'(r)\frac{dr}{dx_1},$$

und wenn man die Function $f(r)$ mit der Bedeutung:

$$f(r)=\int f'(r)dr \tag{20}$$

einführt, so gehen die vorigen Ausdrücke über in:

$$-\frac{df(r)}{dx};\quad -\frac{df(r)}{dx_1}.$$

Ebenso erhält man für die y-Richtung die Componenten:

$$-\frac{df(r)}{dy};\quad -\frac{df(r)}{dy_1},$$

und für die z-Richtung die Componenten:

$$-\frac{df(r)}{dz};\quad -\frac{df(r)}{dz_1}.$$

Wenn wir nun von der Arbeit, welche bei der unendlich kleinen Bewegung der beiden Punkte gethan wird, nur den Theil bestimmen wollen, welcher sich auf die beiden aus ihrer gegenseitigen Einwirkung entstehenden entgegengesetzten Kräfte bezieht, so wird dieser durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$-\left[\frac{df(r)}{dx}dx+\frac{df(r)}{dy}dy+\frac{df(r)}{dz}dz+\frac{df(r)}{dx_1}dx_1+\frac{df(r)}{dy_1}dy_1\right.$$
$$\left.+\frac{df(r)}{dz_1}dz_1\right].$$

Da nun r nur von den sechs Grössen x, y, z, x_1, y_1, z_1 abhängt, und daher auch $f(r)$ als Function dieser sechs Grössen anzusehen

ist, so ist die in der eckigen Klammer stehende Summe ein vollständiges Differential, und die zu bestimmende, auf die gegenseitige Einwirkung der beiden Punkte bezügliche Arbeit wird daher einfach durch

$$-df(r)$$

dargestellt.

In derselben Weise lässt sich für jedes Paar von zwei Punkten die auf ihre gegenseitige Einwirkung bezügliche Arbeit ausdrücken, und die Gesammtarbeit aller Kräfte, welche die Punkte unter einander ausüben, hat daher folgende algebraische Summe:

$$-df(r)-df_1(r_1)-df_2(r_2)-\ldots.$$

als Ausdruck, wofür man schreiben kann:

$$-d[f(r)+f_1(r_1)+f_2(r_2)+\ldots..]$$

oder unter Anwendung des Summenzeichens:

$$-d\sum f(r),$$

worin die Summe so viele Glieder umfassen soll, wie Combinationen der beweglichen Punkte zu je zweien vorkommen. Diese Summe $\sum f(r)$ ist daher der auf die gegenseitigen Einwirkungen aller beweglichen Punkte bezügliche Theil des Ergals.

Fassen wir nun endlich beide Arten von Kräften zusammen, so erhalten wir für die gesammte Arbeit, welche bei der unendlich kleinen Bewegung des Systemes von Punkten geleistet wird, die Gleichung:

$$(21)\quad \begin{aligned}\sum(Xdx+Ydy+Zdz) &= -d\sum\varphi(\varrho)-d\sum f(r)\\ &= -d\left[\sum\varphi(\varrho)+\sum f(r)\right],\end{aligned}$$

woraus folgt, dass die Grösse

$$\sum\varphi(\varrho)+\sum f(r)$$

das Ergal sämmtlicher in dem Systeme wirkender Kräfte ist.

Die der vorstehenden Entwickelung zu Grunde liegende Annahme, dass nur Centralkräfte wirken, bildet freilich unter allen mathematisch möglichen Annahmen über die Kräfte nur einen sehr speciellen Fall, aber dieser Fall ist insofern von besonderer Wichtigkeit, als wahrscheinlich alle in der Natur vorkommenden Kräfte sich in Centralkräfte zerlegen lassen.

§. 8. Beziehung zwischen Arbeit und lebendiger Kraft.

Im Vorigen wurden nur die Kräfte, welche auf die Punkte wirken, und die Lagenänderungen der Punkte betrachtet; die Massen der Punkte aber und ihre Geschwindigkeiten blieben unberücksichtigt. Wir wollen nun auch diese in Betracht ziehen.

Für einen frei beweglichen Punkt von der Masse m gelten bekanntlich folgende Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{22}$$

Indem wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}dt$, $\frac{dy}{dt}dt$ und $\frac{dz}{dt}dt$ multipliciren und dann addiren, erhalten wir:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt = \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt. \tag{23}$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich umformen in:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]dt$$

oder, wenn die Geschwindigkeit des Punktes mit v bezeichnet wird, in:

$$\frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{dt}dt = \frac{d\left(\frac{m}{2}v^2\right)}{dt}dt = d\left(\frac{m}{2}v^2\right),$$

und die Gleichung lautet somit:

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt. \tag{24}$$

Ist statt Eines einzelnen frei beweglichen Punktes ein ganzes System von frei beweglichen Punkten gegeben, so gilt dieselbe Gleichung für jeden Punkt, und wir können durch Summation sofort folgende Gleichung bilden:

$$d\sum\frac{m}{2}v^2 = \sum\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt. \tag{25}$$

Die Grösse $\sum\frac{m}{2}v^2$ ist die ganze lebendige Kraft des Systemes

von Punkten. Führen wir für diese ein vereinfachtes Zeichen ein, indem wir setzen:

$$(26)\qquad T = \sum \frac{m}{2} v^2,$$

so lautet die Gleichung:

$$(27)\qquad dT = \sum \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Der Ausdruck an der rechten Seite der Gleichung bedeutet die während der Zeit dt gethane Arbeit.

Durch Integration dieser Gleichung von irgend einer Anfangszeit t_0 bis zur Zeit t erhalten wir, wenn wir unter T_0 die lebendige Kraft zur Zeit t_0 verstehen:

$$(28)\qquad T - T_0 = \int_{t_0}^{t} \sum \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung lässt sich in folgendem Satze aussprechen: *Die während irgend einer Zeit in dem Systeme stattfindende Zunahme der lebendigen Kraft ist gleich der während derselben Zeit von den wirksamen Kräften gethanen Arbeit.* Dabei gilt natürlich eine Abnahme der lebendigen Kraft als negative Zunahme.

Bei der Ableitung dieses Satzes wurde angenommen, dass alle Punkte frei beweglich seien. Es kann aber auch vorkommen, dass die Punkte in Bezug auf ihre Bewegungen gewissen Beschränkungen unterworfen sind. Die Punkte können unter einander irgendwie in Verbindung stehen, so dass durch die Bewegung Eines Punktes auch die Bewegungen anderer Punkte theilweise mit bestimmt werden, oder es können Beschränkungen von Aussen her gegeben sein, wie z. B. wenn einer der Punkte gezwungen ist, in einer gegebenen festen Fläche oder in einer festen Curve zu bleiben, wodurch dann natürlich auch diejenigen Punkte, welche etwa mit ihm in Verbindung stehen, in ihrer Bewegung beschränkt werden.

Wenn diese beschränkenden Bedingungen sich durch Gleichungen ausdrücken lassen, welche nur die Coordinaten der Punkte enthalten, so lässt sich durch Betrachtungen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, nachweisen, dass die Widerstandskräfte, welche in diesen Bedingungen *implicite* enthalten sind, bei der Bewegung der Punkte keine Arbeit leisten, woraus folgt, dass der obige Satz, welcher die Beziehung zwischen der lebendigen Kraft

und der Arbeit ausdrückt, bei der beschränkten Bewegung ebenso gilt, wie bei der freien.

Man pflegt diesen Satz den *Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit* zu nennen.

§. 9. Die Energie.

In der Gleichung (28) ist die in der Zeit von t_0 bis t gethane Arbeit durch folgendes Integral ausgedrückt:

$$\int_{t_0}^{t} \sum \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Hierin ist die Zeit t als einzige unabhängige Veränderliche betrachtet, und die Coordinaten der Punkte und die Kraftcomponenten sind als Functionen der Zeit angesehen. Wenn diese Functionen bekannt sind, wozu erforderlich ist, dass man den ganzen Verlauf der Bewegungen aller Punkte kennt, so ist die Integration immer ausführbar, und die Arbeit lässt sich somit ebenfalls als Function der Zeit bestimmen.

Es giebt aber, wie wir oben gesehen haben, auch solche Fälle, wo es nicht nöthig ist, alle Grössen durch Eine Veränderliche auszudrücken, sondern die Integration auch ausführbar ist, wenn der Differentialausdruck in der Form

$$\sum (Xdx + Ydy + Zdz)$$

geschrieben wird, und darin die Coordinaten als unabhängige Veränderliche betrachtet werden. Dazu muss der vorstehende Ausdruck das vollständige Differential einer Function der Coordinaten sein, oder, mit anderen Worten, die in dem Systeme wirkenden Kräfte müssen ein Ergal haben. Wir wollen das Ergal, welches der negative Werth jener Function ist, jetzt mit einem einfachen Buchstaben bezeichnen. Dazu wählt man in der Mechanik gewöhnlich den Buchstaben U; da es aber in der mechanischen Wärmetheorie Brauch geworden ist, diesen Buchstaben für eine andere Grösse, von der gleich weiter unten die Rede sein wird, anzuwenden, so wollen wir das Ergal mit J bezeichnen. Dann ist zu setzen:

$$\sum (Xdx + Ydy + Zdz) = -\,dJ, \tag{29}$$

und daher, wenn J_0 den Werth des Ergals zur Zeit t_0 darstellt:

(30) $$\int_{t_0}^{t} \sum (X dx + Y dy + Z dz) = J_0 - J,$$

wodurch ausgedrückt wird, dass die Arbeit gleich der Abnahme des Ergals ist.

Setzen wir die Differenz $J_0 - J$ für das in der Gleichung (28) befindliche Integral ein, so kommt:

$$T - T_0 = J_0 - J,$$

oder umgeschrieben:

(31) $$T + J = T_0 + J_0.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Satz: *die Summe aus lebendiger Kraft und Ergal bleibt während der Bewegung constant.*

Die Summe aus lebendiger Kraft und Ergal, welche wir mit einem einfachen Buchstaben bezeichnen wollen, indem wir setzen:

(32) $$U = T + J,$$

wird die *Energie* des Systemes genannt, so dass wir den Satz auch kürzer so aussprechen können: *die Energie bleibt während der Bewegung constant.*

Dieser Satz, welcher in neuerer Zeit eine viel allgemeinere Anwendung gefunden hat, als früher, und gegenwärtig eine der wichtigsten Grundlagen der ganzen mathematischen Physik bildet, ist bekannt unter dem Namen *des Satzes von der Erhaltung der Energie.*

ABSCHNITT I.

Erster Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie
oder
Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit.

§. 1. Ausgangspunkt der Theorie.

Nachdem in früherer Zeit fast allgemein die Ansicht gegolten hatte, dass die Wärme ein besonderer Stoff sei, welcher in den Körpern in grösserer oder geringerer Menge vorhanden sei, und dadurch ihre höhere oder tiefere Temperatur bedinge, und welcher auch von den Körpern ausgesandt werde, und dann den leeren Raum und auch solche Räume, welche ponderable Masse enthalten, mit ungeheurer Geschwindigkeit durchfliege, und so die strahlende Wärme bilde, hat sich in neuerer Zeit die Ansicht Bahn gebrochen, dass die Wärme eine Bewegung sei. Dabei wird die in den Körpern befindliche Wärme, welche die Temperatur derselben bedingt, als eine Bewegung der ponderablen Atome betrachtet, an welcher auch der im Körper befindliche Aether theilnehmen kann, und die strahlende Wärme wird als eine schwingende Bewegung des Aethers angesehen.

Auf eine Auseinandersetzung der Thatsachen, Versuche und Schlussweisen, durch welche man zu dieser veränderten Ansicht geführt wurde, will ich hier nicht eingehen, weil dabei manches zur Sprache kommen müsste, was besser erst im Verlaufe des Buches an den geeigneten Stellen besprochen wird. Ich glaube, die Uebereinstimmung der aus der neuen Theorie abgeleiteten

Resultate mit der Erfahrung wird am besten dazu dienen können, die Grundlagen der Theorie als richtig zu bestätigen.

Wir wollen also bei unserer Entwickelung von der Annahme ausgehen, dass die Wärme in einer Bewegung der kleinsten Körper- und Aethertheilchen bestehe, und dass die Quantität der Wärme das Maass der lebendigen Kraft dieser Bewegung sei. Dabei wollen wir über die Art der Bewegung gar keine besondere Voraussetzung machen, sondern nur den Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit, welcher für jede Art von Bewegung gilt, auf die Wärme anwenden und den dadurch entstehenden Satz als ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie hinstellen.

§. 2. Positiver und negativer Sinn der mechanischen Arbeit.

Im §. 1 der Einleitung wurde bei der Bewegung eines Punktes die mechanische Arbeit definirt als *das Product aus dem Wege und der in die Richtung des Weges fallenden Componente der auf den Punkt wirkenden Kraft.* Danach wird die Arbeit positiv, wenn die Kraftcomponente in der Geraden, in welcher der Weg liegt, nach derselben Seite fällt, wie der Weg, und negativ, wenn sie nach der entgegengesetzten Seite fällt. Bei dieser Bestimmung des positiven Sinnes der mechanischen Arbeit lautet der Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit: *die Zunahme der lebendigen Kraft ist gleich der geleisteten Arbeit, oder gleich der Zunahme der Arbeit.*

Man kann die Sache aber auch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten.

Wenn ein materieller Punkt eine Bewegung angenommen hat, so kann er diese, wegen seines Beharrungsvermögens, auch dann fortsetzen, wenn die auf ihn wirkende Kraft eine der Bewegung entgegengesetzte Richtung hat, wobei freilich seine Geschwindigkeit und somit auch seine lebendige Kraft allmälig abnimmt. Ein unter dem Einflusse der Schwere stehender materieller Punkt z. B., wenn er einen Stoss nach Oben erhalten hat, kann sich der Schwere entgegen bewegen, wobei die durch den Stoss erhaltene Geschwindigkeit allmälig geringer wird. In einem solchen Falle ist die Arbeit, wenn sie als eine von der Kraft gethane Arbeit betrachtet wird, negativ. Man kann aber auch die Arbeit in der Weise betrachten, dass man

in solchen Fällen, wo durch die vorhandene Bewegung, vermittelst des Beharrungsvermögens, eine Kraft überwunden wird, die Arbeit als positiv rechnet, dagegen in solchen Fällen, wo der Punkt der Kraft nachgiebt, die Arbeit als negativ rechnet. Unter Anwendung einer im §. 1 der Einleitung angeführten Ausdrucksweise, bei welcher der auf die beiden entgegengesetzten Richtungen der Kraftcomponente bezügliche Unterschied durch das Verbum ausgedrückt wird, lässt sich das Vorige noch einfacher so aussprechen: *man kann festsetzen, dass nicht die von einer Kraft gethane, sondern die von einer Kraft erlittene Arbeit als positiv gerechnet werden soll.*

Bei dieser Bestimmungsweise der Arbeit lautet der Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit folgendermaassen: *die Abnahme der lebendigen Kraft ist gleich Zunahme der Arbeit* oder: *die Summe aus lebendiger Kraft und Arbeit ist constant.* Diese letzte Form des Satzes ist für das Folgende sehr bequem.

Bei solchen Kräften, welche ein Ergal haben, wurde in §. 6 der Einleitung die Bedeutung dieser Grösse so definirt, dass gesagt werden konnte: die Arbeit ist gleich der *Abnahme* des Ergals. Unter Anwendung der vorher besprochenen Bestimmungsweise der Arbeit muss statt dessen gesagt werden: die Arbeit ist gleich der *Zunahme* des Ergals, und es kann daher, wenn die im Ergal vorkommende additive Constante in geeigneter Weise bestimmt wird, das Ergal einfach als Ausdruck der Arbeit betrachtet werden.

§. 3. Ausdruck des ersten Hauptsatzes.

Nachdem wir den positiven Sinn der Arbeit in der vorstehenden Weise festgesetzt haben, können wir den aus dem Satze von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit abzuleitenden ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, welcher *der Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit* genannt wird, folgendermaassen aussprechen:

In allen Fällen, wo durch Wärme Arbeit entsteht, wird eine der erzeugten Arbeit proportionale Wärmemenge verbraucht, und umgekehrt kann durch Verbrauch einer ebenso grossen Arbeit dieselbe Wärmemenge erzeugt werden.

Wenn Wärme verbraucht wird und dafür Arbeit entsteht, so kann man sagen, die Wärme habe sich in Arbeit verwandelt, und

umgekehrt, wenn Arbeit verbraucht wird, und dafür Wärme entsteht, kann man sagen, es habe sich Arbeit in Wärme verwandelt. Unter Anwendung dieser Ausdrucksweise nimmt der vorige Satz folgende Form an:

Es lässt sich Arbeit in Wärme und umgekehrt Wärme in Arbeit verwandeln, wobei stets die Grösse der einen der der andern proportional ist.

Dieser Satz ist durch manche schon früher bekannte Erscheinungen und in neuerer Zeit durch so viele und verschiedenartige Versuche bestätigt, dass man ihn, auch abgesehen von dem Umstande, dass er einen speciellen Fall jenes mechanischen Satzes bildet, als einen aus Erfahrungen und Beobachtungen abgeleiteten Satz annehmen kann.

§. 4. Verhältnisszahl zwischen Wärme und Arbeit.

Während der mechanische Satz aussagt, dass die Veränderung der lebendigen Kraft und die ihr entsprechende Arbeit unter einander *gleich* seien, ist in dem Satze, welcher die Beziehung zwischen Wärme und Arbeit ausdrückt, nur von *Proportionalität* die Rede. Das hat seinen Grund darin, dass die Wärme nicht nach demselben Maasse gemessen wird, wie die Arbeit. Die Arbeit wird nach der früher angeführten mechanischen Einheit, dem *Kilogrammeter*, gemessen; für die Wärme dagegen wird eine nur nach der Bequemlichkeit der Messung gewählte Einheit angewandt, nämlich *diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um* 1 *Kil. Wasser von* 0° *auf* 1° *C. zu erwärmen.*

Hiernach kann natürlich zwischen Wärme und Arbeit nur Proportionalität stattfinden, und die Verhältnisszahl muss besonders bestimmt werden.

Wenn diese Verhältnisszahl so gewählt wird, dass sie die Arbeit angiebt, welche einer Wärmeeinheit entspricht, so nennt man sie das *mechanische Aequivalent der Wärme;* wird sie dagegen so gewählt, dass sie die Wärmemenge angiebt, welche einer Arbeitseinheit entspricht, so nennt man sie das *calorische Aequivalent der Arbeit.* Wir wollen das mechanische Aequivalent der Wärme mit E, und demgemäss das calorische Aequivalent der Arbeit mit $\frac{1}{E}$ bezeichnen.

Die Bestimmung der Verhältnisszahl ist auf verschiedene Weisen ausgeführt. Theils hat man sie durch Schlüsse aus schon vorhandenen Daten abzuleiten gesucht, was zuerst von Mayer nach richtigen Principien in einer weiter unten zu erwähnenden Weise geschehen ist, wobei freilich wegen der Unvollkommenheit der damals vorhandenen Data das Resultat etwas ungenau wurde, theils hat man sie durch besonders für diesen Zweck angestellte Experimente zu bestimmen gesucht. Vorzugsweise ist dem ausgezeichneten englischen Physiker Joule das Verdienst zuzuschreiben, mit grösster Umsicht und Sorgfalt dieses Verhältniss festgestellt zu haben. Einige seiner Versuche, sowie auch spätere von Anderen ausgeführte Bestimmungen werden besser erst nach den betreffenden theoretischen Entwickelungen Platz finden, und ich will mich hier darauf beschränken, diejenigen der Joule'schen Versuche anzuführen, welche am leichtesten verständlich und deren Resultate zugleich am zuverlässigsten sind.

Joule hat nämlich die Wärme, welche durch Reibung erzeugt wird, unter verschiedenen Umständen gemessen und mit der zur Hervorbringung der Reibung verwandten Arbeit, welche er durch herabsinkende Gewichte geschehen liess, verglichen. Diese Versuche sind ihrer Wichtigkeit wegen schon sehr häufig in verschiedenen Lehrbüchern beschrieben und neuerlich sind auch die Abhandlungen von Joule gesammelt in deutscher Uebersetzung von Spengel erschienen. Es wird daher nicht nöthig sein, auch hier eine Beschreibung der Versuche zu geben, sondern es wird genügen, die Resultate anzuführen, was am besten nach der im Jahre 1850 in den Phil. Trans. veröffentlichten Abhandlung geschehen kann.

In einer ersten, sehr ausgedehnten Versuchsreihe wurde Wasser mit Hülfe eines gedrehten Schaufelapparates in einem Gefässe gerührt, welches so eingerichtet war, dass nicht die ganze Wassermasse in gleichmässige Rotation kommen konnte, sondern dass das Wasser, nachdem es in Bewegung gesetzt war, immer wieder durch feststehende Schirme in seiner Bewegung gehemmt wurde, wodurch vielfache Wirbel entstehen mussten, welche eine bedeutende Reibung verursachten. Das in englischen Maassen ausgedrückte Resultat ist, dass zur Hervorbringung der Wärmemenge, welche ein englisches Pfund Wasser um einen Grad Fahrenheit erwärmen kann, eine Arbeit von 772·695 engl. Fusspfund gehört.

In zwei anderen Versuchsreihen würde in ähnlicher Weise Quecksilber gerührt, und das Resultat war 774·083 Fusspfund.

Endlich wurden in zwei Versuchsreihen Gusseisenstücke an einander gerieben, welche sich unter Quecksilber befanden und an dieses die erzeugte Wärme abgaben. Das Resultat war 774·987 Fusspfund.

Unter allen seinen Resultaten betrachtet Joule das beim Wasser gefundene als das genaueste, und, indem er es wegen des Tones, der beim Rühren erzeugt wurde, noch ein Wenig reduciren zu dürfen glaubt, giebt er schliesslich

772 Fusspfund

als den wahrscheinlichsten Werth an.

Rechnet man diese Zahl in die entsprechende auf französische Maasse bezügliche Zahl um, so erhält man das Resultat, *dass zur Erzeugung der Wärmemenge, welche ein Kilogramm Wasser um einen Grad Celsius erwärmen kann, eine Arbeit von* 423·55 *Kilogrammeter gehört.*

Diese Zahl scheint unter den bisher bestimmten das meiste Vertrauen zu verdienen, und wir wollen sie daher im Folgenden für das mechanische Aequivalent der Wärme anwenden, und demgemäss setzen:

$$E = 423{\cdot}55. \tag{1}$$

Bei den meisten Rechnungen wird es unbedenklich erscheinen, statt der mit Decimalstellen versehenen Zahl die runde Zahl 424 anzuwenden.

§. 5. Mechanische Einheit der Wärme.

Seit der Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit aufgestellt ist, in Folge dessen diese beiden sich gegenseitig ersetzen können, kommt man oft in die Lage, Grössen bilden zu müssen, welche Wärme und Arbeit als Summanden enthalten. Da nun aber Wärme und Arbeit nach verschiedenen Maassen gemessen werden, so kann man in einem solchen Falle nicht einfach sagen, die Grösse sei die Summe der Wärme und der Arbeit, sondern man muss entweder sagen: *die Summe der Wärme und des Wärmewerthes der Arbeit*, oder: *die Summe der Arbeit und des Arbeitswerthes der Wärme.*

Wegen dieser Unbequemlichkeit hat Rankine vorgeschlagen, für die Wärme eine andere Einheit einzuführen, nämlich diejenige Wärmemenge, welche der Arbeitseinheit entspricht, auch als Wärmeeinheit zu wählen. Man kann diese Wärmeeinheit einfach die *mechanische* nennen.

Der *allgemeinen* Einführung der mechanischen Wärmeeinheit wird wohl der Umstand hinderlich sein, dass die bisher gebräuchliche Wärmeeinheit eine Grösse ist, welche mit den gewöhnlichen calorimetrischen Methoden, die meistens auf der Erwärmung von Wasser beruhen, innig zusammenhängt, so dass dabei nur geringe, auf sehr zuverlässige Messungen gestützte Reductionen nöthig sind, während die mechanische Wärmeeinheit ausserdem, dass sie dieselben Reductionen verlangt, noch das mechanische Aequivalent der Wärme als bekannt voraussetzt, eine Voraussetzung, die nur näherungsweise erfüllt ist. Indessen bei den theoretischen Entwickelungen der mechanischen Wärmetheorie, bei denen die Beziehung zwischen Arbeit und Wärme besonders oft vorkommt, gewährt das Verfahren, die Wärme in mechanischen Einheiten auszudrücken, so wesentliche Vereinfachungen, dass ich geglaubt habe, die Bedenken, welche ich früher gegen dieses Verfahren hatte, bei der gegenwärtigen mehr zusammenhängenden Darstellung dieser Theorie fallen lassen zu dürfen. Es soll daher im Folgenden, wo das Gegentheil nicht ausdrücklich gesagt wird, immer vorausgesetzt werden, dass die Wärme nach mechanischen Einheiten gemessen sei.

Bei dieser Art der Messung nimmt der oben ausgesprochene erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie eine noch bestimmtere Form an, indem er nicht bloss aussagt, dass die Wärme und die ihr entsprechende Arbeit *proportional*; sondern dass sie *gleich* seien.

Will man später eine nach mechanischen Einheiten gemessene Wärmemenge wieder in gewöhnlichen Wärmeeinheiten ausdrücken, so braucht man dazu die auf die ersteren Einheiten bezügliche Zahl nur durch das mechanische Aequivalent der Wärme, also durch E zu dividiren.

§. 6. Aufstellung der ersten Hauptgleichung.

Es sei irgend ein Körper gegeben und sein Zustand in Bezug auf Temperatur, Volumen etc. als bekannt vorausgesetzt. Wenn

diesem Körper eine unendlich kleine Wärmemenge dQ mitgetheilt wird, so fragt es sich, welche Wirkung sie ausübt, und was aus ihr wird.

Sie kann einestheils dazu dienen, die im Körper wirklich vorhandene Wärme zu vermehren, anderntheils kann sie, wenn der Körper in Folge der Wärmeaufnahme eine Zustandsänderung erleidet, welche mit der Ueberwindung von Kräften verbunden ist, zu der dabei geschehenden Arbeit verbraucht werden. Wenn wir die im Körper vorhandene Wärme oder, wie wir kürzer sagen wollen, den *Wärmeinhalt* des Körpers mit H und die unendlich kleine Zunahme dieser Grösse mit dH bezeichnen, und für die unendlich kleine Arbeit das Zeichen dL wählen, so können wir folgende Gleichung bilden:

$$\text{(I.)} \qquad dQ = dH + dL.$$

Die Kräfte, um welche es sich bei der Arbeitsleistung handelt, lassen sich in zwei Classen theilen, erstens diejenigen, welche die Atome des Körpers untereinander ausüben, und welche daher in der Natur des Körpers selbst begründet sind, und zweitens die, welche von fremden Einflüssen, unter denen der Körper steht, herrühren. Nach diesen beiden Classen von Kräften, welche zu überwinden sind, habe ich die von der Wärme geleistete Arbeit in die *innere* und *äussere* Arbeit getheilt. Bezeichnen wir diese beiden Arbeitsgrössen mit dJ und dW, so ist zu setzen:

$$\text{(2)} \qquad dL = dJ + dW,$$

und die vorige Gleichung geht dadurch über in:

$$\text{(II.)} \qquad dQ = dH + dJ + dW.$$

§. 7. Verschiedenes Verhalten der Grössen J, W und H.

Die innere und äussere Arbeit stehen unter wesentlich verschiedenen Gesetzen.

Was zunächst die *innere* Arbeit anbetrifft, so ist leicht zu übersehen, dass, wenn ein Körper, von irgend einem Anfangszustande ausgehend, eine Reihe von Veränderungen durchmacht, und schliesslich wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, dann die dabei vorkommenden inneren Arbeitsgrössen sich gerade gegenseitig aufheben müssen. Bliebe nämlich noch eine gewisse positive oder negative innere Arbeit übrig, so müsste durch diese

eine entgegengesetzte äussere Arbeit oder eine Aenderung der vorhandenen Wärmequantität bewirkt sein, und da man denselben Process beliebig oft wiederholen könnte, so würde man dadurch je nach dem Vorzeichen im einen Falle fortwährend Arbeit oder Wärme aus Nichts schaffen, und im anderen Falle fortwährend Arbeit oder Wärme verlieren, ohne ein Aequivalent dafür zu erhalten, was wohl beides allgemein als unmöglich anerkannt werden wird." Wenn somit bei jeder Rückkehr des Körpers in seinen Anfangszustand die innere Arbeit Null wird, so folgt daraus weiter, dass bei einer beliebigen Zustandsänderung des Körpers, die innere Arbeit durch den Anfangs- und Endzustand vollkommen bestimmt ist, ohne dass man die Art und Weise, wie er aus dem einen in den andern gelangte, zu kennen braucht. Denkt man sich nämlich, dass der Körper in verschiedenen Weisen aus dem einen in den anderen Zustand gebracht und immer in einer und derselben Weise wieder in den ersten Zustand zurückgebracht werde, so müssen bei den in verschiedenen Weisen vor sich gehenden ersten Aenderungen innere Arbeiten geleistet werden, welche sich alle mit einer und derselben bei der Rückänderung geleisteten inneren Arbeit aufheben, was nur möglich ist, wenn sie untereinander gleich sind.

Wir müssen demnach annehmen, dass die inneren Kräfte ein *Ergal* haben, welches eine Grösse ist, die durch den gerade stattfindenden Zustand des Körpers vollständig bestimmt wird, ohne dass man zu wissen braucht, wie er in diesen Zustand gelangt ist. Dann wird die innere Arbeit durch die Zunahme des Ergals, welches wir mit J bezeichnen wollen, dargestellt, und für eine unendlich kleine Veränderung des Körpers bildet das Differential des Ergals dJ den Ausdruck der inneren Arbeit, was mit der in (2) und (II.) angewandten Bezeichnung übereinstimmt.

Betrachten wir nun die *äussere* Arbeit, so finden wir bei dieser ein ganz anderes Verhalten, als bei der inneren. Sie kann, wenn der Anfangs- und Endzustand des Körpers gegeben sind, doch noch sehr verschieden ausfallen.

Um dieses an einigen Beispielen zu zeigen, wählen wir als Körper zunächst ein Gas, dessen Zustand durch seine Temperatur t und sein Volumen v bestimmt wird, und bezeichnen die Anfangswerthe dieser Grössen mit t_1, v_1 und ihre Endwerthe mit t_2, v_2, wobei wir voraussetzen wollen, dass $t_2 > t_1$ und $v_2 > v_1$. Wenn nun die Aenderung in der Weise vor sich geht, dass das Gas bei

der Temperatur t_1 sich von dem Volumen v_1 bis v_2 ausdehnt und dann bei dem Volumen v_2 von der Temperatur t_1 bis t_2 erwärmt wird, so besteht die äussere Arbeit darin, dass bei der Ausdehnung derjenige äussere Druck überwunden wird, welcher der Temperatur t_1 entspricht. Wenn dagegen die Aenderung in der Weise geschieht, dass das Gas zuerst bei dem Volumen v_1 von der Temperatur t_1 bis t_2 erwärmt wird, und dann bei der Temperatur t_2 sich von dem Volumen v_1 bis v_2 ausdehnt, so besteht die äussere Arbeit darin, dass bei der Ausdehnung derjenige Druck überwunden wird, welcher der Temperatur t_2 entspricht. Da der letztere Druck grösser ist, als der erstere, so wird im zweiten Falle eine grössere äussere Arbeit geleistet, als im ersten. Nimmt man endlich an, dass Ausdehnung und Erwärmung irgend wie in Absätzen wechseln oder auch nach irgend einem Gesetze gleichzeitig stattfinden, so erhält man immer andere Druckkräfte und somit eine unendliche Mannigfaltigkeit von Arbeitsgrössen bei demselben Anfangs- und Endzustande.

Ein anderes einfaches Beispiel ist folgendes. Es sei eine Quantität einer Flüssigkeit von der Temperatur t_1 gegeben, welche in gesättigten Dampf von der höheren Temperatur t_2 verwandelt werden soll. Diese Umänderung kann so geschehen, dass man die Flüssigkeit zuerst als solche bis t_2 erwärmt und dann bei dieser Temperatur verdampfen lässt, oder so, dass man die Flüssigkeit bei der Temperatur t_1 verdampfen lässt, und dann den Dampf bis t_2 erwärmt, und zugleich so zusammendrückt, dass er auch bei der Temperatur t_2 gesättigt ist, oder endlich so, dass man die Verdampfung bei irgend welchen mittleren Temperaturen stattfinden lässt. Die äussere Arbeit, welche sich wieder auf die Ueberwindung des äusseren Druckes bei der Volumenänderung bezieht, hat in allen diesen Fällen verschiedene Werthe.

Der vorstehend nur beispielsweise für zwei bestimmte Körper besprochene Unterschied in der Art der Veränderung lässt sich allgemein dadurch ausdrücken, dass man sagt: der Körper kann *auf verschiedenen Wegen* aus dem einen Zustande in den anderen übergehen.

Ausser diesem Unterschiede kann noch ein anderer vorkommen. Wenn ein Körper bei einer Zustandsänderung einen äusseren Widerstand überwindet, so kann dieser entweder so gross sein, dass die volle Kraft des Körpers nur gerade zu seiner Ueberwindung ausreicht, oder er kann kleiner sein. Als Beispiel wollen wir wieder

eine Quantität eines Gases betrachten, welches bei gegebener Temperatur und gegebenem Volumen eine gewisse Expansivkraft besitzt. Wenn dieses Gas sich ausdehnt, so muss der äussere Gegendruck, den es dabei zu überwinden hat, zwar, um überwunden zu werden, geringer sein, als die Expansivkraft des Gases, aber die Differenz zwischen beiden kann beliebig klein sein, und als Grenzfall können wir annehmen, dass beide gleich seien. Es können aber auch solche Fälle vorkommen, wo jene Differenz eine endliche, mehr oder weniger beträchtliche Grösse ist. Wenn z. B. das Gefäss, in welchem das Gas sich zu Anfang mit einer gewissen Expansivkraft befindet, plötzlich mit einem Raume, in welchem ein geringerer Druck herrscht, oder mit einem ganz leeren Gefässe in Verbindung gesetzt wird, so überwindet das Gas bei seiner Ausdehnung eine geringere äussere Gegenkraft, als es überwinden könnte oder auch gar keine äussere Gegenkraft, und leistet daher eine geringere äussere Arbeit, als es leisten könnte, oder auch gar keine äussere Arbeit.

Im ersteren Falle, wo Druck und Gegendruck in jedem Augenblicke gleich sind, kann das Gas durch denselben Druck, den es bei der Ausdehnung überwunden hat, auch wieder zusammengedrückt werden. Wenn aber der überwundene Druck kleiner war, als die Expansivkraft, so kann das Gas durch diesen Druck nicht wieder zusammengedrückt werden. Man kann daher den Unterschied so aussprechen: im ersteren Falle findet die Ausdehnung in *umkehrbarer* Weise statt, und im letzteren in *nicht umkehrbarer* Weise.

Diese Art des Ausdruckes können wir auch auf andere Fälle, wo unter Ueberwindung irgend welcher Widerstände Zustandsänderungen vorkommen, anwenden, und können den zuletzt besprochenen, die äussere Arbeit beeinflussenden Unterschied allgemein folgendermaassen aussprechen. *Bei einer bestimmten Zustandsänderung kann die äussere Arbeit verschieden ausfallen, je nachdem die Zustandsänderung in umkehrbarer oder in nicht umkehrbarer Weise stattfindet.*

Neben den beiden auf die Arbeit bezüglichen Differentialen dJ und dW kommt an der rechten Seite der Gleichung (II.) noch ein drittes Differential vor, nämlich das Differential der im Körper wirklich vorhandenen Wärme oder seines Wärmeinhaltes H. Diese Grösse H hat offenbar auch die in Bezug auf J besprochene Eigen-

schaft, dass sie schon bestimmt ist, sobald der Zustand des Körpers gegeben ist, ohne dass man die Art, wie er in denselben gelangt ist, zu kennen braucht.

§. 8. Die Energie des Körpers.

Da die im Körper wirklich vorhandene Wärme und die innere Arbeit sich in der letztgenannten für die Behandlung sehr wichtigen Beziehung unter einander gleich verhalten, und da wir ferner, wegen unserer Unbekanntschaft mit den inneren Kräften der Körper, gewöhnlich nicht die einzelnen Werthe dieser beiden Grössen, sondern nur ihre Summe kennen, so habe ich schon in meiner ersten, 1850 erschienenen, auf die Wärme bezüglichen Abhandlung[1]) diese beiden Grössen unter Ein Zeichen zusammengefasst. Dasselbe wollen wir auch hier thun, indem wir setzen:

(3) $$U = H + J,$$

wodurch die Gleichung (II.) übergeht in:

(III.) $$dQ = dU + dW.$$

Die bei jener Gelegenheit von mir in die Wärmelehre eingeführte Function U ist seitdem auch von anderen Autoren, welche über die mechanische Wärmetheorie geschrieben haben, adoptirt, und da die Definition, welche ich von ihr gegeben hatte[2]), dass sie, wenn man von irgend einem Anfangszustande ausgeht, die hinzugekommene wirklich vorhandene Wärme und die zu innerer Arbeit verbrauchte Wärme umfasse, etwas lang ist, so sind von verschiedenen Seiten Vorschläge für kürzere Benennungen gemacht.

Thomson hat die Function in seiner Abhandlung von 1851[3]) *the mechanical energy of a body in a given state* genannt, und Kirchhoff[4]) hat für sie den Namen *Wirkungsfunction* angewandt. Ferner hat Zeuner in seiner 1860 erschienenen Schrift „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie“ die mit dem calorischen Aequivalente der Arbeit multiplicirte Grösse U die *innere Wärme* des Körpers genannt.

In Bezug auf den letzten Namen habe ich schon im Jahre 1864 gelegentlich bemerkt[5]), dass er mir der Bedeutung der Grösse

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 79, S. 368 und Abhandlungensammlung, erste Abhandlung.

[2]) An den anderen Orten S. 385 und S. 33.

[3]) *Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. XX, p. 475.*

[4]) Pogg. Ann. Bd. 103, S. 177.

[5]) Meine Abhandlungensammlung Bd. I, S. 281.

U nicht ganz zu entsprechen scheint, da nur ein Theil dieser Grösse wirklich im Körper vorhandene Wärme, d. h. lebendige Kraft seiner Molecularbewegungen darstellt, während der übrige Theil sich auf Wärme bezieht, welche zu innerer Arbeit verbraucht ist, und folglich nicht mehr als Wärme existirt. In der 1866 erschienenen zweiten Auflage seines Buches hat Zeuner dann die Aenderung vorgenommen, dass er die Grösse U die *innere Arbeit* des Körpers genannt hat. Ich muss aber gestehen, dass ich diesem Namen ebenso wenig zustimmen kann, wie dem ersteren, indem er mir nach der anderen Seite hin zu beschränkt zu sein scheint.

Von den beiden anderen Namen scheint mir besonders das von Thomson gebrauchte Wort *energy* sehr passend zu sein, indem die Grösse, um die es sich hier handelt, ganz derjenigen entspricht, welche in der Mechanik mit diesem Worte bezeichnet wird. Ich habe mich daher dieser Benennungsweise angeschlossen, und werde auch im Folgenden die Grösse U die *Energie* des Körpers nennen.

In Bezug auf die vollständige Bestimmung des Ergals und der das Ergal enthaltenden Energie, ist übrigens noch eine besondere Bemerkung zu machen. Da das Ergal die Arbeit darstellt, welche die inneren Kräfte leisten mussten, während der Körper aus einem als Ausgangspunkt gewählten Anfangszustande in seinen gegenwärtigen Zustand überging, so erhält man für den gegenwärtigen Zustand nur dann einen vollständig bestimmten Werth des Ergals, wenn jener Anfangszustand im Voraus und ein für alle Mal festgesetzt ist. Ist das Letztere nicht geschehen, so muss man sich zu der Function, welche das Ergal darstellt, noch eine willkürliche Constante hinzugefügt denken, welche sich auf den Anfangszustand bezieht. Dabei versteht es sich von selbst, dass es nicht immer nöthig ist, die Constante wirklich hinzuschreiben, sondern dass man sie sich in der Function, so lange diese durch ein allgemeines Symbol bezeichnet wird, mit einbegriffen denken kann. Ebenso muss man sich auch in dem Zeichen, welches die Energie darstellt, eine solche noch unbestimmte Constante mit einbegriffen denken.

§. 9. Gleichungen für endliche Zustandsänderungen und Kreisprocesse.

Denken wir uns die Gleichung (III.), welche sich auf eine unendlich kleine Veränderung bezieht, für irgend eine endliche Veränderung, oder auch für eine Reihe von auf einander folgenden

endlichen Veränderungen integrirt, so lässt sich das Integral des einen Gliedes sofort angeben. Die Energie U ist nämlich, wie oben gesagt, nur von dem gerade stattfindenden Zustande des Körpers, und nicht von der Art, wie er in denselben gelangt ist, abhängig. Daraus folgt, dass, wenn man den Anfangs- und Endwerth von U mit U_1 und U_2 bezeichnet, man setzen kann:

$$\int dU = U_2 - U_1.$$

Demnach lässt sich die durch Integration von (III.) entstehende Gleichung so schreiben:

$$\int dQ = U_2 - U_1 + \int dW, \tag{4}$$

oder, wenn wir die beiden in dieser Gleichung noch vorkommenden Integrale $\int dQ$ und $\int dW$, welche die während der Veränderung oder der Reihe von Veränderungen im Ganzen mitgetheilte Wärme und geleistete äussere Arbeit bedeuten, mit Q und W bezeichnen:

$$Q = U_2 - U_1 + W. \tag{4a}$$

Als speciellen Fall wollen wir annehmen, der Körper erleide eine solche Reihe von Veränderungen, durch die er schliesslich wieder in seinen Anfangszustand zurückkommt. Eine solche Reihe von Veränderungen habe ich einen *Kreisprocess* genannt. Da in diesem Falle der Endzustand des Körpers derselbe ist, wie der Anfangszustand, so ist auch der Endwerth U_2 der Energie gleich dem Anfangswerthe U_1, und die Differenz $U_2 - U_1$ ist somit gleich Null. Demnach gehen die Gleichungen (4) und (4a) für einen Kreisprocess über in folgende:

$$\int dQ = \int dW, \tag{5}$$

$$Q = W. \tag{5a}$$

Bei einem Kreisprocesse ist also die dem Körper im Ganzen mitgetheilte Wärme (d. h. die algebraische Summe aller einzelnen im Verlaufe des Kreisprocesses mitgetheilten Wärmemengen, welche theils positiv, theils negativ sein können), einfach gleich der im Ganzen geleisteten äusseren Arbeit.

§. 10. Gesammtwärme, latente und specifische Wärme.

Früher, als man die Wärme noch für einen Stoff hielt, und annahm, dieser Stoff könne in zwei verschiedenen Zuständen vorkommen, welche man mit den Worten *frei* und *latent* bezeichnete, hatte man einen Begriff eingeführt, welchen man in den Rechnungen

vielfach anwandte und die *Gesammtwärme* des Körpers nannte. Darunter verstand man diejenige Wärmemenge, welche ein Körper hat aufnehmen müssen, um aus einem gegebenen Anfangszustande in seinen gegenwärtigen Zustand zu gelangen, und welche nun, theils als freie, theils als latente Wärme, in ihm vorhanden sei. Man meinte dabei, diese Wärmemenge sei, wenn der Anfangszustand des Körpers als bekannt vorausgesetzt wird, durch seinen gegenwärtigen Zustand vollständig bestimmt, ohne dass die Art, wie er in diesen Zustand gelangt ist, dabei in Betracht komme.

Nachdem wir nun aber in Gleichung (4a) für die Wärmemenge Q, welche der Körper beim Uebergange aus dem Anfangszustande in den Endzustand aufgenommen hat, einen Ausdruck gewonnen haben, welcher die äussere Arbeit W enthält, müssen wir schliessen, dass von dieser Wärmemenge dasselbe gilt, wie von der äusseren Arbeit, nämlich dass sie nicht bloss vom Anfangs- und Endzustande des Körpers, sondern auch von der Art, wie er aus dem einen in den andern gelangt ist, abhängt. Der Begriff der Gesammtwärme als einer nur vom gegenwärtigen Zustande des Körpers abhängigen Grösse ist also nach der neueren Wärmetheorie nicht mehr zulässig.

Das Verschwinden von Wärme bei gewissen Zustandsänderungen der Körper, z. B. beim Schmelzen und Verdampfen, erklärte man früher, wie schon oben angedeutet wurde, daraus, dass diese Wärme in einen besonderen Zustand übergehe, in welchem sie durch unser Gefühl und das Thermometer nicht wahrnehmbar sei, und in welchem man sie daher *latent* nannte. Diese Erklärungsweise habe ich ebenfalls bestritten, und habe die Behauptung aufgestellt, alle in einem Körper vorhandene Wärme sei fühlbar und durch das Thermometer erkennbar; die bei jenen Zustandsänderungen der Körper verschwundene Wärme existire gar nicht mehr als Wärme, sondern sei *zu Arbeit verbraucht*, und die bei den entgegengesetzten Zustandsänderungen (z. B. Gefrieren und Dampfniederschlag) wieder zum Vorschein kommende Wärme trete nicht aus einer Verborgenheit hervor, sondern sei *durch Arbeit neu erzeugt*. Demgemäss habe ich vorgeschlagen, statt des Ausdruckes *latente* Wärme unter Anwendung des Wortes *Werk*, welches mit *Arbeit* im Wesentlichen gleichbedeutend ist, den Ausdruck *Werkwärme* zu gebrauchen [1]).

[1]) Durch den vorgeschlagenen Namen *Werkwärme* ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass man in den Fällen, in welchen die Werkwärme besonders häufig zur Sprache kommt, nämlich bei der Verdampfung und

Die Arbeit (oder das Werk), zu welcher die Wärme verbraucht wird, und durch welche bei der entgegengesetzten Veränderung Wärme erzeugt wird, kann von doppelter Art sein, nämlich *innere* und *äussere* Arbeit. Wenn z. B. eine Flüssigkeit verdampft, so muss dabei die Anziehung der Molecüle überwunden werden, und zugleich muss, da der Dampf einen grösseren Raum einnimmt, als die Flüssigkeit, der äussere Gegendruck überwunden werden. Diesen beiden Theilen der Arbeit (oder des Werkes) entsprechend kann man auch die gesammte Werkwärme in zwei Theile zerlegen, welche man die *innere Werkwärme* und die *äussere Werkwärme* nennen kann.

Diejenige Wärme, welche man einem Körper mittheilen muss, wenn man ihn ohne Aenderung seines Aggregatzustandes erwärmen will, betrachtete man früher gewöhnlich ganz als *freie* Wärme oder, besser gesagt, als im Körper *wirklich vorhanden* bleibende Wärme; indessen fällt auch von dieser Wärme ein grosser Theil in dieselbe Kategorie, wie die, welche man früher *latente Wärme* nannte, und für welche ich den Namen *Werkwärme* vorgeschlagen habe. Mit der Erwärmung eines Körpers ist nämlich der Regel nach auch eine Aenderung in der Anordnung seiner Molecüle verbunden, welche Aenderung gewöhnlich eine äusserlich wahrnehmbare Volumenveränderung des Körpers zur Folge hat, aber auch selbst in solchen Fällen, wo der Körper sein Volumen nicht ändert, stattfinden kann. Diese Anordnungsänderung erfordert eine gewisse Arbeit, welche theils innere, theils äussere sein kann, und zu dieser Arbeit (oder diesem Werke) wiederum wird Wärme verbraucht. Die dem Körper zugeführte Wärme dient also nur zum Theile zur Vermehrung der in ihm wirklich vorhandenen Wärme, und der übrige Theil dient als Werkwärme.

Aus diesem Verhalten habe ich z. B. die auffällig grosse specifische Wärme des flüssigen Wassers, welche viel grösser ist, als die des Eises und des Wasserdampfes, zu erklären gesucht[1]), indem ich angenommen habe, dass von der Wärmemenge, welche das Wasser bei seiner Erwärmung von Aussen empfängt, ein grosser

---

beim Schmelzen, nach Belieben, sofern es der Bequemlichkeit wegen zweckmässig erscheint, eine Zusammenziehung in dem Ausdrucke machen kann, und z. B. statt *Werkwärme der Verdampfung*, so wie ich es in meinen Abhandlungen gethan habe, kurz *Verdampfungswärme*, und statt *Werkwärme des Schmelzens* kurz *Schmelzwärme* sagen kann.

[1]) Pogg. Ann. Bd. 79, S. 375 und Abhandlungensammlung Bd. I, S. 23.

Theil zur Verringerung der Cohäsion verbraucht wird, und somit als Werkwärme dient.

Nach dem Vorstehenden wird es nöthig, neben den verschiedenen specifischen Wärmen, welche angeben, wie viel Wärme man einem Körper bei den verschiedenen Arten der Erwärmung mittheilen muss (wie z. B. die specifische Wärme eines festen oder flüssigen Körpers unter gewöhnlichem atmosphärischen Drucke und die specifische Wärme eines Gases bei constantem Volumen oder bei constantem Drucke), noch eine andere Grösse zu betrachten, welche angiebt, *um wieviel die in einer Gewichtseinheit eines Stoffes wirklich vorhandene Wärme, d. h. die lebendige Kraft der Bewegungen seiner kleinsten Theilchen, bei der Erwärmung um einen Grad zunimmt.* Diese Grösse wollen wir die *wahre Wärmecapacität* des Körpers nennen.

Es würde sogar zweckmässig sein, das Wort *Wärmecapacität*, auch wenn nicht *wahre* hinzugefügt wird, nur auf die wirklich im Körper vorhandene Wärme zu beziehen, dagegen für die Wärmemenge, welche ihm zur Erwärmung unter irgend welchen gegebenen Umständen im Ganzen mitgetheilt werden muss, und welche auch Werkwärme in sich begreift, immer den Ausdruck *specifische Wärme* anzuwenden. Da man indessen bis jetzt das Wort *Wärmecapacität* als gleichbedeutend mit dem Ausdrucke *specifische Wärme* zu gebrauchen pflegt, so ist, um ihm jene vereinfachte Bedeutung zu geben, noch die Hinzufügung des Beiwortes *wahre* nöthig.

§. 11. Ausdruck der äusseren Arbeit für einen besonderen Fall.

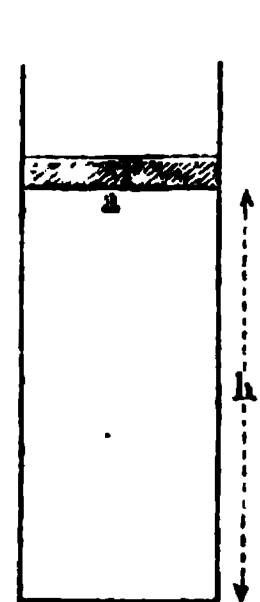
In der Gleichung (III.) ist die äussere Arbeit allgemein durch dW bezeichnet. Dabei ist über die Art der äusseren Kräfte, welche auf den Körper wirken, und auf welche sich die äussere Arbeit bezieht, gar keine besondere Annahme gemacht.

Es ist aber zweckmässig, einen Fall speciell zu betrachten, welcher besonders oft vorkommt, und zu einem sehr einfachen Ausdrucke der äusseren Arbeit führt, nämlich den, wo die einzige äussere Kraft, welche auf den Körper wirkt, oder wenigstens die einzige, welche bei der Bestimmung der Arbeit Berücksichtigung verdient, ein auf die Oberfläche des Körpers wirkender Druck ist, und wo dieser Druck (wie es bei flüssigen und luftförmigen Körpern, wenn

keine anderen fremden Kräfte mitwirken, immer stattfindet, und bei festen Körpern wenigstens stattfinden kann), an allen Punkten der Oberfläche gleich stark, und überall normal gegen die Oberfläche gerichtet ist. In diesem Falle braucht man zur Bestimmung der äusseren Arbeit nicht die Gestaltveränderungen des Körpers und seine Ausdehnung nach einzelnen verschiedenen Richtungen, sondern nur seine Volumenveränderung im Ganzen zu betrachten.

Als ein anschauliches Beispiel möge zunächst angenommen werden, der in Fig. 1 angedeutete, durch einen leicht beweglichen

Fig. 1.



Stempel P abgeschlossene Cylinder enthalte einen ausdehnsamen Stoff, z. B. eine Quantität eines Gases, welcher unter einem Drucke stehe, der für die Flächeneinheit durch p bezeichnet werden soll. Der Querschnitt des Cylinders und demgemäss auch die Fläche des Stempels werde mit a bezeichnet. Dann wird der Druck, welcher auf dem Stempel lastet, und welcher bei der Hebung des Stempels überwunden werden muss, durch das Product pa dargestellt. Wenn nun der Stempel sich zuerst in solcher Höhe befindet, dass seine untere Fläche um die Strecke h vom Boden des Cylinders entfernt ist, und dann um die unendlich kleine Strecke dh gehoben wird, so bestimmt sich die dabei geleistete äussere Arbeit durch die Gleichung:

$$dW = pa\,dh.$$

Nun ist aber, wenn v das Volumen des eingeschlossenen Stoffes bedeutet, zu setzen:

$$v = ah,$$

und somit:

$$dv = a\,dh,$$

wodurch die obige Gleichung übergeht in:

$$dW = p\,dv. \tag{6}$$

Dieselbe einfache Form nimmt das Differential der äusseren Arbeit auch für eine beliebige Gestalt des Körpers und eine beliebige Art der Ausdehnung an, wie man leicht durch folgende Betrachtung erkennen wird.

In Fig. 2 (a. f. S.) stelle die voll ausgezogene Linie die Oberfläche des Körpers in seinem ursprünglichen Zustande, und die punktirte Linie seine Oberfläche nach einer unendlich kleinen

Veränderung seiner Gestalt und seines Volumens dar. Von der ersteren Oberfläche betrachten wir ein Element $d\omega$ beim Punkte A.

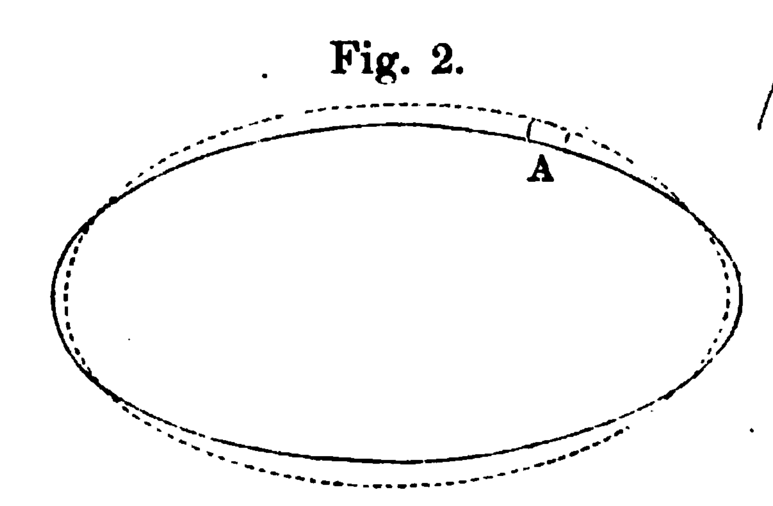


Fig. 2.

Eine auf diesem Flächenelemente errichtete Normale schneide die zweite Fläche in einer Entfernung dn von der ersten, wobei dn als positiv gerechnet wird, wenn die betreffende Stelle der zweiten Oberfläche ausserhalb des von der ersten Oberfläche eingeschlossenen Raumes liegt, und als negativ, wenn sie innerhalb liegt. Denkt man sich nun auf dem ganzen Umfange des Flächenelementes $d\omega$ unendlich viele Normalen bis zur zweiten Fläche errichtet, so wird dadurch ein unendlich kleiner, angenähert prismatischer Raum abgegrenzt, welcher das Element $d\omega$ als Grundfläche und dn als Höhe hat, und dessen Volumen daher durch das Product $d\omega\, dn$ dargestellt wird. Dieses unendlich kleine Volumen bildet den dem Flächenelemente $d\omega$ entsprechenden Theil der Volumenzunahme des Körpers. Wenn wir den Ausdruck $d\omega\, dn$ über die ganze Oberfläche integriren, erhalten wir die ganze Volumenzunahme des Körpers, also die Grösse dv, und wir können somit, indem wir die Integration über die Oberfläche durch ein mit dem Index ω versehenes Integralzeichen andeuten, schreiben:

$$dv = \int_\omega dn\, d\omega. \tag{7}$$

Bezeichnen wir ferner, wie oben, den Druck auf die Flächeneinheit der Oberfläche mit p, so ist der Druck auf das Flächenelement $d\omega$ gleich $p d\omega$. Demgemäss wird der Theil der äusseren Arbeit, welcher diesem Flächenelemente entspricht, und darin besteht, dass das Element unter dem Einflusse der äusseren Kraft $p d\omega$ um das Stück dn senkrecht verschoben wird, durch das Product $p\, d\omega\, dn$ ausgedrückt. Durch Integration dieses Ausdruckes über die ganze Oberfläche erhält man die ganze äussere Arbeit, nämlich:

$$dW = \int_\omega p\, dn\, d\omega.$$

Da p für die ganze Oberfläche gleich ist, so kann es aus dem Integralzeichen herausgenommen werden, so dass die Gleichung lautet:

$$dW = p \int_\omega dn\, d\omega,$$

und unter Anwendung von (7) übergeht in:

$$dW = p\, dv,$$

welches dieselbe Gleichung ist, die schon unter (6) gegeben wurde.

In Folge dieser Gleichung können wir der Gleichung (III.) für den Fall, wo als äussere Kraft nur ein gleichmässiger und normaler Oberflächendruck wirkt, folgende Gestalt geben:

$$\text{(IV.)} \qquad dQ = dU + p\, dv.$$

Diese Gleichung, welche den gebräuchlichsten mathematischen Ausdruck des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie bildet, wollen wir nun zunächst auf eine Körperclasse anwenden, welche sich durch die Einfachheit der Gesetze, unter denen sie steht, auszeichnet, und für welche daher auch die Gleichung eine besonders einfache Form annimmt, so dass die Rechnungen, zu denen sie Veranlassung giebt, sich leicht ausführen lassen.

ABSCHNITT II.

Behandlung der vollkommenen Gase.

§. 1. Gasförmiger Aggregatzustand.

Unter den Gesetzen, welche den gasförmigen Aggregatzustand charakterisiren, sind besonders das Mariotte'sche und das Gay-Lussac'sche Gesetz hervorzuheben, welche sich gemeinsam durch Eine Gleichung ausdrücken lassen. Es möge eine Gewichtseinheit eines Gases gegeben sein, welche bei der Temperatur des Gefrierpunktes unter irgend einem als Normaldruck angenommenen Drucke p_0 (z. B. dem Drucke einer Atmosphäre) das Volumen v_0 einnehme. Wenn dann bei der Temperatur t (nach Celsius-Graden gemessen) der Druck mit p und das Volumen mit v bezeichnet wird, so soll nach diesen Gesetzen die Gleichung:

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) \tag{1}$$

gelten, worin die Grösse α, welche man den Ausdehnungscoefficienten zu nennen pflegt, obwohl sie sich nicht bloss auf die Volumenänderung, sondern auch auf die Druckänderung bezieht, für alle Gase einen und denselben Werth haben soll.

Zwar hat in neuerer Zeit Regnault durch sehr sorgfältige Versuche nachgewiesen, dass diese Gesetze nicht in aller Strenge richtig sind, doch sind die Abweichungen für die permanenten Gase sehr gering, und werden nur bei solchen Gasen bedeutender, die sich condensiren lassen. Daraus scheint zu folgen, dass die Gesetze um so strenger gültig sind, je weiter das Gas in Bezug auf Druck und Temperatur von seinem Condensationspunkte entfernt ist. Man

kann sich daher, während die Genauigkeit für die permanenten Gase schon im gewöhnlichen Zustande so gross ist, dass man sie für die meisten Untersuchungen als vollkommen betrachten kann, für jedes Gas einen Grenzzustand denken, in dem die Genauigkeit wirklich vollkommen wird, und diesen ideellen Zustand wollen wir im Folgenden als erreicht annehmen und solche Gase, bei denen er vorausgesetzt wird, kurz *vollkommene* Gase nennen.

Da nun aber die Grösse α bei den wirklich vorhandenen Gasen nach Regnault's Bestimmungen nicht ganz gleich ist, und auch bei einem und demselben Gase unter verschiedenen Umständen etwas verschiedene Werthe hat, so fragt es sich, welchen Werth man dieser Grösse bei den vollkommenen Gasen, bei denen derartige Unterschiede nicht mehr vorkommen können, zuschreiben muss.

Jedenfalls müssen wir uns dabei an die Zahlen halten, welche für permanente Gase gefunden sind. Bei der Untersuchungsweise, welche sich auf die Druckzunahme bei constantem Volumen bezog, hat Regnault für verschiedene permanente Gase folgende Zahlen gefunden:

Atmosphärische Luft . . .	0·003665
Wasserstoff.	0·003667
Stickstoff	0·003668
Kohlenoxyd.	0·003667.

Diese Zahlen zeigen so unbedeutende Differenzen, dass bei einer Auswahl unter ihnen wenig darauf ankommt, für welche man sich entscheidet; da aber mit der atmosphärischen Luft von Regnault die meisten Versuche angestellt sind, und auch Magnus durch seine Versuche zu einem ganz übereinstimmenden Resultate gelangt ist, so scheint es mir am angemessensten, die Zahl 0·003665 zu wählen.

Nun hat aber Regnault bei der anderen Untersuchungsweise, wobei der Druck constant blieb, und die Volumenzunahme beobachtet wurde, einen etwas anderen Werth von α für die atmosphärische Luft gefunden, nämlich 0·003670. Ferner hat er beobachtet, dass verdünnte Luft einen etwas kleineren und verdichtete Luft einen etwas grösseren Ausdehnungscoefficienten hat, als Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit.

Dieser letztere Umstand hat einige Physiker zu dem Schlusse veranlasst, man müsse, weil die verdünnte Luft dem vollkommenen Gaszustande näher sei, als Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit, für

die vollkommenen Gase einen kleineren Werth als 0·003665 annehmen. Hiergegen ist aber einzuwenden, dass Regnault für Wasserstoff jene Abhängigkeit des Ausdehnungscoefficienten von der Dichtigkeit nicht beobachtet, sondern bei der einfachen und dreifachen Dichtigkeit fast genau denselben Werth erhalten hat, und dass er überhaupt gefunden hat, dass Wasserstoff sich in seinen Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze ganz anders und meistens sogar gerade entgegengesetzt verhält, wie atmosphärische Luft. Unter diesen Umständen scheint mir der obige aus dem Verhalten der atmosphärischen Luft gezogene Schluss etwas gewagt zu sein, denn man wird es gewiss als wahrscheinlich zugeben, dass der Wasserstoff dem vollkommenen Gaszustande mindestens ebenso nahe ist, wie atmosphärische Luft, und demgemäss muss man bei den auf diesen Zustand bezüglichen Schlüssen das Verhalten des Wasserstoffes ebenso gut berücksichtigen, wie dasjenige der atmosphärischen Luft.

Ich glaube daher, dass es für so lange, als nicht durch neue Beobachtungsdata zuverlässigere Anhaltspunkte für weitere Schlüsse gewonnen sind, am zweckmässigsten ist, sich an die Zahl zu halten, welche unter dem Drucke von einer Atmosphäre für atmosphärische Luft und Wasserstoff sehr nahe übereinstimmend gefunden ist, und zu setzen:

(2) $$\alpha = 0{\cdot}003665 = \frac{1}{273}.$$

Wenn man den Bruch $\frac{1}{\alpha}$ durch a bezeichnet, so kann man der Gleichung (1) auch folgende Form geben:

(3) $$pv = \frac{p_0 v_0}{a}(a + t).$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

(4) $$R = \frac{p_0 v_0}{a},$$

(5) $$T = a + t,$$

so kommt:

(6) $$pv = RT.$$

Hierin ist R eine Constante, welche von der Natur des Gases abhängt und seinem specifischen Gewichte umgekehrt proportional ist. T bedeutet die Temperatur, wenn sie nicht vom Gefrierpunkte aus, sondern von einem um a Grade tiefer liegenden Nullpunkte aus gezählt

wird. Diese von $-a$ an gezählte Temperatur wollen wir die *absolute* Temperatur nennen, indem wir uns vorbehalten, diesen Namen an einer anderen Stelle näher zu motiviren. Unter Voraussetzung des in (2) angenommenen Werthes von α erhalten wir:

$$(7) \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{\alpha} = 273 \\ T = 273 + t. \end{cases}$$

§. 2. Nebenannahme in Bezug auf gasförmige Körper.

Gay-Lussac hat den Versuch gemacht, dass er ein mit Luft gefülltes Gefäss mit einem gleich grossen luftleeren in Verbindung setzte, so dass die eine Hälfte der Luft in dieses überströmte. Indem er dann die Temperatur der beiden Hälften mass und mit der ursprünglichen Temperatur der Luft verglich, fand er, dass die übergeströmte Luft sich erwärmt und die zurückgebliebene Luft sich um ebenso viel abgekühlt hatte, so dass die mittlere Temperatur der ganzen Luftmasse nach der Ausdehnung dieselbe war, wie vor der Ausdehnung. Es hatte also bei dieser Art von Ausdehnung, bei welcher keine äussere Arbeit geleistet wurde, auch kein Wärmeverlust stattgefunden. Zu demselben Ergebnisse ist auch Joule[1]) und später Regnault[2]) gekommen, welche ähnliche Versuche mit grosser Sorgfalt ausgeführt haben.

Man kann den entsprechenden Satz auch unabhängig von jenen speciellen Experimenten durch gewisse in meiner ersten Abhandlung enthaltene Schlüsse aus den sonst schon bekannten Eigenschaften der Gase ableiten, wobei man zugleich den Grad seiner Genauigkeit erkennen kann.

Die Gase zeigen nämlich in ihrem Verhalten, besonders in der durch das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz ausgedrückten Beziehung zwischen Volumen, Druck und Temperatur, eine so grosse Regelmässigkeit, dass man dadurch zu der Vorstellung geleitet wird, dass die gegenseitige Anziehung der Molecüle, welche im Innern der festen und tropfbar flüssigen Körper wirkt, bei den Gasen schon aufgehoben sei, so dass die Wärme, während sie bei jenen, um eine Ausdehnung zu bewirken, nicht

---

1) *Phil. Mag. Ser. III, Vol. 26* und Joule, das mechanische Aequivalent der Wärme, übersetzt von Spengel, S. 65.

2) *Comptes rendus t. 36, p. 680.*

bloss den äusseren Druck, sondern auch die inneren Anziehungen überwinden muss, es bei den Gasen nur noch mit dem äusseren Drucke zu thun habe. Ist dieses der Fall, so kann, wenn ein Gas sich bei constanter Temperatur ausdehnt, dabei nur so viel Wärme *verbraucht* werden, wie zu der *äusseren* Arbeit nöthig ist. Ferner lässt sich auch nicht annehmen, dass die in dem Gase *wirklich vorhandene* Wärmemenge, nachdem es sich bei constanter Temperatur ausgedehnt hat, grösser sei, als vorher. Giebt man auch dieses zu, so erhält man folgenden Satz: *ein permanentes Gas verschluckt, wenn es sich bei constanter Temperatur ausdehnt, nur so viel Wärme, wie zu der äusseren Arbeit, die es dabei leistet, verbraucht wird.*

Natürlich darf man aber diesem Satze keine strengere Gültigkeit zuschreiben, als den Sätzen, aus welchen er abgeleitet ist, sondern muss vielmehr annehmen, dass er für jedes Gas in eben dem Grade genau ist, in welchem das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz auf dasselbe Anwendung findet. Nur für die vollkommenen Gase darf man ihn als streng richtig ansehen.

In diesem Sinne habe ich den Satz in Anwendung gebracht, und habe ihn als eine *Nebenannahme* mit den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie in Verbindung gesetzt und zu weiteren Schlüssen benutzt.

Später hat W. Thomson, welcher mit einem der gezogenen Schlüsse anfangs nicht übereinstimmte, im Vereine mit J. P. Joule es unternommen, die Richtigkeit des Satzes experimentell zu prüfen [1]), und sie haben dazu mit vieler Sorgfalt eine Reihe zweckmässig ersonnener Versuche angestellt, welche ihrer Wichtigkeit wegen weiter unten noch näher besprochen werden sollen. Dabei hat sich nicht nur der Satz im Allgemeinen, sondern auch die von mir über den Grad seiner Genauigkeit hinzugefügte Bemerkung durchaus bestätigt. Für die von ihnen untersuchten *permanenten* Gase, atmosphärische Luft und Wasserstoff, haben sie den Satz so nahe richtig gefunden, dass die Abweichungen in den meisten Rechnungen vernachlässigt werden können, während sie bei dem zur Untersuchung ausgewählten *nicht permanenten* Gase, der Kohlensäure, ganz so, wie es nach dem sonstigen Verhalten dieses Gases zu erwarten war, etwas grössere Abweichungen beobachtet haben.

---

1) *Phil. Transact. of the Roy. Soc. of London for 1853, 1854 and 1862.*

Hiernach wird man jetzt um so weniger Bedenken tragen, den Satz für die wirklich bestehenden Gase als so nahe richtig, wie das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz, und für die vollkommenen Gase als streng richtig in Anwendung zu bringen.

§. 3. Formen, welche die den ersten Hauptsatz ausdrückende Gleichung für vollkommene Gase annimmt.

Wir kehren nun zur Gleichung (IV.), nämlich

$$dQ = dU + pdv,$$

zurück, um sie auf ein vollkommenes Gas anzuwenden, wozu wir uns wieder, wie weiter oben, eine Gewichtseinheit desselben gegeben denken.

Der Zustand des Gases ist vollständig bestimmt, wenn seine Temperatur und sein Volumen gegeben ist, und ebenso lässt er sich durch Temperatur und Druck und durch Druck und Volumen bestimmen. Wir wollen zunächst die beiden erstgenannten Grössen, Temperatur und Volumen, zur Bestimmung des Zustandes des Gases auswählen, und demgemäss T und v als die unabhängigen Veränderlichen betrachten, von denen alle anderen auf den Zustand des Gases bezüglichen Grössen abhängen. Indem wir dann auch die Energie U des Gases als Function dieser beiden Veränderlichen ansehen, können wir schreiben:

$$dU = \frac{dU}{dT} dT + \frac{dU}{dv} dv,$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$dQ = \frac{dU}{dT} dT + \left(\frac{dU}{dv} + p\right) dv. \tag{8}$$

Diese Gleichung, welche in der vorstehenden Form nicht bloss für ein Gas, sondern für jeden Körper, dessen Zustand durch Temperatur und Volumen bestimmt wird, gültig ist, lässt sich für gasförmige Körper, wegen der besonderen Eigenschaften dieser letzteren, noch wesentlich vereinfachen.

Die Wärmemenge, welche das Gas aufnehmen muss, wenn es sich bei constanter Temperatur um dv ausdehnt, ist allgemein durch $\frac{dQ}{dv} dv$ zu bezeichnen. Da diese Wärmemenge nach der im vorigen Paragraphen besprochenen Nebenannahme gleich der bei der Ausdehnung geleisteten Arbeit ist, welche durch pdv dargestellt wird, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{dQ}{dv}dv = pdv,$$

woraus folgt:

$$\frac{dQ}{dv} = p.$$

Nun ist aber andererseits, gemäss der Gleichung (8), zu setzen:

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{dU}{dv} + p,$$

und aus der Vereinigung beider Gleichungen ergiebt sich:

$$(9) \qquad \frac{dU}{dv} = 0.$$

Hieraus ist zu schliessen, dass die Energie U bei einem vollkommenen Gase vom Volumen unabhängig ist, und somit nur eine Function der Temperatur sein kann.

Indem wir nun in der Gleichung (8) $\frac{dU}{dv}$ gleich Null setzen, und für $\frac{dU}{dT}$ das Zeichen C_v einführen, geht sie über in:

$$(10) \qquad dQ = C_v dT + pdv.$$

Aus der Form dieser Gleichung ersieht man sofort, dass C_v *die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen* bedeutet, indem $C_v dT$ die Wärmemenge ausdrückt, welche dem Gase bei der Erwärmung um dT mitgetheilt werden muss, wenn dv gleich Null ist. Da diese specifische Wärme gleich $\frac{dU}{dT}$, also gleich dem nach der Temperatur genommenen Differentialcoefficienten einer Temperaturfunction ist, so kann auch sie *nur eine Function der Temperatur* sein.

In der Gleichung (10) kommen alle drei Grössen T, v und p vor. Es ist aber leicht, mit Hülfe der Gleichung (6) eine derselben zu eliminiren, und indem wir dieses der Reihe nach mit allen dreien ausführen, erhalten wir drei verschiedene Formen der Gleichung.

Durch Elimination p geht sie über in:

$$(11) \qquad dQ = C_v dT + \frac{RT}{v} dv.$$

Um ferner v zu eliminiren, setzen wir:

$$v = \frac{RT}{p},$$

woraus folgt:

$$dv = \frac{R}{p} dT - \frac{RT}{p^2} dp.$$

Indem wir diesen Ausdruck von dv in (10) einsetzen und dann die beiden Glieder, welche dT enthalten, zusammenziehen, bekommen wir:

$$(12) \qquad dQ = (C_v + R)\, dT - \frac{RT}{p} dp.$$

Um endlich T zu eliminiren, setzen wir gemäss (6):

$$dT = \frac{vdp + pdv}{R},$$

wodurch (10) übergeht in:

$$(13) \qquad dQ = \frac{C_v}{R} vdp + \frac{C_v + R}{R} pdv.$$

§. 4. Folgerung in Bezug auf die beiden specifischen Wärmen und Umformung der vorigen Gleichungen.

Ebenso, wie aus der Gleichung (10) ersichtlich ist, dass die darin als Factor von dT stehende Grösse C_v die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet, ist auch aus der Gleichung (12) ersichtlich, dass der in ihr vorkommende Factor von dT, nämlich $C_v + R$, *die specifische Wärme bei constantem Drucke* darstellt. Wir können daher, wenn wir die letztere specifische Wärme mit C_p bezeichnen, setzen:

$$(14) \qquad C_p = C_v + R,$$

welche Gleichung die Beziehung zwischen den beiden specifischen Wärmen angiebt.

Da R eine Constante ist, und C_v, wie wir oben gesehen haben, nur eine Function der Temperatur sein kann, so folgt aus dieser Gleichung, dass auch C_p nur eine Function der Temperatur sein kann.

Als ich zuerst in der oben erläuterten Weise aus der mechanischen Wärmetheorie den Schluss zog, dass die beiden specifischen Wärmen eines permanenten Gases von seiner Dichtigkeit, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von dem Drucke, unter dem es steht, unabhängig sein müssen, und nur von der Temperatur abhängen können, und noch die Bemerkung hinzufügte, dass sie wahrscheinlich sogar constant seien, gerieth ich dadurch mit den damals herrschenden Ansichten in Widerspruch. Zu jener Zeit

galt es, in Folge der Versuche von Suermann und von de la Roche und Bérard, als feststehend, dass die specifische Wärme der Gase vom Drucke abhängig sei, und der Umstand, dass die neue Theorie zu einem anderen Resultate führte, erregte Misstrauen gegen dieselbe, und wurde u. A. von Holtzmann zu ihrer Bekämpfung benutzt.

Einige Jahre später aber erfolgte die erste Publication der schönen Untersuchungen von Regnault über die specifische Wärme der Gase[1]), bei welchen auch der Einfluss des Druckes und der Temperatur auf die specifische Wärme einer speciellen Prüfung unterworfen ist. Regnault hat die atmosphärische Luft zwischen 1 und 12 Atmosphären und den Wasserstoff zwischen 1 und 9 Atmosphären Druck untersucht, hat aber keinen Unterschied in der specifischen Wärme finden können. Die Temperatur hat er in der Weise geändert, dass er die Untersuchungen zwischen -30^{0} und $+10^{0}$, zwischen 0^{0} und 100^{0} und zwischen 0^{0} und 200^{0} angestellt hat, und auch hierbei hat er die specifische Wärme immer gleich gefunden[2]). Das Resultat seiner Untersuchungen kann also dahin ausgedrückt werden, dass innerhalb der Grenzen von Druck und Temperatur, bis zu welchen seine Beobachtungen reichten, die specifische Wärme der permanenten Gase sich constant zeigte.

Diese directen experimentellen Untersuchungen haben sich freilich nur auf die specifische Wärme bei constantem Drucke bezogen; man wird aber wohl kaum ein Bedenken tragen, dasselbe Resultat nun auch für die andere specifische Wärme, welche sich nach Gleichung (14) von jener nur durch die Constante R unterscheidet, als richtig anzunehmen. Demgemäss wollen wir im Folgenden, wenigstens für die vollkommenen Gase, die beiden specifischen Wärmen als constant behandeln.

Mit Hülfe der Gleichung (14) kann man die drei unter (11), (12) und (13) gegebenen Gleichungen, welche den ersten Haupt-

---

1) *Comptes rendus T. XXXVI, 1853*; später vollständig veröffentlicht im zweiten Bande seiner *Relation des expériences*.

2) Die auf S. 108 des zweiten Bandes der *Rel. des exp.* für atmosphärische Luft angeführten, auf gewöhnliche Wärmeeinheiten bezüglichen Zahlen sind:

zwischen	-30^{0}	und	$+10^{0}$	0·23771
„	0^{0}	„	$+100^{0}$	0·23741
„	0^{0}	„	$+200^{0}$	0·23751,

welche als gleich betrachtet werden können.

satz der mechanischen Wärmetheorie für Gase ausdrücken, auch so umgestalten, dass sie, statt der specifischen Wärme bei constantem Volumen, diejenige bei constantem Drucke enthalten, was vielleicht geeigneter erscheinen kann, weil die letztere, als die durch directe Beobachtungen bestimmte, häufiger angeführt zu werden pflegt, als die erstere. Dann lauten die Gleichungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} dQ = (C_p - R)\,dT + \dfrac{RT}{v}\,dv \\[2ex] dQ = C_p\,dT - \dfrac{RT}{p}\,dp \\[2ex] dQ = \dfrac{C_p - R}{R}\,v\,dp + \dfrac{C_p}{R}\,p\,dv. \end{cases}$$

Endlich kann man auch beide specifische Wärmen in die Gleichungen einführen und dafür die Grösse R eliminiren, wodurch die Gleichungen in Bezug auf p und v symmetrischer werden, nämlich:

$$(16)\qquad \begin{cases} dQ = C_v\,dT + (C_p - C_v)\,\dfrac{T}{v}\,dv \\[2ex] dQ = C_p\,dT + (C_v - C_p)\,\dfrac{T}{p}\,dp \\[2ex] dQ = \dfrac{C_v}{C_p - C_v}\,v\,dp + \dfrac{C_p}{C_p - C_v}\,p\,dv. \end{cases}$$

In den obigen Gleichungen sind die specifischen Wärmen in mechanischen Einheiten ausgedrückt. Will man sie in gewöhnlichen Wärmeeinheiten ausdrücken, so braucht man jene Werthe nur durch das mechanische Aequivalent der Wärme zu dividiren. Bezeichnet man also die in gewöhnlichen Wärmeeinheiten ausgedrückten specifischen Wärmen mit c_v und c_p, so hat man zu setzen:

$$(17)\qquad c_v = \frac{C_v}{E}; \qquad c_p = \frac{C_p}{E}.$$

Unter Anwendung dieser Zeichen geht die Gleichung (14), nachdem man alle Glieder durch E dividirt hat, über in:

$$(18)\qquad c_p = c_v + \frac{R}{E}.$$

§. 5. Verhältniss der beiden specifischen Wärmen und Anwendung desselben zur Berechnung des mechanischen Aequivalentes der Wärme.

Wenn durch irgend ein Gas, z. B. durch die atmosphärische Luft, ein System von Schallwellen sich fortpflanzt, so wird das Gas dabei abwechselnd verdichtet und verdünnt, und die Geschwindigkeit, mit welcher der Schall sich fortpflanzt, hängt, wie schon Newton nachgewiesen hat, davon ab, wie bei diesen Dichtigkeitsänderungen der Druck sich ändert. Für sehr kleine Dichtigkeits- und Druckänderungen dient als Ausdruck der zwischen ihnen stattfindenden Beziehung der Differentialcoefficient des Druckes nach der Dichtigkeit, also, wenn die Dichtigkeit, d. h. das Gewicht der Volumeneinheit, mit ϱ bezeichnet wird, der Differentialcoefficient $\frac{dp}{d\varrho}$. Unter Anwendung desselben erhalten wir für die Schallgeschwindigkeit, welche wir mit u bezeichnen wollen, folgende Gleichung:

$$u = \sqrt{g \frac{dp}{d\varrho}}, \tag{19}$$

worin g die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

Um nun den Werth des Differentialcoefficienten $\frac{dp}{d\varrho}$ zu bestimmen, wandte Newton das Mariotte'sche Gesetz an, nach welchem Druck und Dichtigkeit einander proportional sind. Er setzte also:

$$\frac{p}{\varrho} = \text{Const.},$$

woraus man durch Differentiation erhält:

$$\frac{\varrho dp - p d\varrho}{\varrho^2} = 0,$$

und somit:

$$\frac{dp}{d\varrho} = \frac{p}{\varrho}, \tag{20}$$

wodurch (19) übergeht in:

$$u = \sqrt{g \frac{p}{\varrho}}. \tag{21}$$

Die mit Hülfe dieser Formel berechnete Schallgeschwindigkeit

stimmte aber mit der Erfahrung nicht überein, und der Grund dieser Differenz wurde, nachdem man sehr lange vergeblich danach gesucht hatte, endlich von Laplace aufgefunden.

Das Mariotte'sche Gesetz gilt nämlich nur, wenn die Dichtigkeitsänderung bei constanter Temperatur vor sich geht. Dieses ist aber bei den Schallschwingungen nicht der Fall, sondern bei jeder Verdichtung findet gleichzeitig Erwärmung und bei jeder Verdünnung Abkühlung statt. Demgemäss muss bei der Verdichtung der Druck stärker zunehmen, und bei der Verdünnung der Druck stärker abnehmen, als es nach dem Mariotte'schen Gesetze sein sollte. Es fragt sich nun, wie unter diesen Umständen der Werth des Differentialcoefficienten $\frac{dp}{d\varrho}$ bestimmt werden kann.

Da die Verdichtungen und Verdünnungen sehr schnell wechseln, so kann während einer solchen kurzen Zeit zwischen den verdichteten und verdünnten Theilen des Gases nur ein sehr geringer Wärmeaustausch stattfinden. Vernachlässigt man diesen, so hat man es mit einer Dichtigkeitsänderung zu thun, bei welcher die betreffende Gasmenge keine Wärme von Aussen empfängt oder nach Aussen abgiebt, und man hat also, wenn man die Differentialgleichungen des vorigen Paragraphen auf diesen Fall anwenden will, $dQ = 0$ zu setzen. Thun wir dieses z. B. in der letzten der Gleichungen (16), so lautet sie:

$$\frac{C_v}{C_p - C_v} v dp + \frac{C_p}{C_p - C_v} p dv = 0,$$

oder nach Forthebung des gemeinsamen Nenners:

$$C_v v dp + C_p p dv = 0.$$

Da nun das auf die Gewichtseinheit bezügliche Volumen v der reciproke Werth der Dichtigkeit ist, so können wir setzen:

$$v = \frac{1}{\varrho}, \text{ und daher } dv = -\frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

wodurch die Gleichung übergeht in:

$$C_v \frac{dp}{\varrho} - C_p \frac{p d\varrho}{\varrho^2} = 0,$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\frac{dp}{d\varrho} = \frac{C_p}{C_v} \frac{p}{\varrho}. \tag{22}$$

Dieser Werth des Differentialcoefficienten unterscheidet sich von dem aus dem Mariotte'schen Gesetze abgeleiteten, unter (20)

gegebenen dadurch, dass das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen in ihm als Factor vorkommt. Dieses Verhältniss wollen wir durch einen einfachen Buchstaben bezeichnen, indem wir setzen:

$$k = \frac{C_p}{C_v}, \tag{23}$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$\frac{dp}{d\varrho} = k\frac{p}{\varrho}. \tag{24}$$

Indem wir diesen Werth des Differentialcoëfficienten in die Gleichung (19) einsetzen, erhalten wir statt (21):

$$u = \sqrt{kg\frac{p}{\varrho}}. \tag{25}$$

Mittelst dieser Gleichung kann man, wenn k bekannt ist, die Schallgeschwindigkeit u berechnen. Wenn dagegen die Schallgeschwindigkeit durch Beobachtung bekannt ist, so kann man die Gleichung zur Berechnung von k anwenden, indem man sie umformt in:

$$k = \frac{u^2\varrho}{gp}. \tag{26}$$

Für die atmosphärische Luft ist die Schallgeschwindigkeit mehrfach mit grosser Sorgfalt von verschiedenen Physikern bestimmt, deren Resultate unter einander nahe übereinstimmen. Nach den Versuchen von Bravais und Martins[1]) beträgt die Schallgeschwindigkeit bei der Temperatur des Gefrierpunktes 332·4 m. Diesen Werth wollen wir in die Gleichung (26) einsetzen. Ferner haben wir darin für g den bekannten Werth 9·809 m zu setzen. Bei der Bestimmung des Bruches $\frac{\varrho}{p}$ können wir den Druck p beliebig wählen, müssen aber dann für die Dichtigkeit ϱ den Werth setzen, welcher dem gewählten Drucke entspricht. Wir wollen p als den Druck einer Atmosphäre annehmen. Dieser Druck muss in der Formel durch ein auf einer Flächeneinheit lastendes Gewicht dargestellt werden. Da dieses Gewicht gleich demjenigen eines Quecksilberprismas ist, welches 1 Quadratmeter Grundfläche und 760 mm Höhe und folglich 760 Cubikdecimeter Rauminhalt hat, und da nach Regnault das specifische

---

1) *Ann. de Chim. S. III, t. 13, p. 5* und Pogg. Ann. Bd. 66, S. 351.

Gewicht des Quecksilbers bei 0°, verglichen mit Wasser von 4°, gleich 13·596 ist, so erhalten wir:

$$p = 1 \text{ Atm.} = 760 \,.\, 13{\cdot}596 = 10333.$$

Unter ϱ endlich haben wir das Gewicht eines Cubikmeter Luft unter dem angenommenen Drucke von einer Atmosphäre und bei der Temperatur 0° zu verstehen, welches nach Regnault 1·2932 Kil. beträgt. Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (26) erhalten wir:

$$k = \frac{(332{\cdot}4)^2 \,.\, 1{\cdot}2932}{9{\cdot}809 \,.\, 10333} = 1{\cdot}410.$$

Nachdem diese Grösse k für die atmosphärische Luft bestimmt ist, können wir die Gleichung (18) dazu benutzen, die Grösse E, d. h. das *mechanische Aequivalent der Wärme*, zu berechnen, wie es zuerst von Mayer geschehen ist. Aus (18) folgt nämlich:

$$E = \frac{R}{c_p - c_v},$$

und wenn man hierin für den Bruch $\frac{c_p}{c_v}$, welcher derselbe ist wie $\frac{C_p}{C_v}$, wieder den Buchstaben k anwendet, und demgemäss c_v durch $\frac{c_p}{k}$ ersetzt, so kommt:

$$E = \frac{kR}{(k-1)\,c_p}. \tag{27}$$

Hierin setzen wir für k den oben gefundenen Werth 1·410, und für c_p nach Regnault den Werth 0·2375. Es bleibt also nur noch die Grösse $R = \frac{p_0 v_0}{a}$ zu bestimmen. Dabei nehmen wir p_0 wieder als den Druck einer Atmosphäre an, welcher dem Obigen nach durch die Zahl 10333 auszudrücken ist, und haben dann unter v_0 das nach Cubikmeter gemessene Volumen von 1 Kil. Luft unter dem genannten Drucke und bei der Temperatur 0° zu verstehen, welches nach Regnault 0·7733 beträgt. Die Grösse a endlich haben wir schon früher zu 273 angenommen. Demnach wird R für atmosphärische Luft bestimmt durch die Gleichung:

$$R = \frac{10333 \,.\, 0{\cdot}7733}{273} = 29{,}27.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe von k, c_p und R in die Gleichung (27) erhalten wir:

$$E = \frac{1{\cdot}410 \;.\; 29{\cdot}27}{0{\cdot}410 \;.\; 0{\cdot}2375} = 423{\cdot}8.$$

Diese Zahl stimmt mit der von Joule durch Reibung des Wassers gefundenen Zahl 423·55 fast genau überein. Man muss sogar sagen, dass die Uebereinstimmung grösser ist, als man nach dem Grade der Zuverlässigkeit der zur Rechnung angewandten Data erwarten durfte, so dass auch der Zufall etwas dabei mitgewirkt haben muss. Immerhin aber bildet diese Uebereinstimmung eine augenfällige Bestätigung der für die Gase aufgestellten Gleichungen.

§. 6. Verschiedene auf die specifischen Wärmen der Gase bezügliche Formeln.

Nimmt man in der Gleichung (18) die Grösse E als bekannt an, so kann man die Gleichung dazu anwenden, aus der durch Beobachtung bestimmten specifischen Wärme bei constantem Drucke diejenige bei constantem Volumen zu berechnen. Diese Anwendung ist von besonderer Wichtigkeit, weil das Verfahren, das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen aus der Schallgeschwindigkeit abzuleiten, nur für wenige Gase ausführbar ist, indem die Schallgeschwindigkeit nur für eine geringe Anzahl von Gasen durch Beobachtung bestimmt ist. Für alle anderen Gase liefert die Gleichung (18) das einzige bis jetzt vorhandene Mittel, die specifische Wärme bei constantem Volumen aus derjenigen bei constantem Drucke zu berechnen.

Dabei ist nun freilich zu bemerken, dass die Gleichung (18) nur für *vollkommene* Gase streng richtig ist; indessen liefert sie für die anderen Gase wenigstens angenäherte Resultate. Auch ist der Umstand in Betracht zu ziehen, dass die Beobachtung der specifischen Wärme eines Gases bei constantem Drucke um so schwieriger und demgemäss die betreffende Beobachtungszahl um so weniger zuverlässig ist, je weniger permanent das Gas ist, und je mehr es daher in seinem Verhalten von den Gesetzen eines vollkommenen Gases abweicht; und man kann daher, da man von der Rechnung keine grössere Genauigkeit zu verlangen braucht, als die Beobachtungszahlen möglicher Weise besitzen, die angewandte Rechnungsweise als für den Zweck vollkommen genügend betrachten.

Wir schreiben die Gleichung zunächst in der Form:

$$c_v = c_p - \frac{R}{E}. \tag{28}$$

Für E wenden wir hierin den Werth 423·55 an. Die Grösse R ist bestimmt durch die Gleichung (4), nämlich:

$$R = \frac{p_0 v_0}{a},$$

welche sich auf die Temperatur des Gefrierpunktes bezieht. Sollte aber ein Gas sich bei dieser Temperatur nicht gut beobachten lassen, was bei vielen Dämpfen der Fall ist, so kann man auch, in Folge von (6), schreiben:

$$R = \frac{pv}{T}, \tag{29}$$

worin p, v und T irgend drei zusammengehörige Werthe von Druck, Volumen und absoluter Temperatur sind.

Diese Grösse R ist, wie früher schon gelegentlich erwähnt wurde, von der Natur des Gases nur insofern abhängig, als sie dem specifischen Gewichte desselben umgekehrt proportional ist. Bezeichnen wir nämlich das Volumen einer Gewichtseinheit atmosphärischer Luft bei der Temperatur T und unter dem Drucke p mit v', und den auf atmosphärische Luft bezüglichen Werth von R mit R', so ist:

$$R' = \frac{pv'}{T}.$$

Vereinigen wir diese Gleichung mit der vorigen, so erhalten wir:

$$R = R' \frac{v}{v'}.$$

Der Bruch $\frac{v}{v'}$ ist aber, wie leicht zu sehen, der reciproke Werth des specifischen Gewichtes des betreffenden Gases, verglichen mit atmosphärischer Luft. Bezeichnen wir dieses specifische Gewicht mit d, so geht die letzte Gleichung über in:

$$R = \frac{R'}{d}. \tag{30}$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von R in (28) erhält man:

$$c_v = c_p - \frac{R'}{Ed}. \tag{31}$$

Der hierin mit R' bezeichnete, auf die atmosphärische Luft bezügliche Werth der Grösse R ist schon in §. 5 berechnet, und zu 29·27 gefunden. Daraus ergiebt sich weiter:

$$\frac{R'}{E} = \frac{29{\cdot}27}{423{\cdot}55} = 0{\cdot}0691,$$

wodurch die zur Bestimmung der specifischen Wärme bei constantem Volumen dienende Gleichung folgende sehr einfache Form annimmt:

$$(32) \qquad c_v = c_p - \frac{0{\cdot}0691}{d}.$$

Wenn wir diese Gleichung zunächst auf die atmosphärische Luft, für welche $d = 1$ zu setzen ist, anwenden, und dabei die auf die Luft bezüglichen Zeichen der specifischen Wärmen zur Unterscheidung mit Accenten versehen, so kommt:

$$(33) \qquad c_v' = c_p' - 0{\cdot}0691,$$

und, wenn wir hierin für c_p' nach Regnault die Zahl 0·2375 setzen, so erhalten wir das Resultat:

$$(34) \qquad c_v' = 0{\cdot}2375 - 0{\cdot}0691 = 0{\cdot}1684.$$

Für die anderen Gase wollen wir der Gleichung noch folgende Form geben:

$$(35) \qquad c_v = \frac{c_p d - 0{\cdot}0691}{d},$$

welche, wie wir später sehen werden, bei der Anwendung der von Regnault für die specifische Wärme bei constantem Drucke gegebenen Werthe besonders bequem ist.

Die mit c_p und c_v bezeichneten specifischen Wärmen beziehen sich auf eine Gewichtseinheit des Gases, und haben als Einheit die gewöhnliche Wärmeeinheit, nämlich die Wärmemenge, welche eine Gewichtseinheit Wasser zur Erwärmung von 0° bis 1° bedarf. Man kann also sagen: das Gas ist in Bezug auf die Wärme, welche es entweder bei constantem Drucke oder bei constantem Volumen zur Erwärmung bedarf, *dem Gewichte nach mit Wasser verglichen.*

Es ist aber bei Gasen gebräuchlicher, *sie dem Volumen nach mit Luft zu vergleichen*, d. h. die specifische Wärme so zu bestimmen, dass man die Wärmemenge, welche das Gas zur Erwärmung um einen Grad bedarf, vergleicht mit der Wärmemenge, welche ein gleiches Volumen Luft, bei gleicher Temperatur und unter gleichem Drucke genommen, zu derselben Erwärmung bedarf. Diese Art der Vergleichung wendet man bei beiden specifischen Wärmen an, indem man bei der einen annimmt, dass sowohl das betrachtete Gas, als auch die atmosphärische Luft bei constantem Drucke erwärmt wird, und bei der anderen annimmt, dass beide

bei constantem Volumen erwärmt werden. Die so bestimmten specifischen Wärmen mögen durch γ_p und γ_v bezeichnet werden.

Da wir das Volumen, welches eine Gewichtseinheit des Gases bei gegebener Temperatur und unter gegebenem Drucke einnimmt, mit v bezeichnen, so wird die Wärmemenge, welche eine Volumeneinheit des Gases bei constantem Drucke zur Erwärmung um einen Grad bedarf, durch $\frac{c_p}{v}$ dargestellt, und für die atmosphärische Luft wird die entsprechende Grösse durch $\frac{c'_p}{v'}$ dargestellt. Durch Division dieser beiden Grössen entsteht γ_p, und es ist somit zu setzen:

$$(36)\qquad \gamma_p = \frac{c_p}{v}\,\frac{v'}{c'_p} = \frac{c_p}{c'_p}\,\frac{v'}{v} = \frac{c_p}{c'_p}\,d.$$

Ebenso erhält man:

$$(37)\qquad \gamma_v = \frac{c_v}{c'_v}\,d.$$

In der ersten dieser beiden Gleichungen bringen wir nun für c'_p den von **Regnault** gefundenen Werth 0·2375 in Anwendung, so dass sie lautet:

$$(38)\qquad \gamma_p = \frac{c_p d}{0{\cdot}2375}.$$

In der zweiten setzen wir für c'_v gemäss (34) den Werth 0·1684, und für c_v den in (35) gegebenen Ausdruck, wodurch entsteht:

$$(39)\qquad \gamma_v = \frac{c_p d - 0{\cdot}0691}{0{\cdot}1684}.$$

§. 7. Numerische Berechnung der specifischen Wärme bei constantem Volumen.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln habe ich angewandt, um aus den Werthen, welche **Regnault** durch seine Beobachtungen bei einer grossen Anzahl von Gasen und Dämpfen für die specifische Wärme bei constantem Drucke gefunden hat, die entsprechenden Werthe der specifischen Wärme bei constantem Volumen zu berechnen.

Dabei habe ich auch eine der beiden von **Regnault** selbst gegebenen Zahlenreihen etwas umgerechnet. **Regnault** hat nämlich die specifische Wärme bei constantem Drucke in zwei verschiedenen Weisen ausgedrückt, und die betreffenden Zahlen in zwei Reihen zusammengestellt, welche er „*en poids*“ und „*en volume*“ überschrieben hat. Die *erste* Reihe enthält die Werthe, welche

entstehen, wenn man die Gase in Bezug auf die zu ihrer Erwärmung nöthigen Wärmemengen dem Gewichte nach mit Wasser vergleicht, also die Werthe der oben mit c_p bezeichneten Grösse. Die Zahlen der *zweiten* Reihe sind aus denen der ersten einfach durch Multiplication mit den zugehörigen specifischen Gewichten abgeleitet, es sind also die Werthe des Productes $c_p d$.

Diese letzteren Zahlen waren freilich die, welche sich aus den beobachteten Werthen von c_p am leichtesten berechnen liessen, aber ihre Bedeutung ist ziemlich complicirt. Als Einheit der Wärmemenge dient bei ihnen die gewöhnliche Wärmeeinheit, während das Volumen, auf welches sie sich beziehen, dasjenige ist, welches eine Gewichtseinheit atmosphärischer Luft einnimmt, wenn sie sich bei derselben Temperatur und unter demselben Drucke befindet, wie das betrachtete Gas. Diese Weitläufigkeit des wörtlichen Ausdruckes macht die Zahlen für die Auffassung und Anwendung unbequem; auch ist diese Art, die specifische Wärme der Gase auszudrücken, so viel ich weiss, vor Regnault von Niemand angewandt. Wenn man die Gase dem Volumen nach betrachtete, so pflegte man dieses sonst immer in der Weise zu thun, dass man die Wärmemenge, welche ein gegebenes Volumen eines Gases zur Erwärmung bedarf, mit der Wärmemenge verglich, welche ein gleiches Volumen atmosphärischer Luft unter gleichen Umständen zur gleichen Erwärmung bedarf, was wir oben kurz so ausgedrückt haben, dass die Gase *dem Volumen nach mit Luft verglichen* werden. Die dadurch gewonnenen Zahlen zeichnen sich durch ihre Einfachheit aus, und lassen die bei den specifischen Wärmen der Gase bestehenden Gesetzmässigkeiten besonders deutlich hervortreten.

Es wird daher, wie ich glaube, gerechtfertigt erscheinen, dass ich aus den von Regnault unter der Ueberschrift „*en volume*" gegebenen Werthen des Productes $c_p d$ die Werthe der oben besprochenen Grösse γ_p berechnet habe, wozu nach (38) nur nöthig war, die Werthe von $c_p d$ durch 0·2375 zu dividiren.

Ferner habe ich die Werthe der Grössen c_v und γ_v berechnet, was nach den Gleichungen (35) und (39) sehr einfach dadurch geschehen konnte, dass von den Werthen des Productes $c_p d$ die Zahl 0·0691 abgezogen und die Differenz entweder durch d oder durch 0·1684 dividirt wurde.

Die so berechneten Zahlen habe ich in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt, in welcher die einzelnen Columnen folgende Bedeutungen haben.

Columne I. Die *Namen* der Gase.

Columne II. Die *chemische Zusammensetzung*, und zwar in der Weise ausgedrückt, dass daraus unmittelbar die bei der Verbindung eingetretene Volumenverminderung zu ersehen ist. Es sind nämlich jedesmal diejenigen Volumina der einfachen Gase angegeben, welche sich verbinden müssen, um *zwei* Volumina des zusammengesetzten Gases zu geben. Dabei ist für Kohlengas das hypothetische Volumen vorausgesetzt, welches man annehmen muss, um sagen zu können: ein Volumen Kohlengas verbindet sich mit einem Volumen Sauerstoff zu Kohlenoxydgas und mit zwei Volumen Sauerstoff zu Kohlensäure. Wenn hiernach in der Tabelle z. B. Alkohol bezeichnet ist: C_2H_6O, so soll das heissen: 2 Vol. hypothetisches Kohlengas, 6 Vol. Wasserstoff und 1 Vol. Sauerstoff geben 2 Vol. Alkoholdampf. Bei Schwefelgas ist zur Bestimmung des Volumens dasjenige specifische Gewicht als maassgebend betrachtet, welches Sainte-Claire Deville und Troost bei sehr hohen Temperaturen gefunden haben, nämlich 2·23. Bei den fünf letzten Verbindungen der Tabelle, welche Kiesel, Phosphor, Arsen, Titan und Zinn enthalten, sind für diese einfachen Stoffe ihre gewöhnlichen chemischen Zeichen, ohne Rücksicht auf ihre Volumina im gasförmigen Zustande, hingeschrieben, weil die Gasvolumina dieser Stoffe theils noch unbekannt, theils mit gewissen noch nicht hinlänglich aufgeklärten Unregelmässigkeiten behaftet sind.

Columne III. Die *Dichtigkeit* der Gase, und zwar die von Regnault angeführten Zahlen.

Columne IV. Die *specifische Wärme bei constantem Drucke dem Gewichte nach verglichen mit Wasser*, oder, was dasselbe ist, bezogen auf eine Gewichtseinheit der Gase und ausgedrückt in gewöhnlichen Wärmeeinheiten. Dieses sind die Zahlen, welche Regnault unter der Rubrik „*en poids*“ gegeben hat.

Columne V. Die *specifische Wärme bei constantem Drucke dem Volumen nach verglichen mit Luft*, dadurch berechnet, dass die von Regnault unter der Rubrik „*en volume*“ gegebenen Zahlen durch 0·2375 dividirt sind.

Columne VI. Die *specifische Wärme bei constantem Volumen dem Gewichte nach verglichen mit Wasser*, nach Gleichung (35) berechnet.

Columne VII. Die *specifische Wärme bei constantem Volumen dem Volumen nach verglichen mit Luft*, nach Gleichung (39) berechnet.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII
			Specif. Wärme bei constantem Drucke		Specif. Wärme b constantem Volu	
Namen der Gase	Chemische Zusammensetzung	Dichtigkeit	dem Gewichte nach verglichen mit Wasser	dem Volumen nach verglichen mit Luft	dem Gewichte nach verglichen mit Wasser	dem V lum nach v glich mit L
Atmosphärische Luft		1	0·2375	1	0·1684	1
Sauerstoff	O_2	1·1056	0·21751	1·013	0·1551	1·01
Stickstoff	N_2	0·9713	0·24380	0·997	0·1727	0·99
Wasserstoff	H_2	0·0692	3·40900	0·993	2·411	0·99
Chlor	Cl_2	2·4502	0·12099	1·248	0·0928	1·35
Brom	Br_2	5·4772	0·05552	1·280	0·0429	1·39
Stickstoffoxyd	NO	1·0384	0·2317	1·013	0·1652	1·01
Kohlenoxyd	CO	0·9673	0·2450	0·998	0·1736	0·99
Chlorwasserstoff	HCl	1·2596	0·1852	0·982	0·1304	0·97
Kohlensäure	CO_2	1·5201	0·2169	1·39	0·172	1·55
Stickstoffoxydul	N_2O	1·5241	0·2262	1·45	0·181	1·64
Wasserdampf	H_2O	0·6219	0·4805	1·26	0·370	1·36
Schweflige Säure	SO_2	2·2113	0·1544	1·44	0·123	1·62
Schwefelwasserstoff	H_2S	1·1747	0·2432	1·20	0·184	1·29
Schwefelkohlenstoff	CS_2	2·6258	0·1569	1·74	0·131	2·04
Grubengas	CH_4	0·5527	0·5929	1·38	0·468	1·54
Chloroform	$CHCl_3$	4·1244	0·1567	2·72	0·140	3·43
Oelbildendes Gas	C_2H_4	0·9672	0·4040	1·75	0·359	2·06
Ammoniak	NH_3	0·5894	0·5084	1·26	0·391	1·37
Benzin	C_6H_6	2·6942	0·3754	4·26	0·350	5·60
Terpentinöl	$C_{10}H_{16}$	4·6978	0·5061	10·01	0·491	13·71
Holzgeist	CH_4O	1·1055	0·4580	2·13	0·395	2·60
Alkohol	C_2H_6O	1·5890	0·4534	3·03	0·410	3·87
Aether	$C_4H_{10}O$	2·5573	0·4797	5·16	0·453	6·87
Schwefeläthyl	$C_4H_{10}S$	3·1101	0·4008	5·25	0·379	6·99
Chloräthyl	C_2H_5Cl	2·2269	0·2738	2·57	0·243	3·21
Bromäthyl	C_2H_5Br	3·7058	0·1896	2·96	0·171	3·76
Holländische Flüssigkeit	$C_2H_4Cl_2$	3·4174	0·2293	3·30	0·209	4·24
Aceton	C_3H_6O	2·0036	0·4125	3·48	0·378	4·50
Essigäther	$C_4H_8O_2$	3·0400	0·4008	5·13	0·378	6·82
Kieselchlorür	$SiCl_3$	5·8833	0·1322	3·27	0·120	4·21
Phosphorchlorür	PCl_3	4·7464	0·1347	2·69	0·120	3·39
Arsenchlorür	$AsCl_3$	6·2667	0·1122	2·96	0·101	3·77
Titanchlorid	$TiCl_4$	6·6402	0·1290	3·61	0·119	4·67
Zinnchlorid	$SnCl_4$	8·9654	0·0939	3·54	0·086	4·59

§. 8. Integration der Differentialgleichungen, welche den ersten Hauptsatz für Gase ausdrücken.

Die in den §§. 3 und 4 aufgestellten Differentialgleichungen, welche in verschiedenen Formen den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie für Gase ausdrücken, sind, wie man an jeder einzelnen leicht erkennen kann, *nicht unmittelbar integrabel*, und sie müssen daher so behandelt werden, wie es in §. 3 der Einleitung auseinandergesetzt ist.

Die Integration lässt sich nämlich ausführen, sobald die in der betreffenden Gleichung vorkommenden Veränderlichen einer Bedingung unterworfen werden, wodurch der Weg der Veränderung bestimmt wird. Wir wollen in dieser Weise hier nur zwei sehr einfache Beispiele behandeln, deren Resultate für die weiteren Untersuchungen von Wichtigkeit sind.

1) Das Gas soll bei *constantem Drucke* sein Volumen ändern, und die dazu nöthige Wärmemenge soll bestimmt werden.

Für diesen Fall wählen wir aus den obigen Gleichungen eine solche aus, welche p und v als unabhängige Veränderliche enthält, z. B. die letzte der Gleichungen (15), nämlich:

$$dQ = \frac{C_p - R}{R} v dp + \frac{C_p}{R} p dv.$$

Da nun der Druck p constant sein soll, so setzen wir $p = p_1$ und $dp = 0$, wodurch die Gleichung übergeht in:

$$dQ = \frac{C_p}{R} p_1 dv,$$

und diese giebt durch Integration, wenn wir den Anfangswerth von v mit v_1 bezeichnen:

$$Q = \frac{C_p}{R} p_1 (v - v_1). \tag{40}$$

2) Das Gas soll *bei constanter Temperatur* sein Volumen ändern, und die dazu nöthige Wärmemenge soll bestimmt werden.

Für diesen Fall wählen wir eine Gleichung, welche T und v als unabhängige Veränderliche enthält, z. B. die Gleichung (11), nämlich:

$$dQ = C_v dT + \frac{RT}{v} dv.$$

Da T constant sein soll, so setzen wir $T = T_1$ und $dT = 0$, wodurch entsteht:

$$dQ = R T_1 \frac{dv}{v}.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir:

$$Q = R T_1 \log \frac{v}{v_1}, \tag{41}$$

worin unter *log* der natürliche Logarithmus verstanden wird. Hieraus folgt zunächst der Satz: *wenn ein Gas ohne Temperaturänderung sein Volumen ändert, so stehen die von ihm aufgenommenen oder abgegebenen Wärmemengen in arithmetischer Reihe, während die Volumina eine geometrische Reihe bilden.*

Wenn man ferner für R den Bruch $\frac{p_1 v_1}{T_1}$ setzt, so kommt:

$$Q = p_1 v_1 \log \frac{v}{v_1}. \tag{42}$$

Fasst man diese Gleichung in dem Sinne auf, dass man sie nicht gerade auf eine Gewichtseinheit des Gases bezieht, sondern auf eine solche Menge desselben, welche unter dem Drucke p_1 ein gegebenes Volumen v_1 einnimmt, und dann dieses Volumen bei constanter Temperatur bis v ändert, so enthält die Gleichung nichts, was sich auf die besondere Natur des Gases bezieht. Die aufgenommene Wärmemenge ist also *von der Natur des Gases unabhängig.* Auch von der Temperatur hängt sie nicht ab, sondern nur vom Drucke, indem sie *dem anfänglichen Drucke proportional* ist.

Eine andere Anwendung der in den §§. 3 und 4 aufgestellten Differentialgleichungen besteht darin, dass über die dem Gase während seiner Zustandsänderung mitzutheilende Wärme eine Annahme gemacht und dann untersucht wird, welchen Verlauf unter diesen Umständen die Zustandsänderung nehmen muss.

Die einfachste und zugleich wichtigste Annahme dieser Art ist die, *dass dem Gase während der Veränderung gar keine Wärme mitgetheilt oder entzogen wird.* Man kann sich dazu vorstellen, das Gas befinde sich in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle, oder die Veränderung gehe so schnell vor sich, dass in der kurzen Zeit keine merkliche Wärmemenge zu- oder abströmen könne.

Dieser Annahme entsprechend haben wir $dQ = 0$ zu setzen, was wir in den drei unter (16) gegebenen Gleichungen thun wollen.

Die *erste* dieser Gleichungen lautet dann:

$$C_v dT + (C_p - C_v)\frac{T}{v}dv = 0.$$

Diese Gleichung wollen wir durch T und C_v dividiren, und dann den Bruch $\frac{C_p}{C_v}$, wie oben, mit k bezeichnen, wodurch sie übergeht in:

$$\frac{dT}{T} + (k-1)\frac{dv}{v} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$log\ T + (k-1)\ log\ v = \text{Const.},$$

oder:

$$Tv^{k-1} = \text{Const.}$$

Bezeichnen wir die Anfangswerthe von T und v mit T_1 und v_1 und eliminiren dann die unbestimmte Constante, so kommt:

$$(43) \qquad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{k-1}$$

Wendet man diese Gleichung z. B. auf atmosphärische Luft an, und setzt dabei $k = 1{\cdot}410$, so kann man leicht die Temperaturänderung, welche irgend einer Volumenänderung entspricht, berechnen. Nimmt man z. B. an, es sei bei der Temperatur des Gefrierpunktes unter einem beliebigen Drucke eine Quantität Luft genommen, und sei in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle oder sehr schnell auf die Hälfte ihres Volumens zusammengedrückt, so hat man $T_1 = 273$ und $\frac{v_1}{v} = 2$ zu setzen, und es kommt also:

$$\frac{T}{273} = 2^{0{\cdot}410} = 1{\cdot}329,$$

woraus folgt:

$$T = 273\ .\ 1{\cdot}329 = 363,$$

oder, wenn t die vom Gefrierpunkte an gezählte Temperatur bedeutet:

$$t = T - 273 = 90^0.$$

Wenn man dieselbe Rechnung für die Zusammendrückungen auf $^1/_4$ und $^1/_{10}$ des ursprünglichen Volumens ausführt, so erhält man die Resultate, welche mit dem vorigen vereint in der nachstehenden kleinen Tabelle zusammengestellt sind:

$\frac{v}{v_1}$	$1/2$	$1/4$	$1/10$
$\frac{T}{273}$	1·329	1·765	2·570
T	363	482	702
t	90°	209°	429°

Setzt man in der *zweiten* der Gleichungen (16) $dQ = 0$, so kommt:

$$C_p dT + (C_v - C_p)\frac{T}{p}dp = 0.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form, wie die vorher behandelte, nur dass p an die Stelle von v getreten ist und die Grössen C_v und C_p vertauscht sind. Man muss also in ganz entsprechender Weise erhalten:

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{k}-1}$$

woraus folgt:

(44) $$\left(\frac{T}{T_1}\right)^k = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{k-1}$$

Die *letzte* der Gleichungen (16) endlich geht, wenn $dQ = 0$ gesetzt wird, in die schon in §. 5 angewandte Gleichung

$$\frac{C_v}{C_p - C_v} v\,dp + \frac{C_p}{C_p - C_v} p\,dv = 0$$

über, welche sich umformen lässt in:

$$\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0$$

und durch Integration giebt:

(45) $$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^k.$$

§. 9. Bestimmung der äusseren Arbeit bei Volumenänderungen eines Gases.

Eine Grösse, welche bei der Ausdehnung der Gase noch speciell beachtet zu werden verdient, ist die dabei geleistete *äussere Arbeit*, deren Element durch die Gleichung (6) des vorigen Abschnittes bestimmt wird, nämlich:

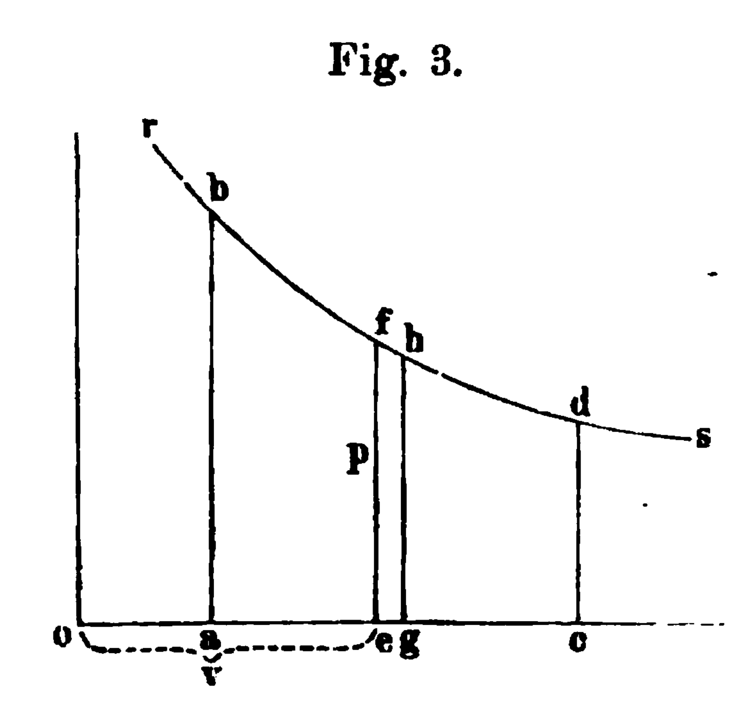
$$dW = p\,dv.$$

Diese Arbeit lässt sich in sehr anschaulicher Weise graphisch darstellen. Wir führen dazu ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Abscisse das Volumen v und dessen Ordinate den Druck p bedeutet. Denkt man sich nun, dass p durch irgend eine Function von v ausgedrückt sei, nämlich:

$$p = f(v),$$

so ist diese Gleichung die Gleichung einer Curve, deren Ordinaten die zu den verschiedenen Werthen von v gehörigen Werthe von p darstellen, und welche wir kurz die *Druckcurve* nennen wollen.

Fig. 3.



In Fig. 3 möge rs diese Curve sein, so dass, wenn oe das in einem gewissen Momente stattfindende Volumen v bedeutet, dann die in e errichtete Ordinate ef den gleichzeitig stattfindenden Druck p darstellt. Bedeutet ferner die als unendlich klein angenommene Strecke eg ein Volumenelement dv, und wird in g ebenfalls die Ordinate gh errichtet, so entsteht dadurch ein unendlich schmales Paralleltrapez $efhg$, dessen Flächeninhalt die bei der unendlich kleinen Ausdehnung geleistete äussere Arbeit darstellt, und von dem Producte pdv nur um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung, welches vernachlässigt werden kann, abweicht. Dasselbe gilt von jeder anderen unendlich kleinen Ausdehnung, und man sieht daraus, dass bei einer endlichen Ausdehnung, von dem durch die Abscisse oa repräsentirten Volumen v_1 bis zu dem durch oc repräsentirten Volumen v_2, die äussere Arbeit, für welche die Gleichung

$$W = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv \tag{46}$$

gilt, durch den Flächeninhalt des Vierecks $abdc$ dargestellt wird, welches durch das Abscissenstück ac, die beiden Ordinaten ab und cd und das Curvenstück bd begrenzt wird.

Um nun die in der vorstehenden Gleichung angedeutete Integration wirklich ausführen zu können, muss die Function von v, durch welche der Druck p bestimmt wird, bekannt sein. In dieser

Beziehung wollen wir die oben schon betrachteten Fälle als Beispiele wählen.

Wir nehmen zunächst an, *der Druck p sei constant.* Dann ist die Druckcurve eine der Abscissenaxe parallele Gerade, und das Viereck *abdc* ist somit ein Rechteck (Fig. 4), dessen Flächeninhalt

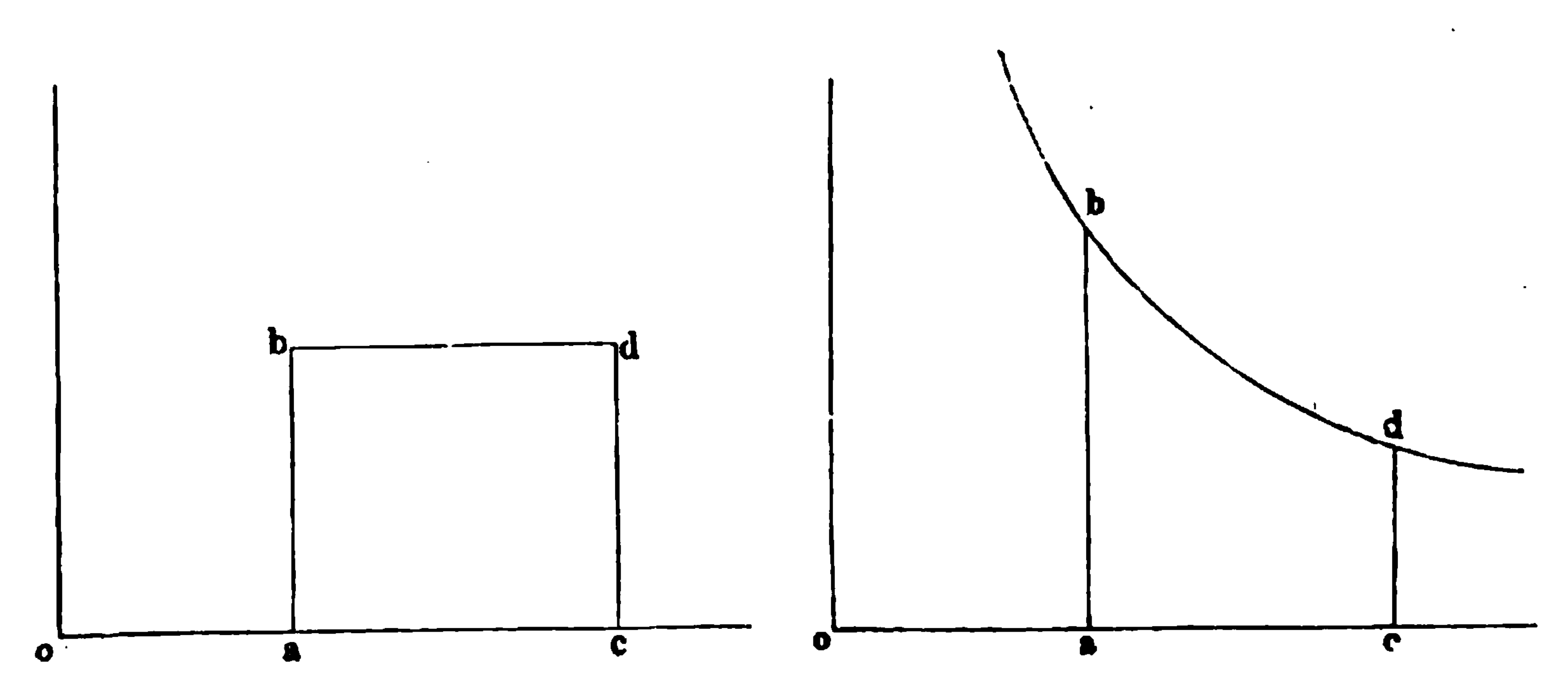


Fig. 4. Fig. 5.

gleich dem Producte aus den Strecken *ac* und *ab* ist, und dementsprechend erhält man aus (46), wenn der constante Druck mit p_1 bezeichnet wird:

$$W = p_1 (v_2 - v_1). \tag{47}$$

Die zweite Annahme möge sein, *dass bei der Ausdehnung des Gases die Temperatur constant bleibe.* Dann gilt für die Beziehung zwischen Druck und Volumen das Mariotte'sche Gesetz, welches durch die Gleichung

$$pv = \text{Const.}$$

ausgedrückt wird. Aus der Form dieser Gleichung sieht man, dass die Druckcurve für diesen Fall eine gleichseitige Hyperbel (Fig. 5) ist, welche die Coordinatenaxen zu Asymptoten hat. Eine Druckcurve solcher Art, welche der speciellen Bedingung, *dass die Temperatur constant sei*, entspricht, pflegt man eine *isothermische* Curve zu nennen.

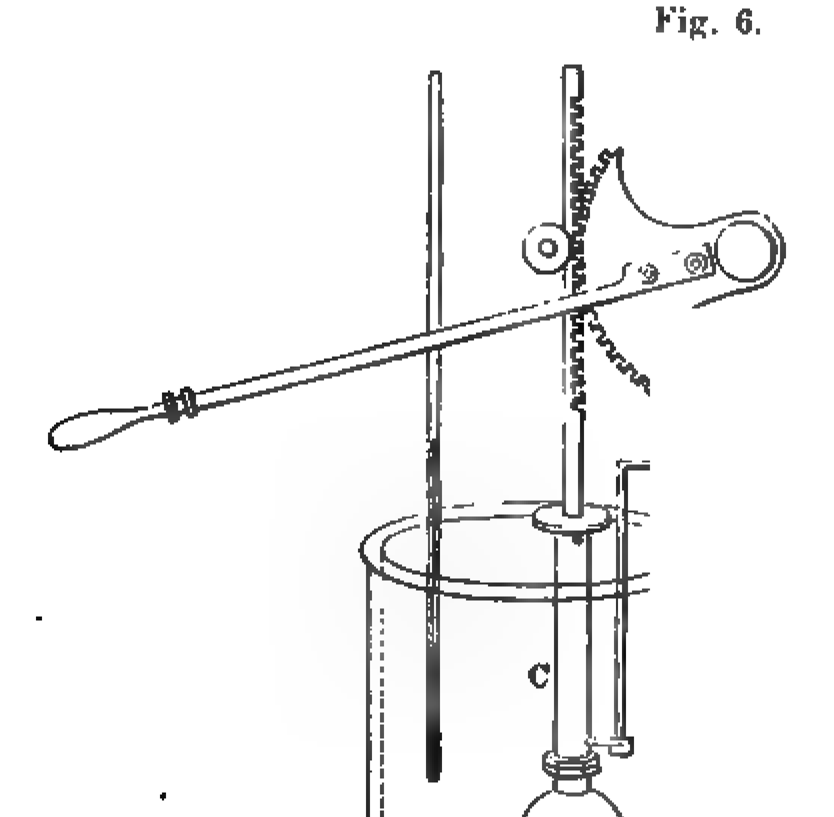
Zur Ausführung der Integration wenden wir, gemäss der vorigen Gleichung, in welcher wir noch die Constante durch das Product $p_1 v_1$ ersetzen, für p den Werth $\frac{p_1 v_1}{v}$ an, und erhalten dann aus (46):

$$W = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \log \frac{v_2}{v_1}. \tag{48}$$

Man sieht, dass dieser Werth von W mit dem unter (42) für Q gegebenen übereinstimmt, was darin seinen Grund hat, dass das Gas während einer bei constanter Temperatur stattfindenden Ausdehnung nur so viel Wärme aufnimmt, wie zu äusserer Arbeit verbraucht wird.

Die Gleichung (48) hat Joule bei einer seiner Bestimmungen des mechanischen Aequivalentes der Wärme angewandt. Er pumpte nämlich in einen festen Recipienten atmosphärische Luft bis zur zehnfachen oder zwanzigfachen Verdichtung ein. Dabei befand sich der Recipient und die Pumpe unter Wasser, so dass alle Wärme, welche beim Pumpen erzeugt wurde, in dem Wasser gemessen werden konnte. Der dabei angewandte Apparat ist in Fig. 6 abgebildet, in welcher R der Recipient und C die Pumpe

Fig. 6.



ist. Das Gefäss G diente, wie man leicht sieht, zum Austrocknen der Luft und das mit dem Spiralrohr versehene Gefäss W dazu, der Luft vor ihrem Eintritte in die Pumpe eine genau bekannte

Temperatur zu geben. Von der im Calorimeter gemessenen Wärmemenge zog Joule den Theil ab, welcher nur durch die Reibung der Pumpe erzeugt war, und welchen er dadurch bestimmte, dass er die Pumpe eine ebenso lange Zeit unter demselben mittleren Drucke aber ohne Zutritt von äusserer Luft bewegte, und die dadurch entstehende Wärme beobachtete. Den nach Abzug derselben bleibenden Rest betrachtete er als die durch die Compression der Luft erzeugte Wärme, und diese verglich er mit der nach der Gleichung (48) berechneten, zur Compression verbrauchten Arbeit. Daraus ergab sich als Mittel von zwei Versuchsreihen der Werth 444 Kilogrammeter für das mechanische Aequivalent der Wärme.

Dieser Werth stimmt freilich mit dem durch Reibung des Wassers gefundenen Werthe 424 nicht ganz überein, was seinen Grund wohl in den grösseren Fehlerquellen bei den mit der Luft angestellten Versuchen hat. Immerhin war aber zu jener Zeit, wo der Satz, dass die zur Erzeugung einer gewissen Wärmemenge nöthige Arbeit unter allen Umständen gleich ist, noch nicht feststand, die Uebereinstimmung der auf ganz verschiedene Weisen gefundenen Werthe gross genug, um zur Bestätigung des Satzes mit beizutragen.

Die dritte Annahme zur Bestimmung der Arbeit möge sein, *dass das Gas in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle sein Volumen ändere*, oder, was auf dasselbe hinauskommt, *dass die Volumenänderung so schnell vor sich gehe, dass während der Zeit kein merkliches Zu- oder Abströmen von Wärme stattfinden könne.*

In diesem Falle wird die Beziehung zwischen Druck und Volumen durch die unter (45) gegebene Gleichung

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^k$$

ausgedrückt. Die dieser Gleichung entsprechende Druckcurve (Fig. 7) fällt steiler ab, als die in Fig. 5 dargestellte. Rankine hat die specielle Art von Druckcurven, welche der *Ausdehnung in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle* entspricht (von διαβαίνειν, hindurchgehen), *adiabatische* Curven genannt. Gibbs dagegen hat vorgeschlagen (Trans. of the Connecticut Acad. Vol. II, p. 309),

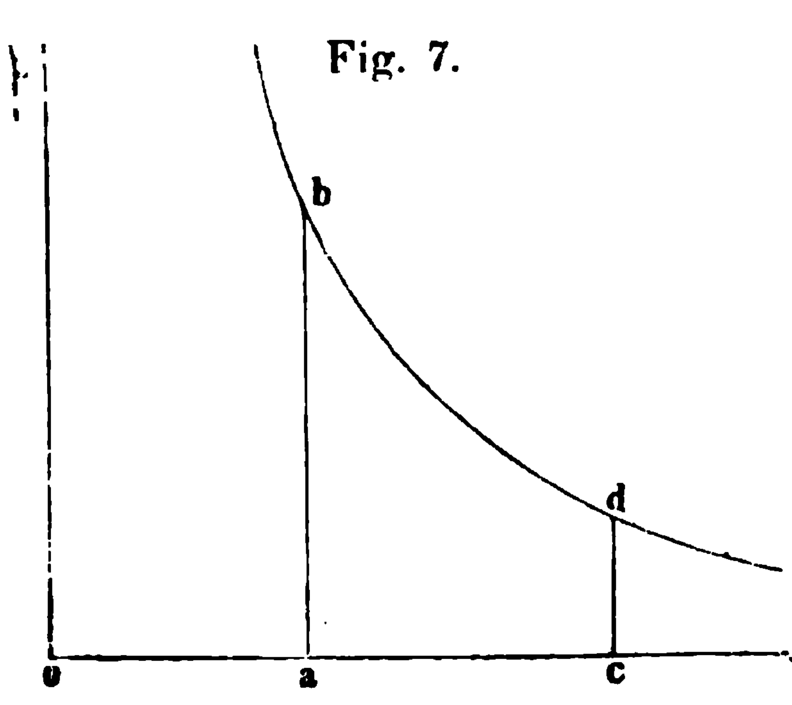


Fig. 7.

sie *isentropische* Curven zu nennen, weil bei dieser Ausdehnung die *Entropie*, eine Grösse, von der weiter unten die Rede sein wird, constant bleibt. Dieser Benennungsweise will ich mich anschliessen, weil es sehr zweckmässig und auch allgemein üblich ist, derartige Curven nach derjenigen Grösse zu benennen, welche bei dem betreffenden Vorgange constant bleibt.

Um in diesem Falle die Integration auszuführen, setzen wir gemäss der vorigen Gleichung:

$$p = p_1 v_1{}^k \frac{1}{v^k},$$

wodurch (46) übergeht in:

$$W = p_1 v_1{}^k \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^k} = \frac{p_1 v_1{}^k}{k-1}\left(\frac{1}{v_1{}^{k-1}} - \frac{1}{v_2{}^{k-1}}\right),$$

oder, anders geschrieben:

$$(49) \qquad W = \frac{p_1 v_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right]:$$

ABSCHNITT III.

Zweiter Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

§. 1. Betrachtung eines Kreisprocesses von specieller Art.

Um den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ableiten und beweisen zu können, wollen wir davon ausgehen, einen Kreisprocess von specieller Art in seinen einzelnen Theilen zu verfolgen und in der oben angegebenen Weise graphisch darzustellen.

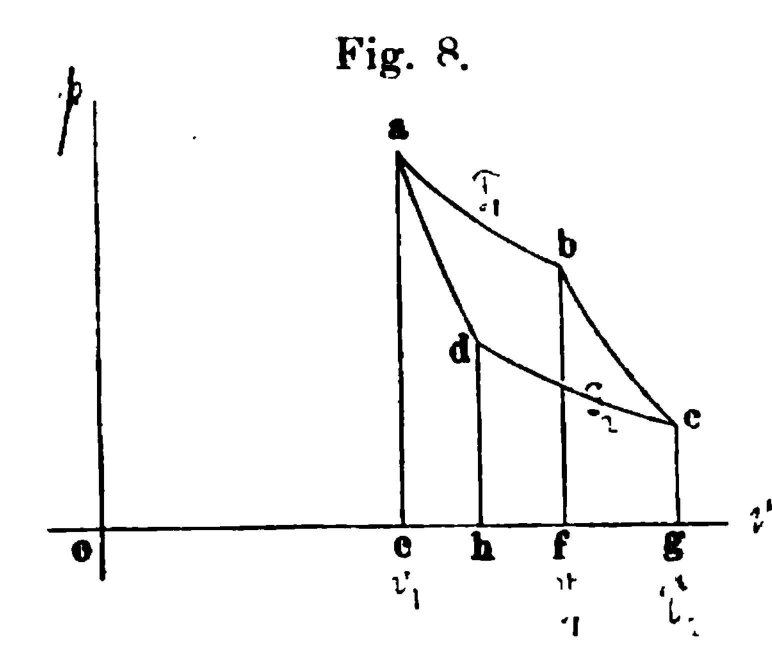
Zu dem letzteren Zwecke wollen wir annehmen, der Zustand des veränderlichen Körpers sei durch sein Volumen v und seinen Druck p bestimmt, und wollen, wie oben, ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene einführen, von welchem die Abscisse das Volumen und die Ordinate den Druck bedeutet. Dann entspricht jeder Punkt der Ebene einem gewissen Zustande des Körpers, in welchem sein Volumen und sein Druck dieselben Werthe haben, wie die Abscisse und die Ordinate des Punktes. Ferner wird jede Veränderung des Körpers durch eine Linie dargestellt, deren Anfangs- und Endpunkt den Anfangs- und Endzustand bestimmen, und deren Verlauf angiebt, in welcher Weise sich der Druck mit dem Volumen ändert.

Es sei nun in Fig. 8 der Anfangszustand des Körpers, von welchem der Kreisprocess beginnt, durch den Punkt a angegeben, indem die Abscisse $oe = v_1$ das Anfangsvolumen und die Ordinate

$ea = p_1$ den Anfangsdruck bedeute. Durch diese beiden Grössen ist zugleich auch die Anfangstemperatur bestimmt, welche wir T_1 nennen wollen.

Nun soll der Körper sich zuerst ausdehnen, während seine Temperatur constant T_1 bleibt. Da er sich bei der Ausdehnung, wenn ihm dabei keine Wärme mitgetheilt würde, abkühlen müsste, so nehmen wir an, er sei mit einem als Wärmereservoir dienenden Körper K_1 in Verbindung gesetzt, welcher die Temperatur T_1 hat, und diese während des Processes nicht merklich ändert. Von diesem Körper soll der veränderliche Körper während der Ausdehnung so viel Wärme erhalten, dass auch er dieselbe Temperatur T_1 beibehält.

Fig. 8.



Die Curve, welche bei dieser Ausdehnung den Druck darstellt, ist ein Stück einer *isothermischen* Curve. Um bei der graphischen Darstellung dieser und den anderen noch vorkommenden Curven bestimmte Gestalten geben zu können, wollen wir, ohne die Betrachtung selbst auf einen bestimmten Körper zu beschränken, doch die Figur so zeichnen, wie sie sich für ein vollkommenes Gas gestaltet. Dann ist die isothermische Curve, wie schon oben erwähnt, eine gleichseitige Hyperbel, und wenn die Ausdehnung vom Volumen $oe = v_1$ bis zum Volumen $of = V_1$ geschieht, so erhalten wir von dieser gleichseitigen Hyperbel das Stück ab.

Nachdem das Volumen V_1 erreicht ist, denken wir uns den Körper K_1 fortgenommen, und lassen nun den veränderlichen Körper für sich allein seine Ausdehnung fortsetzen, ohne dass ihm Wärme mitgetheilt wird. Dann sinkt seine Temperatur und wir erhalten als Druckcurve eine *isentropische* Curve, welche steiler abfällt, als die isothermische Curve. Diese Ausdehnung möge bis zum Volumen $og = V_2$ vor sich gehen, wobei wir das Curvenstück bc erhalten. Die dabei erreichte niedrigere Temperatur möge T_2 heissen.

Von nun an soll der Körper wieder zusammengedrückt werden, um ihn wieder in sein ursprüngliches Volumen zu bringen. Zunächst möge eine Zusammendrückung bei der constanten Temperatur T_2 stattfinden, wozu wir uns den veränderlichen Körper

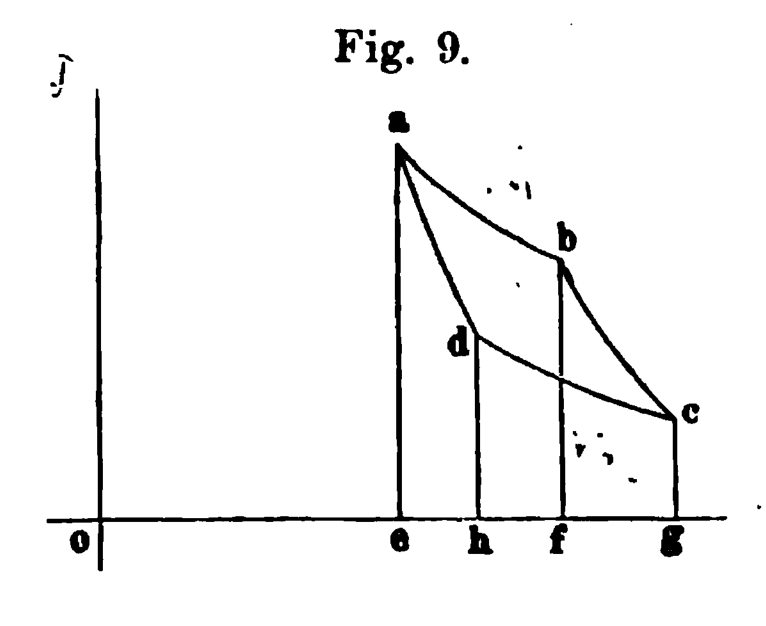
mit einem als Wärmereservoir dienenden Körper K_2 von der Temperatur T_2 in Verbindung gesetzt denken, an welchen er während der Zusammendrückung so viel Wärme abgiebt, dass er die Temperatur T_2 beibehält. Die dieser Zusammendrückung entsprechende Druckcurve ist wieder eine isothermische Curve und speciell für ein vollkommenes Gas eine andere gleichseitige Hyperbel, von welcher wir bei der Volumenabnahme bis $oh = v_2$ das Stück cd erhalten.

Die letzte Zusammendrückung endlich, welche den veränderlichen Körper wieder in sein anfängliches Volumen bringt, soll ohne den Körper K_2 stattfinden, so dass also die Temperatur steigt, wobei dann der Druck nach einer isentropischen Curve wächst. Wir wollen nun annehmen, das Volumen $oh = v_2$, bis zu welchem die erste Zusammendrückung geschah, sei so gewählt, dass die von diesem Volumen beginnende und bis zum Volumen $oe = v_1$ fortschreitende Zusammendrückung gerade ausreiche, um die Temperatur wieder von T_2 auf T_1 zu erhöhen. Wenn dann zugleich mit dem anfänglichen Volumen auch die anfängliche Temperatur erreicht wird, muss auch der Druck wieder den anfänglichen Werth annehmen, und die letzte Druckcurve muss daher gerade den Punkt a treffen. Indem somit der Körper zu seinem durch a angedeuteten ursprünglichen Zustande wieder zurückgekehrt ist, ist der Kreisprocess vollendet.

§. 2. Resultat des Kreisprocesses.

Bei den beiden im Kreisprocesse vorkommenden Ausdehnungen des veränderlichen Körpers muss der äussere Druck überwunden werden, und es wird daher äussere Arbeit geleistet, und bei den Zusammendrückungen wird umgekehrt äussere Arbeit verbraucht.

Fig. 9.



Diese Arbeitsgrössen sind unmittelbar aus der hier wieder abgedruckten Figur ersichtlich. Die bei der Ausdehnung ab geleistete Arbeit wird durch das Viereck $eabf$ dargestellt, und ebenso die bei der Ausdehnung bc geleistete durch das Viereck $fbcg$. Ferner wird die bei der

Zusammendrückung *cd* verbrauchte Arbeit durch das Viereck *gcdh* und die bei der Zusammendrückung *da* verbrauchte Arbeit durch das Viereck *hdae* dargestellt. Die letzten beiden Arbeitsgrössen sind wegen der bei den Zusammendrückungen herrschenden niedrigeren Temperatur und des dadurch bedingten geringeren Druckes kleiner, als die beiden ersten, und wenn wir sie von diesen abziehen, so bleibt ein Ueberschuss an geleisteter äusserer Arbeit, welcher durch das Viereck *abcd* dargestellt wird, und welchen wir mit W bezeichnen wollen.

Dieser gewonnenen äusseren Arbeit muss, gemäss der Gleichung (5a) des ersten Abschnittes, eine Menge Q von verbrauchter Wärme entsprechen, welche ihr an Werth gleich ist. Der veränderliche Körper erhielt aber während der ersten, durch *ab* dargestellten Ausdehnung, welche in Verbindung mit dem Körper K_1 stattfand, von diesem eine gewisse Wärmemenge, welche wir Q_1 nennen wollen, und während der ersten, durch *cd* dargestellten Zusammendrückung, welche in Verbindung mit dem Körper K_2 stattfand, gab er an diesen eine gewisse Wärmemenge ab, welche Q_2 heissen möge. Während der zweiten Ausdehnung *bc* und der zweiten Zusammendrückung *da* wurde dem veränderlichen Körper weder Wärme mitgetheilt noch entzogen. Da nun während des ganzen Kreisprocesses eine gewisse Wärmemenge Q zu Arbeit verbraucht ist, so muss die Wärmemenge Q_1, welche der veränderliche Körper empfangen hat, grösser sein, als die Wärmemenge Q_2, welche er wieder abgegeben hat, so dass die Differenz $Q_1 - Q_2$ gleich Q ist.

Demgemäss können wir setzen:

$$Q_1 = Q_2 + Q, \tag{1}$$

und können somit in der Wärmemenge Q_1, welche der veränderliche Körper von dem Körper K_1 erhalten hat, zwei Theile unterscheiden, deren einer Q in Arbeit verwandelt ist, während der andere Q_2 als Wärme an den Körper K_2 wieder abgegeben ist. Da in allen übrigen Beziehungen zu Ende des Kreisprocesses wieder der ursprüngliche Zustand hergestellt ist, und folglich jede Veränderung, welche in einem Theile des Kreisprocesses stattgefunden hat, durch eine entgegengesetzte in einem andern Theile des Kreisprocesses eingetretene Veränderung wieder aufgehoben ist, so können wir das Resultat des Kreisprocesses schliesslich so aussprechen. *Die eine aus dem Körper K_1 stammende Wärmemenge Q ist in Arbeit verwandelt, und die andere Wärmemenge Q_2 ist aus dem Körper K_1 in den kälteren Körper K_2 übergegangen.*

Wir können den ganzen vorher beschriebenen Kreisprocess, auch in umgekehrter Weise vor sich gehen lassen. Indem wir wieder von dem durch den Punkt a angedeuteten Zustande ausgehen, bei welchem der veränderliche Körper das Volumen v_1 und die Temperatur T_1 hat, denken wir uns, dass er zuerst ohne Mittheilung von Wärme sich bis zum Volumen v_2 ausdehne, und somit die Curve ad beschreibe, wobei seine Temperatur von T_1 bis T_2 sinke; dass er sodann in Verbindung mit dem Körper K_2 und daher bei der constanten Temperatur T_2 sich von v_2 bis V_2 ausdehne und die Curve dc beschreibe, wobei er von dem Körper K_2 Wärme empfange; dass er darauf ohne Entziehung von Wärme von V_2 bis V_1 zusammengedrückt werde und die Curve cb beschreibe, wobei seine Temperatur von T_2 bis T_1 steige, und dass er endlich in Verbindung mit dem Körper K_1 bei der constanten Temperatur T_1 und unter Abgabe von Wärme an K_1 von dem Volumen V_1 bis zum Anfangsvolumen v_1 zusammengedrückt werde und die Curve ba beschreibe.

Bei diesem umgekehrten Processe sind die durch die Vierecke $eadh$ und $hdcg$ dargestellten Arbeitsgrössen geleistete oder positive und die durch die Vierecke $gcbf$ und $fbae$ dargestellten Arbeitsgrössen verbrauchte oder negative. Die verbrauchten sind also grösser wie die geleisteten, und somit ist der durch das Viereck $abcd$ dargestellte Rest in diesem Falle *verbrauchte* Arbeit.

Ferner hat der veränderliche Körper von dem Körper K_2 die Wärmemenge Q_2 empfangen und an den Körper K_1 die Wärmemenge $Q_1 = Q_2 + Q$ abgegeben. Von den beiden Theilen, aus denen Q_1 besteht, entspricht der eine Q der verbrauchten Arbeit und ist durch dieselbe entstanden, während der andere Q_2 von dem Körper K_2 zum Körper K_1 übertragen ist. Wir können somit das Resultat des umgekehrten Kreisprocesses folgendermaassen zusammenfassen. *Die Wärmemenge Q ist durch Arbeit entstanden und an den Körper K_1 abgegeben, und die Wärmemenge Q_2 ist aus dem kälteren Körper K_2 in den wärmeren Körper K_1 übergegangen.*

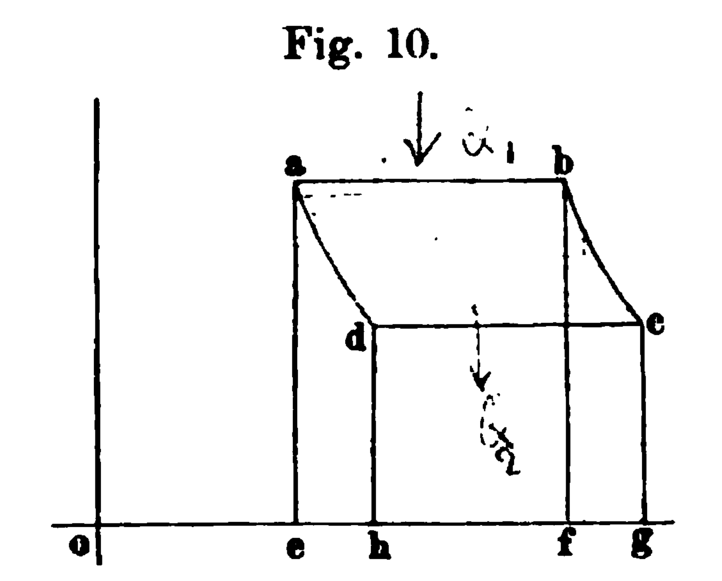
§. 3. Kreisprocess eines aus Flüssigkeit und Dampf bestehenden Körpers.

Da wir in den vorigen Paragraphen, obwohl wir bei der Besprechung des Kreisprocesses keine beschränkende Annahme über die Natur des veränderlichen Körpers machten, doch die graphische

Darstellung des Processes so ausgeführt haben, wie sie einem vollkommenen Gase entspricht, so wird es vielleicht zweckmässig sein, für einen Körper von anderer Art den Kreisprocess noch einmal zu betrachten, um zu sehen, wie seine äussere Gestaltung sich mit der Natur des Körpers ändern kann. Wir wollen nämlich einen solchen Körper zur Betrachtung auswählen, welcher nicht in allen seinen Theilen einen und denselben Aggregatzustand hat, sondern zum Theil flüssig, zum Theil dampfförmig im Maximum der Dichtigkeit ist.

Es sei also in einem ausdehnsamen Gefässe eine Flüssigkeit enthalten, welche aber nur einen Theil des Raumes ausfülle und den übrigen Theil für den Dampf freilasse, der die Dichte hat, welche der stattfindenden Temperatur T_1 als Maximum entspricht. Das Gesammtvolumen beider sei in Fig. 10 durch die Abscisse oe und der Druck des Dampfes durch die Ordinate ea dargestellt. Nun gebe das Gefäss dem Drucke nach, und erweitere sich, während Flüssigkeit und Dampf mit einem

Fig. 10.



Körper K_1 von der constanten Temperatur T_1 in Berührung seien. So wie der Raum grösser wird, verdampft mehr Flüssigkeit, aber die dabei verbrauchte Wärme wird immer wieder vom Körper K_1 ersetzt, so dass die Temperatur und mit ihr auch der Druck des Dampfes ungeändert bleiben. Die auf diese Ausdehnung bezügliche isothermische Curve ist also eine der Abscissenaxe parallele Gerade. Wenn auf diese Weise das Gesammtvolumen von oe bis of angewachsen ist, so ist dabei eine äussere Arbeit erzeugt, die durch das Rechteck $eabf$ dargestellt wird. — Jetzt nehme man den Körper K_1 fort, und lasse das Gefäss sich noch mehr erweitern, während weder Wärme hinein noch heraus kann. Dabei wird theils der vorhandene Dampf sich ausdehnen, theils neuer entstehen, und demzufolge wird die Temperatur sinken und somit auch der Druck abnehmen. Dieses setze man fort, bis die Temperatur aus T_1 in T_2 übergegangen ist, wobei das Volumen og erreicht werde. Wird die während dieser Ausdehnung stattfindende Druckabnahme durch die Curve bc, welche eine isentropische Curve ist, dargestellt, so ist die dabei erzeugte äussere Arbeit $= fbcg$.

Nun drücke man das Gefäss zusammen, um die Flüssigkeit

mit dem Dampfe wieder auf ihr ursprüngliches Gesammtvolumen *oe* zurückzubringen; und zwar geschehe diese Zusammendrückung zum Theil in Berührung mit dem Körper K_2 von der Temperatur T_2, auf den alle bei der Condensation des Dampfes entstehende Wärme übergehe, so dass die Temperatur constant $= T_2$ bleibe, zum Theil ohne diesen Körper, so dass die Temperatur steige, und man richte es so ein, dass die erste Zusammendrückung nur so weit (bis *oh*) fortgesetzt werde, dass der dann noch bleibende Raum *he* gerade hinreiche, um die Temperatur wieder von T_2 bis T_1 zu erhöhen. Während der ersten Volumenverringerung bleibt der Druck unveränderlich $= gc$, und die dabei verbrauchte äussere Arbeit ist gleich dem Rechtecke *gcdh*. Während der letzten Volumenverringerung nimmt der Druck zu und werde dargestellt durch die isentropische Curve *da*, welche gerade im Punkte *a* enden muss, da der ursprünglichen Temperatur T_1 auch wieder der ursprüngliche Druck *ea* entsprechen muss. Die zuletzt verbrauchte äussere Arbeit ist $= hdae$.

Am Schlusse der Operation sind Flüssigkeit und Dampf wieder in ihrem ursprünglichen Zustande und der Kreisprocess ist somit vollendet. Der Ueberschuss der positiven äusseren Arbeit über die negative, also die während des Kreisprocesses im Ganzen gewonnene äussere Arbeit W wird wieder durch das Viereck *abcd* dargestellt. Dieser Arbeit muss der Verbrauch einer ihr gleichen Wärmemenge Q entsprechen, und wenn wir daher die während der Ausdehnung mitgetheilte Wärme wieder mit Q_1 und die während der Zusammendrückung entzogene Wärme mit Q_2 bezeichnen, so ist Q_1 gleich $Q_2 + Q$ zu setzen und das Endresultat des Kreisprocesses besteht daher auch hier darin, dass die Wärmemenge Q in Arbeit verwandelt, und die Wärmemenge Q_2 aus dem wärmeren Körper K_1 in den kälteren Körper K_2 übergegangen ist.

Auch dieser Kreisprocess kann umgekehrt ausgeführt werden, wobei dann die Wärmemenge Q durch Arbeit erzeugt und an den Körper K_1 abgegeben, und die Wärmemenge Q_2 vom kälteren Körper K_2 zum wärmeren Körper K_1 übertragen wird.

Ebenso kann man mit verschiedenen anderen veränderlichen Körpern Kreisprocesse dieser Art, die graphisch durch zwei isothermische und zwei isentropische Curven dargestellt werden, ausführen, wobei zwar die Form der Curven von der Natur des veränderlichen Körpers abhängt, aber das Resultat des Processes immer in gleicher Weise darin besteht, dass Eine Wärmemenge in

Arbeit verwandelt oder durch Arbeit erzeugt wird, und eine andere Wärmemenge aus einem wärmeren in einen kälteren Körper, oder umgekehrt, übergeht.

Es lässt sich nun die Frage stellen, *ob die in Arbeit verwandelte oder durch Arbeit erzeugte Wärmemenge zu derjenigen Wärmemenge, welche aus dem wärmeren in den kälteren Körper oder umgekehrt übergeht, in einem allgemein gültigen Verhältnisse steht, oder ob das zwischen ihnen obwaltende Verhältniss je nach der Natur des veränderlichen Körpers, welcher den Vorgang vermittelt, verschieden ist.*

§. 4. Carnot's Ansicht über die in einem Kreisprocesse geleistete Arbeit.

S. Carnot, welcher zuerst darauf aufmerksam geworden war, dass bei der Hervorbringung von mechanischer Arbeit Wärme aus einem wärmeren in einen kälteren Körper übergeht, und dass umgekehrt durch Verbrauch von mechanischer Arbeit Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper geschafft werden kann, und welcher auch den vorher beschriebenen einfachen Kreisprocess ersonnen hat (der dann von Clapeyron zuerst graphisch dargestellt ist), hat sich von dem ursächlichen Zusammenhange jener Vorgänge eine eigenthümliche Ansicht gebildet [1]).

Zu seiner Zeit war noch allgemein jene schon oben besprochene Vorstellung verbreitet, dass die Wärme ein besonderer Stoff sei, welcher in einem Körper in grösserer oder geringerer Quantität vorhanden sein könne, und dadurch die Verschiedenheiten der Temperatur bedinge. Dieser Vorstellung gemäss war man der Meinung, dass die Wärme wohl die Art ihrer Vertheilung ändern könne, indem sie aus einem Körper in einen anderen übergehe, und dass sie ferner in verschiedenen Zuständen existiren könne, die man mit den Worten „latent" und „frei" bezeichnete; dass aber die Quantität der im Ganzen vorhandenen Wärme sich weder vermehren noch vermindern lasse, da ein Stoff nicht neu erzeugt und nicht vernichtet werden könne.

Dieser Meinung war auch Carnot und er betrachtete es daher als selbstverständlich, dass die Wärmemengen, welche der ver-

---

1) *Reflexions sur la puissance motrice du feu. Paris 1824.*

änderliche Körper während eines Kreisprocesses von Aussen aufnimmt und nach Aussen abgiebt, unter einander gleich seien, so dass sie sich gegenseitig aufheben. Er spricht dieses sehr bestimmt auf S. 27 seines Buches aus, wo er sagt: „Nous supposerons..... que les quantités de chaleur absorbées et dégagées dans ses diverses transformations sont exactement compensées. Ce fait n'a jamais été révoqué en doute; il a été d'abord admis sans reflexion et vérifié ensuite dans beaucoup de cas par les expériences du calorimètre. Le nier, ce serait renverser toute la théorie de la chaleur, dans laquelle il sert de base."

Da hiernach die Quantität der vorhandenen Wärme nach dem Kreisprocesse dieselbe sein sollte, wie vor demselben, und da doch ein Gewinn an Arbeit vorlag, so suchte Carnot diesen letzteren aus dem Herabsinken der Wärme von einer höheren zu einer tieferen Temperatur zu erklären. Er verglich diesen absteigenden Wärmeübergang, welcher besonders bei der Dampfmaschine augenfällig ist, wo das Feuer Wärme an den Dampfkessel abgiebt und das Kühlwasser des Condensators umgekehrt Wärme empfängt, mit dem Herabsinken des Wassers von einer höheren zu einer tieferen Stelle, wodurch eine Maschine in Bewegung gesetzt, und somit Arbeit geleistet werden kann. Demgemäss wendet er auf S. 28 seines Buches, nachdem er den Ausdruck „la chute d'eau" gebraucht hat, in entsprechender Weise für das Herabsinken der Wärme von einer höheren zu einer tieferen Temperatur den Ausdruck „la chute du calorique" an.

Von dieser Betrachtung ausgehend, stellte er den Satz auf, dass die Grösse der geleisteten Arbeit zu dem gleichzeitig stattfindenden Wärmeübergange, d. h. zu der Quantität der übergehenden Wärme und den Temperaturen der Körper, zwischen denen sie übergeht, in einer gewissen allgemein gültigen Beziehung stehen müsse, welche von der Natur desjenigen Stoffes, durch welchen die Arbeitsleistung und der Wärmeübergang vermittelt wird, unabhängig sei. Sein Beweis für die Nothwendigkeit einer solchen bestimmten Beziehung stützt sich auf den Grundsatz, *dass es unmöglich sei*, *bewegende Kraft aus Nichts zu schaffen*, oder mit anderen Worten, *dass ein Perpetuum-Mobile unmöglich sei.*

Diese Betrachtungsweise stimmt aber mit unseren jetzigen Anschauungen nicht überein, indem wir vielmehr annehmen, dass zur Hervorbringung von Arbeit eine entsprechende Menge Wärme verbraucht werde, und dass demnach die während des Kreisprocesses

nach Aussen abgegebene Wärmemenge geringer sei, als die von Aussen aufgenommene. Wenn nun aber zur Hervorbringung von Arbeit Wärme verbraucht wird, so kann natürlich, mag neben dem Verbrauche von Wärme noch gleichzeitig ein Uebergang einer anderen Wärmemenge von einem wärmeren zu einem kälteren Körper stattfinden, oder nicht, doch keinesfalls davon die Rede sein, dass die Arbeit aus Nichts entstanden sei. Demnach bedurfte nicht nur der Satz, welchen Carnot ausgesprochen hatte, einer Aenderung, sondern es musste auch für den Beweis eine andere Basis gesucht werden, als diejenige, auf welche Carnot den seinigen gegründet hatte.

§. 5. Ein neuer Grundsatz in Bezug auf die Wärme.

Verschiedene Betrachtungen über das Verhalten und die Natur der Wärme hatten mich zu der Ueberzeugung geführt, dass das bei der Wärmeleitung und der gewöhnlichen Wärmestrahlung hervortretende Bestreben der Wärme von wärmeren zu kälteren Körpern überzugehen, und dadurch die bestehenden Temperaturdifferenzen auszugleichen, so innig mit ihrem ganzen Wesen verknüpft sei, dass es sich unter allen Umständen geltend machen müsse. Ich stellte daher folgenden Satz als Grundsatz auf:

Die Wärme kann nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen.

Die hierin vorkommenden Worte „von selbst“, welche der Kürze wegen angewandt sind, bedürfen, um vollkommen verständlich zu sein, noch einer Erläuterung, welche ich in meinen Abhandlungen an verschiedenen Orten gegeben habe. Zunächst soll darin ausgedrückt sein, dass durch Leitung und Strahlung die Wärme sich nie in dem wärmeren Körper auf Kosten des kälteren noch mehr anhäufen kann. Dabei soll dasjenige, was in dieser Beziehung über die Strahlung schon früher bekannt war, auch auf solche Fälle ausgedehnt werden, wo durch Brechung oder Reflexion die Richtung der Strahlen irgend wie geändert, und dadurch eine Concentration derselben bewirkt wird. Ferner soll der Satz sich auch auf solche Processe beziehen, die aus mehreren verschiedenen Vorgängen zusammengesetzt sind, wie z. B. Kreisprocesse der oben beschriebenen Art. Durch einen solchen Process kann allerdings (wie wir es bei der umgekehrten Ausführung des obigen Kreis-

processes gesehen haben), Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übertragen werden; unser Satz soll aber ausdrücken, dass dann gleichzeitig mit diesem Wärmeübergange aus dem kälteren in den wärmeren Körper entweder ein entgegengesetzter Wärmeübergang aus einem wärmeren in einen kälteren Körper stattfinden oder irgend eine sonstige Veränderung eintreten muss, welche die Eigenthümlichkeit hat, dass sie nicht rückgängig werden kann, ohne ihrerseits, sei es unmittelbar oder mittelbar, einen solchen entgegengesetzten Wärmeübergang zu veranlassen. Dieser gleichzeitig stattfindende entgegengesetzte Wärmeübergang oder die sonstige Veränderung, welche einen entgegengesetzten Wärmeübergang zur Folge hat, ist dann als *Compensation* jenes Wärmeüberganges von dem kälteren zum wärmeren Körper zu betrachten, und unter Anwendung dieses Begriffes kann man die Worte „von selbst" durch die Worte „ohne Compensation" ersetzen, und den obigen Satz so aussprechen:

Ein Wärmeübergang aus einem kälteren in einen wärmeren Körper kann nicht ohne Compensation stattfinden.

Dieser von mir als Grundsatz hingestellte Satz hat viele Anfechtungen erfahren, und ich habe ihn daher zu wiederholten Malen vertheidigen müssen, wobei ich immer nachweisen konnte, dass die Einwände nur dadurch veranlasst waren, dass die Erscheinungen, in welchen man einen uncompensirten Wärmeübergang aus einem kälteren in einen wärmeren Körper zu finden geglaubt hatte, unrichtig aufgefasst waren. Es würde aber an dieser Stelle den Gang unserer Betrachtungen zu sehr unterbrechen, wenn ich die Einwände und ihre Widerlegungen hier mittheilen wollte. Ich will daher bei den hier folgenden Auseinandersetzungen den Satz, welcher gegenwärtig, wie ich glaube, von den meisten Physikern als richtig anerkannt wird, einfach als einen Grundsatz in Anwendung bringen, so wie ich es in meinen Abhandlungen gethan habe, und behalte mir vor, weiter unten auf die über ihn geführten Discussionen noch etwas näher einzugehen.

§. 6. Beweis, dass das Verhältniss zwischen der in Arbeit verwandelten Wärme und der übergegangenen Wärme von der Natur des vermittelnden Stoffes unabhängig ist.

Unter Annahme des vorstehenden Grundsatzes lässt sich beweisen, dass zwischen der Wärmemenge Q, welche in einem Kreis-

processe der oben beschriebenen Art in Arbeit verwandelt (oder bei der umgekehrten Ausführung des Processes durch Arbeit erzeugt) wird, und der Wärmemenge Q_2, welche aus einem wärmeren in einen kälteren Körper (oder umgekehrt) übergeht, ein Verhältniss besteht, welches von der Natur des veränderlichen Körpers, der die Verwandlung und den Uebergang vermittelt, unabhängig ist, dass also, wenn unter Anwendung derselben Wärmereservoire K_1 und K_2 mit verschiedenen veränderlichen Körpern Kreisprocesse ausgeführt werden, dann das Verhältniss $\frac{Q}{Q_2}$ bei allen gleich ist.

Denkt man sich die Kreisprocesse ihrer Grösse nach immer so eingerichtet, dass die Wärmemenge Q, welche in Arbeit verwandelt wird, einen bestimmten Werth hat, so handelt es sich nur noch um die Grösse der übergegangenen Wärmemenge Q_2, und der Satz, welcher bewiesen werden soll, lautet dann: *wenn bei Anwendung zweier verschiedener veränderlicher Körper die in Arbeit verwandelte Wärmemenge Q gleich ist, so muss auch die übergegangene Wärmemenge Q_2 gleich sein.*

Angenommen, es gebe zwei Körper C und C' (z. B. das oben betrachtete Gas und die aus Flüssigkeit und Dampf bestehende Masse), für welche bei gleichem Werthe von Q die übergegangenen Wärmemengen verschiedene Werthe haben, die mit Q_2 und Q_2' bezeichnet werden mögen, und von denen Q_2' grösser als Q_2 sei, so können wir in folgender Weise verfahren. Zuerst lassen wir den Körper C den Kreisprocess in dem Sinne durchmachen, dass die Wärmemenge Q in Arbeit verwandelt und die Wärmemenge Q_2 von K_1 nach K_2 übergeführt wird. Darauf lassen wir den Körper C' den Kreisprocess im umgekehrten Sinne durchmachen, wobei die Wärmemenge Q durch Arbeit erzeugt und die Wärmemenge Q_2' von K_2 nach K_1 übergeführt wird.

Die beiden hierbei vorkommenden Verwandlungen aus Wärme in Arbeit und aus Arbeit in Wärme heben sich gegenseitig auf, denn, nachdem im ersten Kreisprocesse die Wärmemenge Q, welche aus dem Körper K_1 stammt, in Arbeit verwandelt ist, kann man sich denken, dass eben diese Arbeit im zweiten Kreisprocesse wieder verbraucht wurde, um die Wärmemenge Q zu erzeugen, die dann wieder an den Körper K_1 abgegeben ist. Auch im Uebrigen befindet sich zu Ende der beiden Operationen Alles wieder im ursprünglichen Zustande, mit Ausnahme Einer Veränderung, die übrig geblieben ist. Da nämlich die von K_2 zu K_1 übergegangene

6*

Wärmemenge Q_2' der Annahme nach grösser ist, als die von K_1 zu K_2 übergegangene Wärmemenge Q_2, so heben sich diese beiden Wärmeübergänge nicht vollständig auf, sondern es ist schliesslich die durch die Differenz $Q_2' - Q_2$ dargestellte Wärmemenge von K_2 zu K_1 übergegangen. Wir gelangen also zu dem Resultate, dass ein Wärmeübergang aus einem kälteren in einen wärmeren Körper ohne eine sonstige als Compensation dienende Veränderung stattgefunden habe. Da dieses dem Grundsatze widerspricht, so muss die Annahme, dass Q_2' grösser als Q_2 sei, unrichtig sein.

Würden wir die andere Annahme machen, dass Q_2' kleiner als Q_2 sei, so könnten wir uns denken, dass der Körper C' den Kreisprocess im ersten Sinne und der Körper C im umgekehrten Sinne durchmache. Dann würden wir zu dem Resultate gelangen, dass die Wärmemenge $Q_2 - Q_2'$ ohne Compensation vom kälteren Körper K_2 zum wärmeren Körper K_1 übergegangen sei, was abermals dem Grundsatze widerspräche.

Wenn demnach Q_2' weder grösser noch kleiner als Q_2 sein kann, so müssen beide gleich sein, womit der obige Satz bewiesen ist.

Wir wollen nun dem auf diese Weise gewonnenen Resultate noch eine für die folgenden Entwickelungen möglichst bequeme mathematische Form geben. Da der Bruch $\frac{Q}{Q_2}$ von der Natur des veränderlichen Körpers unabhängig ist, so kann er nur noch von den Temperaturen der beiden als Wärmereservoire dienenden Körper K_1 und K_2 abhängen. Dasselbe gilt natürlich auch von der Summe $1 + \frac{Q}{Q_2}$, und, da wir ferner schreiben können:

$$1 + \frac{Q}{Q_2} = \frac{Q_2 + Q}{Q_2} = \frac{Q_1}{Q_2},$$

so können wir den letzten Bruch, welcher das Verhältniss zwischen der aufgenommenen und der abgegebenen Wärme dargestellt, zur weiteren Betrachtung auswählen, und das gewonnene Resultat dahin ausdrücken, *dass der Bruch* $\frac{Q_1}{Q_2}$ *nur von den Temperaturen* T_1 *und* T_2 *abhängen kann.* Demgemäss bilden wir die Gleichung:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \Phi(T_1, T_2), \tag{2}$$

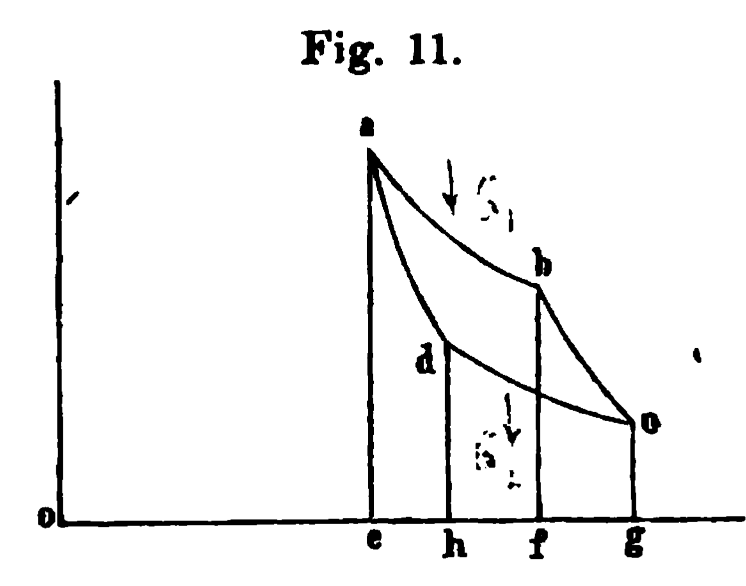
worin $\Phi(T_1, T_2)$ eine Function der beiden Temperaturen bedeuten soll, welche von der Natur des veränderlichen Körpers unabhängig ist.

§. 7. Bestimmung der Function $\Phi(T_1, T_2)$.

Der Umstand, dass die in der Gleichung (2) vorkommende Function der beiden Temperaturen von der Natur des veränderlichen Körpers unabhängig ist, giebt uns ein Mittel an die Hand, diese Function zu bestimmen, denn sobald für irgend einen Körper die Form der Function gefunden ist, kann diese Form als die allgemein gültige betrachtet werden.

Unter den verschiedenen Körperclassen eignen sich nun ganz besonders die vollkommenen Gase zu einer solchen Bestimmung, weil deren Gesetze am genauesten bekannt sind. Wir wollen daher einen mit einem vollkommenen Gase ausgeführten Kreisprocess betrachten, wie er schon in der zu §. 1 gehörigen Fig. 8, welche hier noch einmal Platz finden möge, graphisch dargestellt ist, indem damals bei der Construction der Figur beispielsweise ein vollkommenes Gas als veränderlicher Körper angenommen wurde.

Fig. 11.



Die in diesem Kreisprocesse vorkommenden Wärmemengen Q_1 und Q_2, welche das Gas bei der Ausdehnung *ab* (Fig. 11) aufnimmt und bei der Zusammendrückung *cd* abgiebt, wollen wir berechnen und unter einander vergleichen.

Dazu müssen wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die durch die Abscissen *oe*, *oh*, *of* und *og* dargestellten und mit v_1, v_2, V_1 und V_2 bezeichneten Volumina richten, um die zwischen ihnen bestehende Beziehung abzuleiten.

Die durch *oe* und *oh* dargestellten Volumina v_1 und v_2 bilden die Grenzen derjenigen Volumenänderung, auf welche die isentropische Curve *ad* sich bezieht, und welche man nach Belieben als Ausdehnung oder als Zusammendrückung geschehen lassen kann. Eine solche Volumenänderung, bei welcher das Gas keine Wärme empfängt oder abgiebt, haben wir schon in §. 8 des vorigen Abschnittes behandelt, und haben folgende dort unter (43) gegebene Gleichung gefunden:

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{k-1},$$

und wenn wir für unseren gegenwärtigen Fall die Endtemperatur und das Endvolumen mit T_2 und v_2 bezeichnen, so erhalten wir:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1} \tag{3}$$

Ganz ebenso erhalten wir bei Betrachtung der durch die isentropische Curve bc dargestellten Volumenänderung:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \tag{4}$$

Aus der Vereinigung dieser beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

oder umgeschrieben:

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2}. \tag{5}$$

Nun wenden wir uns zu der durch die isothermische Curve ab dargestellten Volumenänderung, welche bei der constanten Temperatur T_1 zwischen den Grenzen v_1 und V_1 vor sich geht. Die bei einer solchen Volumenänderung aufgenommene oder abgegebene Wärmemenge haben wir auch schon in §. 8 des vorigen Abschnittes bestimmt, und gemäss der dort unter (41) gegebenen Gleichung können wir für unseren gegenwärtigen Fall setzen:

$$Q_1 = R T_1 \log \frac{V_1}{v_1}. \tag{6}$$

Ebenso haben wir für die durch die isothermische Curve dc dargestellte Volumenänderung, welche bei der Temperatur T_2 zwischen den Grenzen v_2 und V_2 stattfindet, zu setzen:

$$Q_2 = R T_2 \log \frac{V_2}{v_2}. \tag{7}$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen durch einander dividiren, und dabei die Gleichung (5) berücksichtigen, so erhalten wir das gesuchte Verhältniss zwischen Q_1 und Q_2, nämlich:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{8}$$

Hierdurch ist die in (2) vorkommende Function der beiden Temperaturen bestimmt, indem wir, um jene Gleichung mit der vorstehenden in Uebereinstimmung zu bringen, setzen müssen:

$$\Phi(T_1, T_2) = \frac{T_1}{T_2}. \tag{9}$$

Die nun an die Stelle von (2) tretende bestimmtere Gleichung (8), welche sich auch in der Form

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{10}$$

schreiben lässt, wollen wir äusserlich noch etwas umändern, indem wir die in dem Kreisprocesse vorkommenden Wärmemengen, welche bisher als absolute Grössen behandelt wurden, und bei denen der Unterschied, dass die eine *aufgenommene* und die andere *abgegebene* Wärme ist, in Worten ausgedrückt wurde, dadurch von einander unterscheiden, dass wir sie als positive und negative Grössen behandeln. Es ist nämlich für die Rechnung bequemer, immer nur von aufgenommener Wärme zu sprechen, und abgegebene Wärmemengen als aufgenommene negative Wärmemengen zu betrachten. Wenn wir demgemäss sagen, der veränderliche Körper habe während des Kreisprocesses die Wärmemengen Q_1 und Q_2 aufgenommen, so müssen wir unter Q_2 eine negative Grösse verstehen, nämlich die Grösse, welche bisher durch $-Q_2$ dargestellt wurde. Dadurch geht die Gleichung (10) über in:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{11}$$

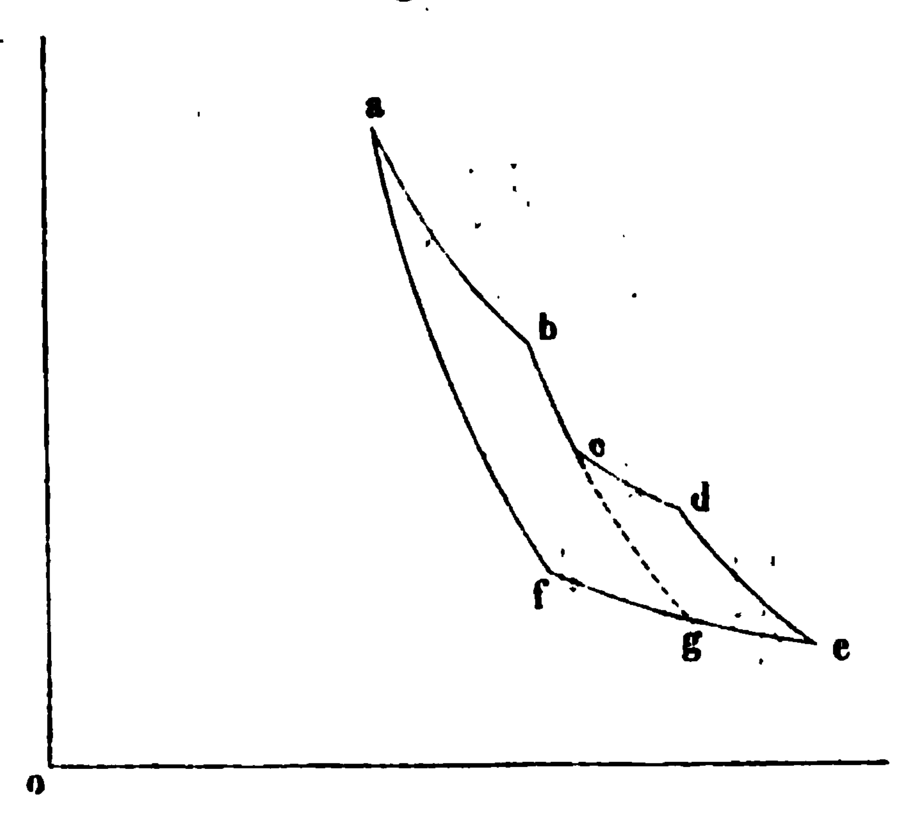
§. 8. Complicirtere Kreisprocesse.

Bisher haben wir uns auf solche Kreisprocesse beschränkt, in denen die Aufnahme von positiven und negativen Wärmemengen nur bei *zwei* Temperaturen stattfindet. Derartige Kreisprocesse wollen wir von jetzt an kurz *einfache Kreisprocesse* nennen. Wir müssen nun aber auch solche Kreisprocesse betrachten, in denen die Aufnahme von positiven und negativen Wärmemengen bei mehr als zwei Temperaturen stattfindet.

Zunächst möge ein Kreisprocess mit *drei* Aufnahmetemperaturen betrachtet werden, welcher umstehend graphisch dargestellt ist durch die Figur $abcdefa$, die, wie die früheren, aus lauter isothermischen und isentropischen Curven besteht. Diese Curven sind wieder beispielsweise in der Gestalt gezeichnet, welche sie bei einem vollkommenen Gase haben, was aber nicht wesentlich ist. Die Curve ab bedeutet eine Ausdehnung bei der constanten Temperatur T_1, bc eine Ausdehnung ohne Wärmeaufnahme, bei welcher

die Temperatur von T_1 bis T_2 sinkt, *cd* eine Ausdehnung bei der constanten Temperatur T_2, *de* eine Ausdehnung ohne Wärmeauf-

Fig. 12.



nahme, bei welcher die Temperatur von T_2 bis T_3 sinkt, *ef* eine Zusammendrückung bei der constanten Temperatur T_3 und endlich *fa* eine Zusammendrückung ohne Wärmeabgabe, bei welcher die Temperatur von T_3 bis T_1 steigt, und durch welche der veränderliche Körper wieder in sein anfängliches Volumen zurückkommt. Bei den Ausdehnungen *ab* und *cd* nimmt der Körper die positiven Wärmemengen Q_1 und Q_2 und bei der Zusammendrückung *ef* die negative Wärmemenge Q_3 auf. Es handelt sich nun darum, zwischen diesen drei Wärmemengen eine Beziehung zu finden.

Dazu denken wir uns in der Figur die isentropische Curve *bc* fortgesetzt, wie es durch das punktirte Stück *cg* angedeutet ist. Dadurch zerfällt der ganze Kreisprocess in zwei einfache Kreisprocesse *abgfa* und *cdegc*. Beim ersten geht der Körper von dem Zustande *a* aus und kommt in denselben wieder zurück. Beim zweiten denken wir uns einen eben solchen Körper, welcher von dem Zustande *c* ausgeht, und zu demselben wieder zurückkehrt. Die negative Wärmemenge Q_3, welche bei der Zusammendrückung *ef* aufgenommen wird, denken wir uns in zwei Theile q_3 und q_3' zerlegt, von denen der erste bei der Zusammendrückung *gf* und der zweite bei der Zusammendrückung *eg* aufgenommen wird. Dann können wir die beiden Gleichungen bilden, welche gemäss (11) für die beiden einfachen Kreisprocesse gelten, nämlich für den Process *abgfa*:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{q_3}{T_3} = 0,$$

und für den Process *cdegc*:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{q_3'}{T_3} = 0.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

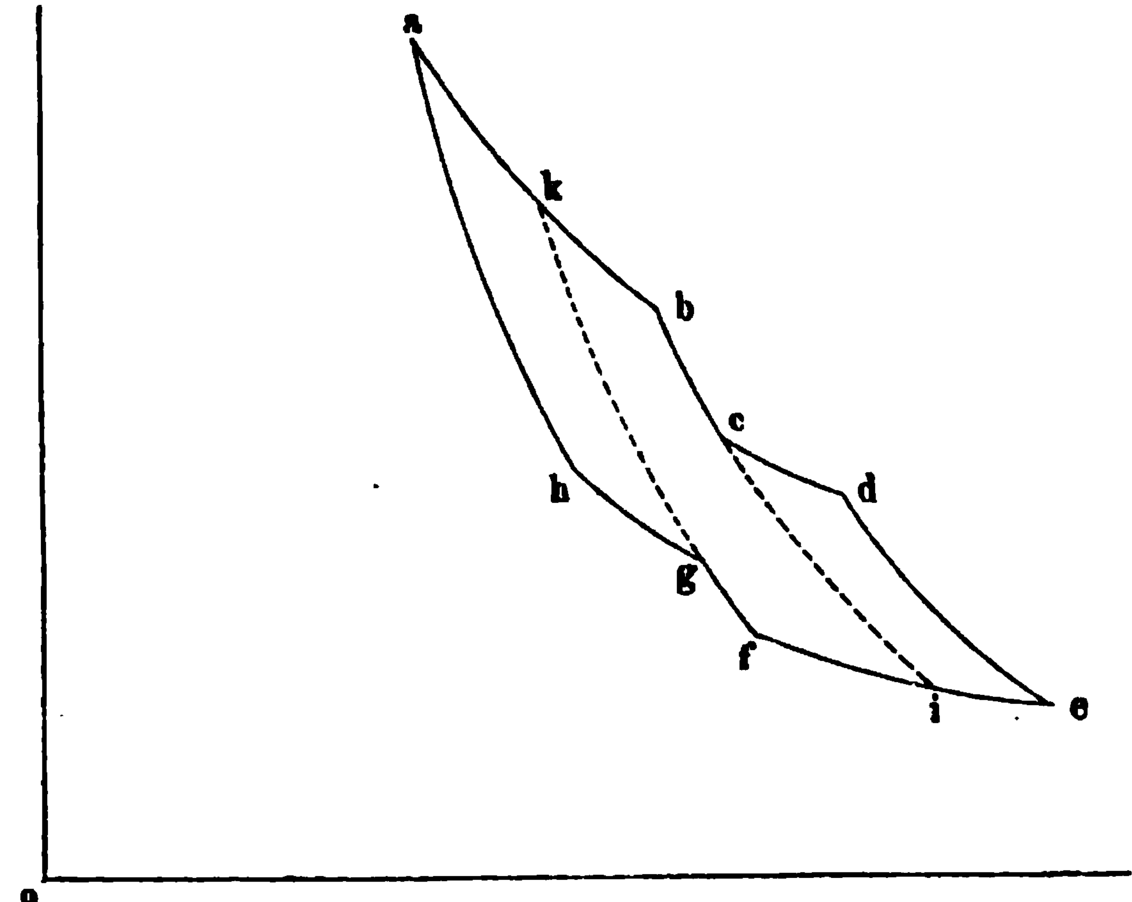
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{q_3 + q_3'}{T_3} = 0,$$

oder, da $q_3 + q_3'$ gleich Q_3 ist:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0. \qquad (12)$$

Ebenso können wir einen Kreisprocess mit *vier* Aufnahmetemperaturen behandeln, wie er durch die folgende Figur *abcdefgha*

Fig. 13.



dargestellt ist, welche wieder aus lauter isothermischen und isentropischen Curven besteht. Die Ausdehnungen *ab* und *cd* und die Zusammendrückungen *ef* und *gh* sollen bei den Temperaturen T_1, T_2, T_3 und T_4 stattfinden und dabei sollen die Wärmemengen Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 aufgenommen werden, von denen die beiden ersten positiv und die beiden letzten negativ sind.

Wir denken uns die isentropische Curve *bc* durch das punktirte Stück *ci* und die isentropische Curve *fg* durch das punktirte Stück

gk fortgesetzt. Dadurch zerfällt der ganze Kreisprocess in drei einfache Kreisprocesse *akgha*, *kbifk* und *cdeic*, welche wir uns mit drei ganz gleichen Körpern ausgeführt denken. Die bei der Ausdehnung *ab* aufgenommene Wärmemenge Q_1 denken wir uns in zwei Theile q_1 und q_1' zerlegt, welche den Ausdehnungen *ak* und *kb* entsprechen, und die bei der Zusammendrückung *ef* aufgenommene negative Wärmemenge Q_3 denken wir uns gleichfalls in zwei Theile q_3 und q_3' zerlegt, welche den Zusammendrückungen *if* und *ei* entsprechen. Dann können wir für die drei einfachen Kreisprocesse folgende Gleichungen bilden. Für *akgha*:

$$\frac{q_1}{T_1} + \frac{Q_4}{T_4} = 0,$$

für *kbifk*:

$$\frac{q_1'}{T_1} + \frac{q_3}{T_3} = 0,$$

und für *cdeic*:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{q_3'}{T_3} = 0.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{q_1 + q_1'}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{q_3 + q_3'}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = 0,$$

oder:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = 0. \tag{13}$$

Ebenso kann man jeden anderen Kreisprocess, welcher sich durch eine nur aus isothermischen und isentropischen Curven bestehende Figur darstellen lässt, aber eine beliebige Anzahl von Aufnahmetemperaturen hat, behandeln, wobei man immer eine Gleichung von der obigen Form erhält, nämlich:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} + \text{etc.} = 0,$$

oder unter Anwendung des Summenzeichens:

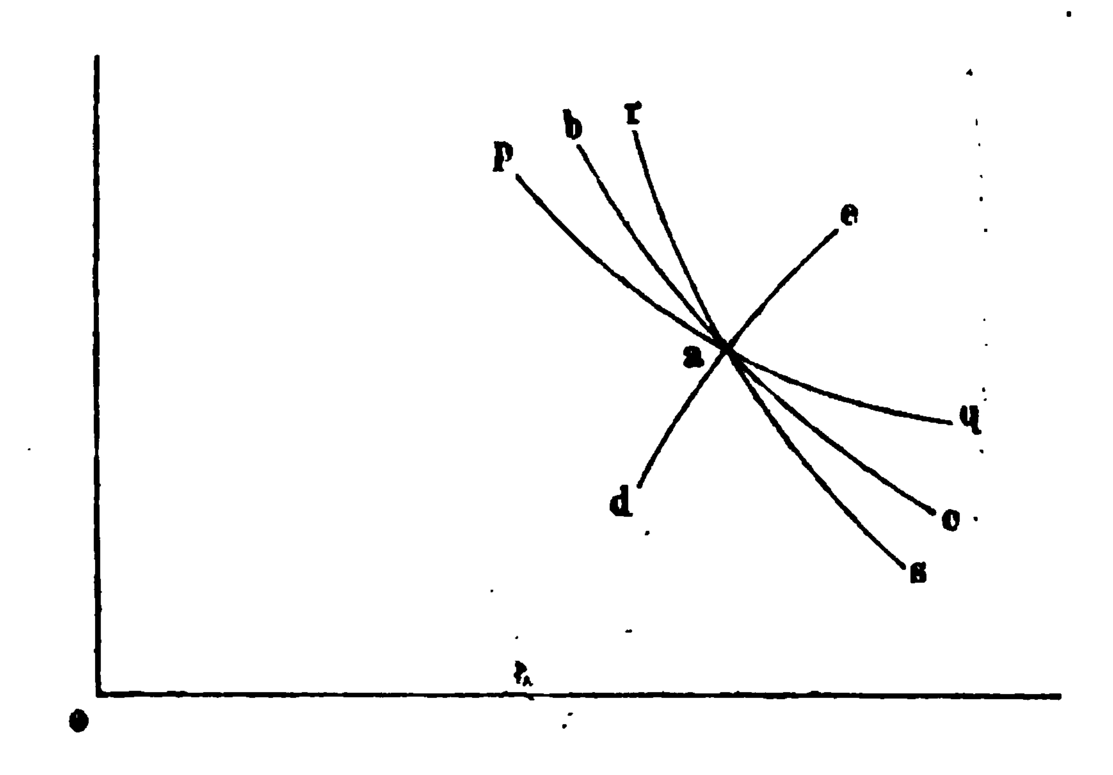
$$\sum \frac{Q}{T} = 0. \tag{14}$$

§. 9. Kreisprocesse, bei denen Wärmeaufnahme und Temperaturänderung gleichzeitig stattfinden.

Wir müssen nun endlich noch versuchen, auch solche Kreisprocesse, welche durch Figuren dargestellt werden, die nicht bloss isothermische und isentropische Curven enthalten, sondern ganz beliebig gestaltet sind, in ähnlicher Weise zu behandeln.

Dazu gelangen wir durch folgende Betrachtung. Der Punkt a in Fig. 14 deute irgend einen Zustand des veränderlichen Körpers

Fig. 14.

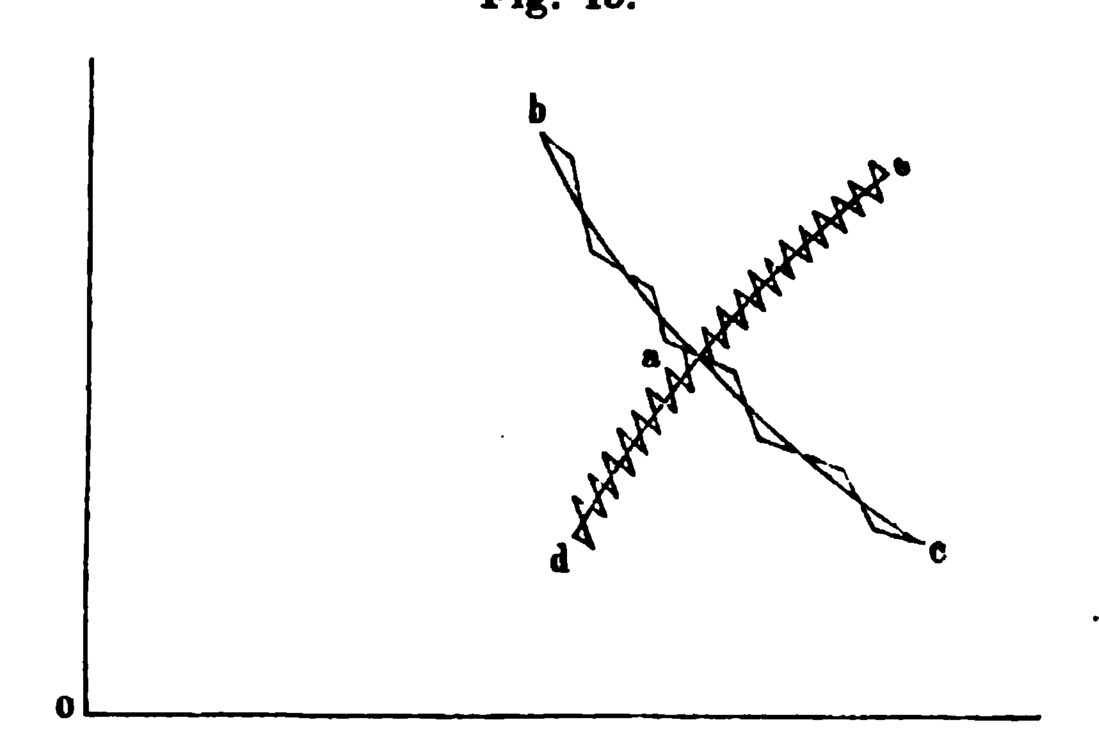


an, pq sei der Verlauf der durch a gehenden isothermischen Curve und rs der Verlauf der durch a gehenden isentropischen Curve. Wenn nun der Körper eine Veränderung erleidet, welche durch eine anders verlaufende Druckcurve, z. B. durch bc oder de dargestellt wird, und bei welcher gleichzeitig Wärmeaufnahme und Temperaturänderung stattfindet, so können wir uns eine solche Veränderung ersetzt denken durch eine grosse Anzahl auf einander folgender Veränderungen, bei denen immer abwechselnd Temperaturänderung ohne Wärmeaufnahme und Wärmeaufnahme ohne Temperaturänderung stattfindet.

Diese Reihe von aufeinander folgenden Veränderungen wird durch eine gebrochene Linie dargestellt, welche aus Stücken von isothermischen und isentropischen Curven besteht, so wie es in Fig. 15 (a. f. S.) längs bc und längs de gezeichnet ist. Die gebrochene Linie bleibt der stetig verlaufenden um so näher, je

kleiner die Stücke sind, aus denen sie besteht, und wenn diese unendlich klein sind, so bleibt sie ihr unendlich nahe. In diesem

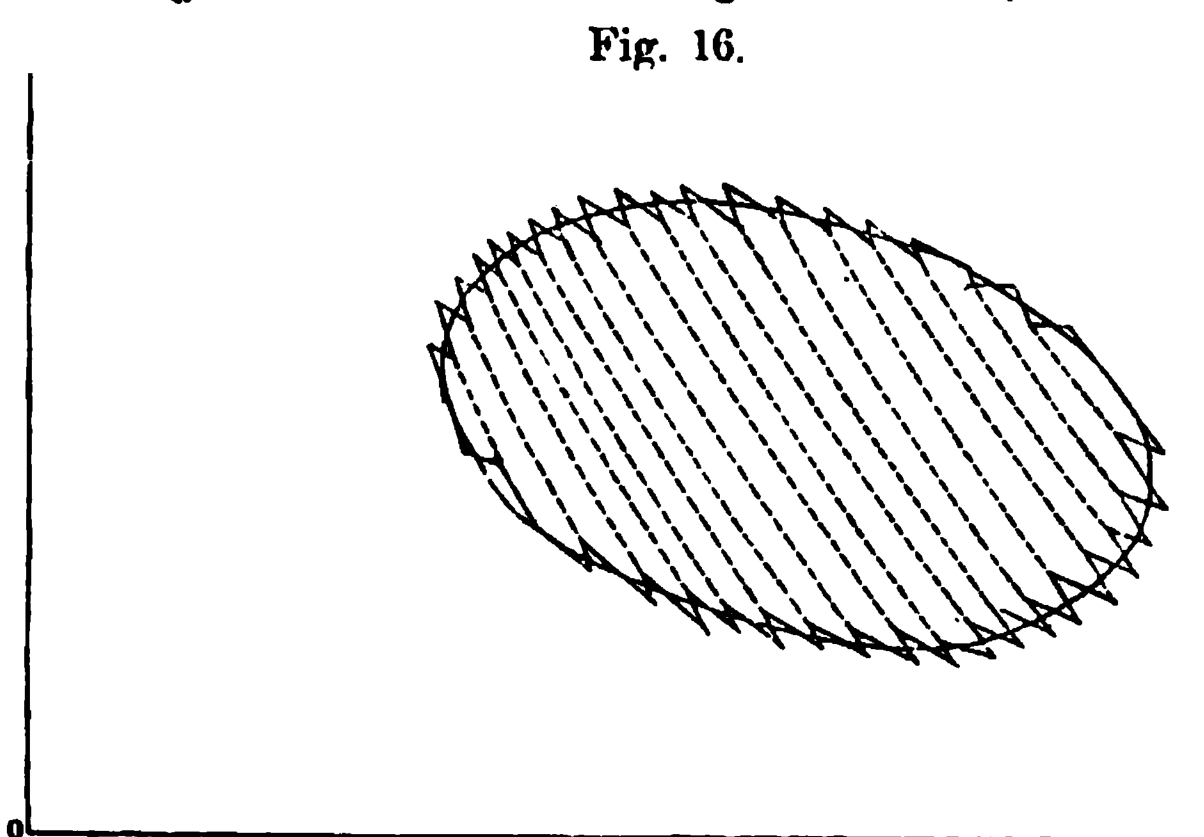
Fig. 15.



Falle kann es in Bezug auf die aufgenommenen Wärmemengen und ihre Temperaturen nur einen unendlich kleinen Unterschied machen, wenn man die Veränderung, welche durch die stetig verlaufende Linie dargestellt wird, ersetzt durch die unendliche Anzahl von abwechselnd verschiedenartigen Veränderungen, welche durch die gebrochene Linie dargestellt wird.

Nun möge ein ganzer Kreisprocess zur Betrachtung gegeben sein, bei welchem die Wärmeaufnahmen gleichzeitig mit Temperaturänderungen stattfinden, und welcher graphisch durch Curven von beliebiger Art oder auch nur durch eine einzige stetig verlaufende und in sich geschlossene Curve dargestellt wird, wie in Fig. 16.

Fig. 16.



Dann denke man sich die umschlossene Fläche, welche die äussere Arbeit darstellt, durch isentropische Curven, wie sie in der Figur punktirt gezeichnet sind, in unendlich schmale Streifen getheilt. Diese Curven denke man sich oben und unten durch unendlich kleine Stücke von isothermischen Curven verbunden, welche die gegebene Curve durchschneiden, so dass man längs der ganzen gegebenen Curve eine gebrochene Linie erhält, die ihr überall unendlich nahe liegt. Den durch diese gebrochene Linie dargestellten Kreisprocess kann man dem Obigen nach an die Stelle des durch die stetig verlaufende Linie dargestellten setzen, ohne dass dadurch eine bemerkenswerthe Aenderung in den aufgenommenen Wärmemengen und ihren Temperaturen entsteht. Ferner kann man den durch die gebrochene Linie dargestellten Kreisprocess wiederum ersetzen durch die unendlich vielen einfachen Kreisprocesse, welche durch die unendlich schmalen Vierecke dargestellt werden, deren jedes aus zwei neben einander liegenden isentropischen Curven und zwei unendlich kleinen Stücken von isothermischen Curven besteht.

Bildet man nun für jeden dieser letztgenannten Kreisprocesse eine Gleichung von der Form (11), bei der die beiden Wärmemengen unendlich klein sind, und daher als Differentiale von Q bezeichnet werden können, und addirt dann alle diese Gleichungen, so erhält man eine Gleichung von derselben Form, wie (14), nur dass an die Stelle des Summenzeichens ein Integralzeichen tritt, nämlich:

$$\text{(V.)} \qquad \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Diese Gleichung, welche ich zuerst im Jahre 1854 veröffentlicht habe[1], bildet einen sehr bequemen Ausdruck des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, soweit er sich auf umkehrbare Kreisprocesse bezieht. Ihre Bedeutung lässt sich folgendermaassen in Worten ausdrücken. *Wenn bei einem umkehrbaren Kreisprocesse jedes von dem veränderlichen Körper aufgenommene (positive oder negative) Wärmeelement durch die absolute Aufnahmetemperatur dividirt, und der so entstandene Differentialausdruck für den ganzen Verlauf des Kreisprocesses integrirt wird, so hat das Integral den Werth Null.*

Wenn das auf beliebige nach einander stattfindende Veränderungen eines Körpers bezügliche Integral

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 93, S. 500.

$$\int \frac{dQ}{T}$$

jedes Mal gleich Null wird, so oft der Körper wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, welches auch die dazwischen durchlaufenen Zustände sein mögen, so muss der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck

$$\frac{dQ}{T}$$

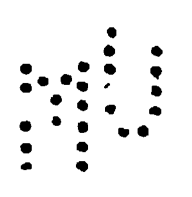
das vollständige Differential einer Grösse sein, welche nur von dem augenblicklichen Zustande des Körpers, und nicht von dem Wege, auf welchem der Körper in diesen Zustand gelangt ist, abhängt. Bezeichnen wir diese Grösse mit S, so können wir setzen:

$$\frac{dQ}{T} = dS$$

oder:

$$dQ = T dS, \tag{VI.}$$

welche Gleichung einen anderen für viele Untersuchungen bequemen Ausdruck des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie bildet.



ABSCHNITT IV.

Veränderte Form des zweiten Hauptsatzes
oder
Satz von der Aequivalenz der Verwandlungen.

§. 1. Zwei verschiedene Arten von Verwandlungen.

Im vorigen Abschnitte haben wir gesehen, dass bei einem einfachen Kreisprocesse zwei auf die Wärme bezügliche Veränderungen eintreten, dass nämlich eine Wärmemenge in Arbeit verwandelt (oder durch Arbeit erzeugt) wird und eine andere Wärmemenge aus einem wärmeren in einen kälteren Körper (oder umgekehrt) übergeht. Wir haben dann weiter gefunden, dass zwischen der in Arbeit verwandelten (oder durch Arbeit erzeugten) Wärmemenge und der übergehenden Wärmemenge ein bestimmtes Verhältniss bestehen muss, welches von der Natur des veränderlichen Körpers unabhängig ist, und daher nur von den Temperaturen der beiden als Wärmereservoire dienenden Körper abhängen kann.

Für die eine jener beiden Veränderungen haben wir schon früher den Ausdruck *Verwandlung* eingeführt, indem wir, wenn Wärme verbraucht wird und dafür Arbeit entsteht, oder umgekehrt Arbeit verbraucht wird und dafür Wärme entsteht, sagten, es habe sich Wärme in Arbeit oder Arbeit in Wärme verwandelt. Wir können nun auch die zweite Veränderung, welche darin besteht, dass Wärme aus einem Körper in einen anderen, der entweder wärmer oder kälter ist, übergeht, als eine *Verwandlung* bezeichnen,

$$\int \frac{dQ}{T}$$

jedes Mal gleich Null wird, so oft der Körper wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, welches auch die dazwischen durchlaufenen Zustände sein mögen, so muss der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck

$$\frac{dQ}{T}$$

das vollständige Differential einer Grösse sein, welche nur von dem augenblicklichen Zustande des Körpers, und nicht von dem Wege, auf welchem der Körper in diesen Zustand gelangt ist, abhängt. Bezeichnen wir diese Grösse mit S, so können wir setzen:

$$\frac{dQ}{T} = dS$$

oder:

$$\text{(VI.)} \qquad dQ = TdS,$$

welche Gleichung einen anderen für viele Untersuchungen bequemen Ausdruck des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie bildet.

ABSCHNITT IV.

Veränderte Form des zweiten Hauptsatzes
oder
Satz von der Aequivalenz der Verwandlungen.

§. 1. Zwei verschiedene Arten von Verwandlungen.

Im vorigen Abschnitte haben wir gesehen, dass bei einem einfachen Kreisprocesse zwei auf die Wärme bezügliche Veränderungen eintreten, dass nämlich eine Wärmemenge in Arbeit verwandelt (oder durch Arbeit erzeugt) wird und eine andere Wärmemenge aus einem wärmeren in einen kälteren Körper (oder umgekehrt) übergeht. Wir haben dann weiter gefunden, dass zwischen der in Arbeit verwandelten (oder durch Arbeit erzeugten) Wärmemenge und der übergehenden Wärmemenge ein bestimmtes Verhältniss bestehen muss, welches von der Natur des veränderlichen Körpers unabhängig ist, und daher nur von den Temperaturen der beiden als Wärmereservoire dienenden Körper abhängen kann.

Für die eine jener beiden Veränderungen haben wir schon früher den Ausdruck *Verwandlung* eingeführt, indem wir, wenn Wärme verbraucht wird und dafür Arbeit entsteht, oder umgekehrt Arbeit verbraucht wird und dafür Wärme entsteht, sagten, es habe sich Wärme in Arbeit oder Arbeit in Wärme verwandelt. Wir können nun auch die zweite Veränderung, welche darin besteht, dass Wärme aus einem Körper in einen anderen, der entweder wärmer oder kälter ist, übergeht, als eine *Verwandlung* bezeichnen,

indem wir sagen, es verwandle sich dabei Wärme von einer Temperatur in Wärme von einer anderen Temperatur.

Bei dieser Auffassung der Sache können wir das Resultat eines einfachen Kreisprocesses dahin aussprechen, *dass zwei Verwandlungen eingetreten sind*, *eine Verwandlung aus Wärme in Arbeit* (*oder umgekehrt*) *und eine Verwandlung aus Wärme von höherer Temperatur in Wärme von niederer Temperatur* (*oder umgekehrt*), und die Beziehung zwischen diesen beiden Verwandlungen ist es dann, welche durch den zweiten Hauptsatz ausgedrückt werden soll.

Was nun zuerst die Verwandlung aus Wärme von einer Temperatur in Wärme von einer anderen Temperatur anbetrifft, so ist es im Voraus klar, dass dabei die beiden Temperaturen, zwischen denen die Verwandlung vor sich geht, in Betracht kommen müssen. Es entsteht nun aber die weitere Frage, ob bei der Verwandlung aus Wärme in Arbeit oder aus Arbeit in Wärme die Temperatur der betreffenden Wärmemenge auch eine wesentliche Rolle spielt, oder ob bei dieser Verwandlung die Temperatur gleichgültig ist.

Wenn wir die Beantwortung dieser Frage aus der Betrachtung des oben beschriebenen einfachen Kreisprocesses ableiten wollen, so finden wir, dass er für diesen Zweck zu beschränkt ist. Da nämlich in ihm nur zwei als Wärmereservoire dienende Körper vorkommen, so ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die in Arbeit verwandelte Wärme aus einem derselben beiden Körper stamme (oder die durch Arbeit erzeugte Wärme von einem derselben beiden Körper aufgenommen werde), zwischen denen auch der Wärmeübergang stattfindet. Dadurch ist über die Temperatur der in Arbeit verwandelten (oder durch Arbeit erzeugten) Wärme im Voraus die bestimmte Annahme gemacht, dass sie mit einer der beiden beim Wärmeübergange vorkommenden Temperaturen übereinstimme, und diese Beschränkung verhindert es, zu erkennen, welchen Einfluss es auf die Beziehung zwischen den beiden Verwandlungen hat, wenn die erstgenannte Temperatur sich ändert, während die beiden letztgenannten Temperaturen ungeändert bleiben.

Man würde nun zwar die im vorigen Abschnitte auch schon beschriebenen complicirteren Kreisprocesse und die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen benutzen können, um diesen Einfluss zu bestimmen; ich glaube aber, dass es der Klarheit und Uebersichtlichkeit wegen zweckmässiger ist, einen für diese Bestimmung be-

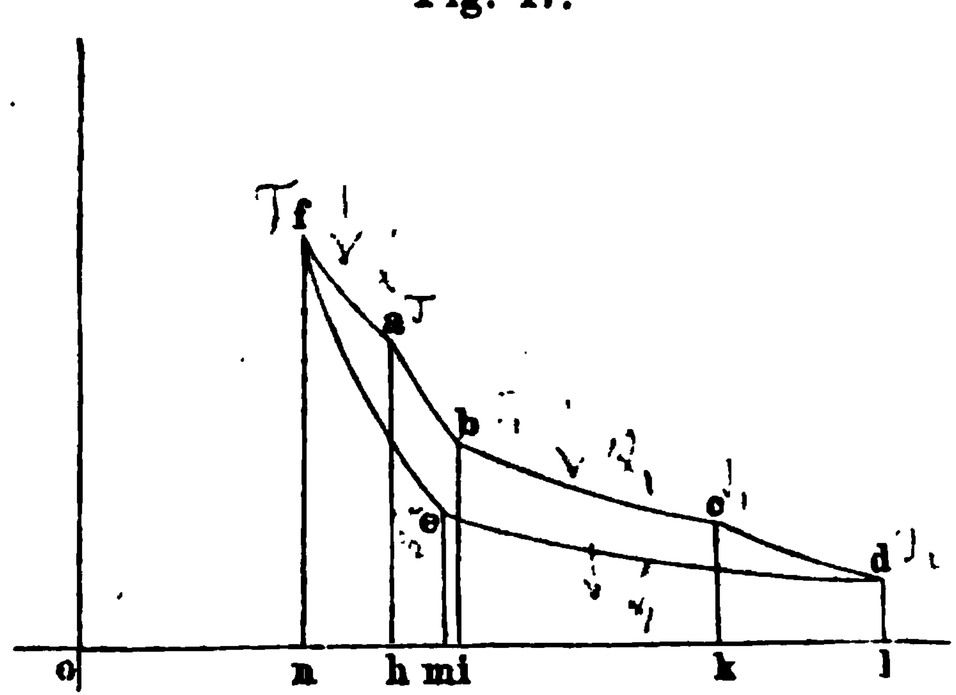
sonders geeigneten Kreisprocess zu betrachten, und mit dessen Hülfe den zweiten Hauptsatz in seiner veränderten Form noch einmal abzuleiten.

§. 2. Ein Kreisprocess von besonderer Form.

Es sei wiederum ein veränderlicher Körper gegeben, dessen Zustand durch sein Volumen und den Druck, unter welchem er steht, vollkommen bestimmt ist, so dass wir seine Veränderungen in der oben beschriebenen Weise graphisch darstellen können. Dabei wollen wir die Figur wieder beispielsweise in der Form construiren, welche sie für ein vollkommenes Gas annimmt, ohne aber bei der Betrachtung selbst eine beschränkende Annahme über die Natur des Körpers zu machen.

Der Körper sei zunächst in dem durch den Punkt a (Fig. 17) angedeuteten Zustande gegeben, in welchem sein Volumen durch

Fig. 17.



die Abscisse oh und der Druck durch die Ordinate ha dargestellt wird. Die durch diese beiden Grössen bestimmte Temperatur sei T. Nun mögen mit dem Körper nach einander folgende Veränderungen vorgenommen werden.

1. Man bringt den Körper von der Temperatur T auf eine andere Temperatur T_1, die beispielsweise niedriger als T sein mag, und zwar dadurch, dass man ihn in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle, so dass er weder Wärme aufnehmen noch abgeben kann, sich ausdehnen lässt. Die Abnahme des Druckes, welche durch die gleichzeitige Volumenzunahme und Temperaturabnahme bedingt wird, sei durch die isentropische Curve ab dar-

gestellt, so dass, wenn die Temperatur des Körpers bis T_1 gesunken ist, sein Volumen und sein Druck in *oi* und *ib* übergegangen sind.

2. Man setzt den veränderlichen Körper mit einem Körper K_1 von der Temperatur T_1 in Verbindung, und lässt ihn dann sich noch weiter ausdehnen, wobei ihm alle durch die Ausdehnung verschwindende Wärme von dem Körper K_1 wieder ersetzt wird. Von dem letzteren sei angenommen, dass seine Temperatur wegen seiner Grösse oder aus irgend einem anderen Grunde durch diese Wärmeabgabe nicht merklich erniedrigt wird, und daher als constant zu betrachten ist. Dann behält auch der veränderliche Körper während der Ausdehnung diese constante Temperatur, und die Druckabnahme wird daher durch eine isothermische Curve *bc* dargestellt. Die hierbei von K_1 abgegebene Wärmemenge heisse Q_1.

3. Man trennt den veränderlichen Körper von dem Körper K_1, und lässt ihn ohne dass er Wärme aufnehmen oder abgeben kann, sich noch weiter ausdehnen, bis seine Temperatur von T_1 auf T_2 gesunken ist. Die hierbei stattfindende Druckabnahme sei durch die isentropische Curve *cd* dargestellt.

4. Man setzt den veränderlichen Körper mit einem Körper K_2 von der constanten Temperatur T_2 in Verbindung und drückt ihn dann zusammen, wobei er alle in ihm entstehende Wärme dem Körper K_2 mittheilt. Diese Zusammendrückung setzt man so lange fort, bis K_2 dieselbe Wärmemenge Q_1 empfangen hat, welche vorher von K_1 abgegeben wurde. Der Druck nimmt hierbei nach der isothermischen Curve *de* zu.

5. Man trennt den veränderlichen Körper von dem Körper K_2, und drückt ihn, ohne dass er Wärme aufnehmen oder abgeben kann, noch so lange zusammen, bis seine Temperatur von T_2 auf den ursprünglichen Werth T gestiegen ist, wobei der Druck nach der isentropischen Curve *ef* zunimmt. Das Volumen *on*, in welches der Körper auf diese Weise gebracht wird, ist kleiner als sein ursprüngliches Volumen *oh*, denn, da bei der Zusammendrückung *de* der zu überwindende Druck und demgemäss die aufzuwendende äussere Arbeit geringer waren, als die entsprechenden Grössen bei der Ausdehnung *bc*, so musste dafür, wenn doch dieselbe Wärmemenge Q_1 entstehen sollte, die Zusammendrückung weiter fortgesetzt werden, als nöthig gewesen wäre, wenn die Zusammendrückungen nur die Ausdehnungen hätten aufheben sollen.

6. Man bringt den veränderlichen Körper mit einem Körper K von der constanten Temperatur T in Verbindung und lässt ihn

sich bis zu seinem ursprünglichen Volumen *oh* ausdehnen, indem ihm K die dabei verschwindende Wärme ersetzt. Die dazu nöthige Wärmemenge heisse Q. Wenn der Körper mit der Temperatur T das Volumen *oh* erreicht, so muss auch der Druck wieder der ursprüngliche sein, und die isothermische Curve, welche die letzte Druckabnahme darstellt, muss daher gerade den Punkt a treffen.

Diese sechs Veränderungen bilden zusammen einen *Kreisprocess*, da der veränderliche Körper sich am Schlusse derselben genau wieder in seinem Anfangszustande befindet. Von den drei Körpern K, K_1 und K_2, welche bei dem ganzen Vorgange nur in sofern in Betracht kommen, als sie als Wärmequellen oder Wärmereservoire dienen, haben die beiden ersten die Wärmemengen Q und Q_1 verloren, und der letzte die Wärmemenge Q_1 empfangen, was man so aussprechen kann, dass Q_1 aus K_1 in K_2 übergegangen und Q verschwunden ist. Die letztere Wärmemenge muss nach dem, was bei dem ersten Hauptsatze gesagt ist, in äussere Arbeit verwandelt sein. Der Gewinn an äusserer Arbeit, welcher während des Kreisprocesses dadurch entstanden ist, dass der Druck bei der Ausdehnung grösser, als bei der Zusammendrückung, und daher die positive Arbeit grösser als die negative war, wird, wie man leicht übersieht, durch den Flächeninhalt der geschlossenen Figur *abcdef* dargestellt. Nennen wir diese Arbeit W, so muss nach Gleichung (5a) des ersten Abschnittes $Q = W$ sein.

Man sieht leicht, dass der hier beschriebene Kreisprocess den am Anfange des Abschnittes III. zur Betrachtung angewandten und in Fig. 8 dargestellten Kreisprocess als speciellen Fall umfasst. Wenn man nämlich in Bezug auf die Temperatur T des Körpers K die specielle Annahme macht, dass sie gleich der Temperatur T_1 des Körpers K_1 sei, so kann man den Körper K ganz fortlassen, und statt seiner den Körper K_1 anwenden, und erhält dann das Resultat, dass von der Wärme, welche der Körper K_1 abgegeben hat, ein Theil in Arbeit verwandelt, und der andere Theil zum Körper K_2 übertragen ist, wie es bei jenem früher angewandten Kreisprocesse war.

Der ganze hier beschriebene Kreisprocess lässt sich auch in umgekehrter Weise ausführen, indem man zuerst in Verbindung mit dem Körper K statt der vorher geschehenen Ausdehnung *fa* jetzt die Zusammendrückung *af* bewirkt, und ebenso, immer unter denselben Umständen, unter denen vorher die entgegengesetzten Veränderungen geschahen, jetzt nach einander die Ausdehnungen

fe und *ed* und die Zusammendrückungen *dc*, *cb* und *ba* geschehen lässt. Hierbei werden offenbar von den Körpern K und K_1 die Wärmemengen Q und Q_1 *aufgenommen* und von K_2 wird die Wärmemenge Q_1 *abgegeben*. Zugleich ist jetzt die negative Arbeit grösser als die positive, so dass der Flächeninhalt der geschlossenen Figur jetzt *verbrauchte* Arbeit darstellt. Das Resultat des umgekehrten Processes ist also, dass die Wärmemenge Q_1 von K_2 nach K_1 übergeführt, und die Wärmemenge Q durch Arbeit erzeugt und an den Körper K abgegeben ist.

§. 3. Aequivalente Verwandlungen.

Um die gegenseitige Abhängigkeit der beiden gleichzeitig eintretenden Verwandlungen kennen zu lernen, wollen wir zuerst annehmen, dass die Temperaturen der drei Wärmereservoire dieselben bleiben, aber die Kreisprocesse, durch welche die Verwandlungen bewirkt werden, verschieden seien, indem entweder verschiedene veränderliche Körper ähnlichen Veränderungen unterworfen werden, oder auch Kreisprocesse von beliebiger anderer Natur stattfinden, welche nur der Bedingung genügen müssen, dass die drei Körper K, K_1 und K_2 die einzigen sind, welche Wärme empfangen oder abgeben, und ausserdem von den beiden letzten der eine so viel empfängt, als der andere abgiebt. Diese verschiedenen Processe können entweder umkehrbar sein, wie der vorher betrachtete, oder nicht, und darnach ändert sich auch das für die Verwandlungen geltende Gesetz. Indessen lässt sich die Aenderung, welche das Gesetz für die nicht umkehrbaren Processe erleidet, leicht nachträglich hinzufügen, und wir wollen uns daher vorläufig auf die Betrachtung der *umkehrbaren* Kreisprocesse beschränken.

Für diese lässt sich aus dem im vorigen Abschnitte aufgestellten Grundsatze beweisen, dass die von K_1 nach K_2 übertragene Wärmemenge Q_1 zu der in Arbeit verwandelten Q bei ihnen allen in einem und demselben Verhältnisse stehen muss. Angenommen nämlich, es gäbe zwei solche Processe, bei denen, wenn Q in beiden gleich genommen wird, Q_1 verschieden wäre, so könnte man nach einander den einen, bei welchem Q_1 kleiner wäre, direct, und den anderen umgekehrt ausführen. Dann würde die Wärmemenge Q, welche durch den ersten Process in Arbeit verwandelt wäre, durch den zweiten wieder in Wärme verwandelt und an den Körper K zurückgegeben werden, und auch im Uebrigen würde sich am Schlusse Alles wie-

der in dem ursprünglichen Zustande befinden, nur dass mehr Wärme von K_2 nach K_1 als in umgekehrter Richtung übergeführt wäre. Es hätte also im Ganzen ein Wärmeübergang von dem kälteren Körper K_2 nach dem wärmeren K_1 stattgefunden, der durch nichts compensirt wäre. Da dieses unserem Grundsatze widerspricht, so muss die obige Annahme unrichtig sein, und Q muss zu Q_1 in einem immer gleichen Verhältnisse stehen.

Von den beiden in einem solchen umkehrbaren Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen, kann jede die andere, wenn diese im entgegengesetzten Sinne genommen wird, ersetzen, so dass, wenn eine Verwandlung der einen Art stattgefunden hat, diese wieder rückgängig werden, und dafür eine Verwandlung der anderen Art eintreten kann, ohne dass dazu irgend eine sonstige bleibende Veränderung nöthig ist. Sei z. B. auf irgend eine Weise die Wärmemenge Q aus Arbeit entstanden und von dem Körper K aufgenommen, so kann man sie durch den oben beschriebenen Kreisprocess dem Körper K wieder entziehen, und in Arbeit zurück verwandeln, aber es geht dafür die Wärmemenge Q_1 von dem Körper K_1 zu K_2 über. Sei ferner die Wärmemenge Q_1 vorher von K_1 zu K_2 übergegangen, so kann man diese durch die umgekehrte Ausführung des obigen Kreisprocesses wieder nach K_1 zurückschaffen, indem man dafür die Wärmemenge Q von der Temperatur des Körpers K aus Arbeit entstehen lässt.

Man sieht also, dass diese beiden Verwandlungsarten als Vorgänge von gleicher Natur zu betrachten sind, und zwei solche Verwandlungen, die sich in der erwähnten Weise gegenseitig ersetzen können, wollen wir *äquivalent* nennen.

§. 4. Aequivalenzwerthe der Verwandlungen.

Es kommt nun darauf an, das Gesetz zu finden, nach welchem man die Verwandlungen als mathematische Grössen darstellen muss, damit sich die Aequivalenz zweier Verwandlungen aus der Gleichheit ihrer Werthe ergiebt. Der so bestimmte mathematische Werth einer Verwandlung möge ihr *Aequivalenzwerth* heissen.

Was zunächst den Sinn anbetrifft, in welchem jede Verwandlungsart als positiv zu rechnen ist, so kann man diesen bei der einen willkürlich wählen, bei der anderen aber ist er dadurch gleich mit bestimmt, indem man offenbar eine solche Verwandlung als positiv annehmen muss, welche einer positiven Verwand-

lung der anderen Art äquivalent ist. Wir wollen im Folgenden *die Verwandlung aus Arbeit in Wärme, und demgemäss den Uebergang von Wärme von höherer zu niederer Temperatur als positive Verwandlungen rechnen.* Man wird später sehen, wodurch diese Wahl des positiven und negativen Sinnes sich vor der entgegengesetzten empfiehlt.

In Bezug auf die Grösse der Aequivalenzwerthe ist zunächst klar, dass der Werth einer Verwandlung aus Arbeit in Wärme der Menge der entstandenen Wärme proportional sein muss, und ausserdem nur noch von ihrer Temperatur abhängen kann. Man kann also den Aequivalenzwerth der Entstehung der Wärmemenge Q von der Temperatur T aus Arbeit ganz allgemein durch den Ausdruck

$$Q \cdot f(T)$$

darstellen, worin $f(T)$ eine für alle Fälle gleiche Temperaturfunction ist. Wenn in dieser Formel Q negativ wird, so wird dadurch ausgedrückt, dass die Wärmemenge Q nicht aus Arbeit in Wärme sondern aus Wärme in Arbeit verwandelt ist.

Ebenso muss der Werth des Ueberganges der Wärmemenge Q von der Temperatur T_1 zur Temperatur T_2 der übergehenden Wärmemenge proportional sein, und kann ausserdem nur noch von den beiden Temperaturen abhängen. Wir können ihn also allgemein durch den Ausdruck

$$Q \cdot F(T_1, T_2)$$

darstellen, worin $F(T_1, T_2)$ ebenfalls eine für alle Fälle gleiche Function der beiden Temperaturen ist, welche wir zwar noch nicht näher kennen, von der aber soviel im Voraus klar ist, dass sie durch Verwechslung der beiden Temperaturen ihr Vorzeichen umkehren muss, ohne ihren numerischen Werth zu ändern, so dass man setzen kann:

$$(1) \qquad F(T_2, T_1) = - F(T_1, T_2).$$

Um diese beiden Ausdrücke mit einander in Beziehung zu bringen, haben wir die Bedingung, dass in jedem umkehrbaren Kreisprocesse der oben angegebenen Art die beiden darin vorkommenden Verwandlungen gleich gross, aber von entgegengesetzten Vorzeichen sein müssen, so dass ihre algebraische Summe Null ist. Wählen wir also zunächst den Process, welcher oben vollständig beschrieben ist, so wurde dabei die Wärmemenge Q von der Temperatur T in Arbeit verwandelt, was als Aequivalenz-

werth $-Q.f(T)$ giebt, und die Wärmemenge Q_1 von der Temperatur T_1 zu T_2 übergeführt, was als Aequivalenzwerth $Q_1.F(T_1, T_2)$ giebt, und es muss also die Gleichung

$$-Q.f(T) + Q_1.F(T_1, T_2) = 0 \tag{2}$$

gelten.

Denken wir uns nun einen eben solchen Process umgekehrt ausgeführt, und zwar in der Weise, dass die Körper K_1 und K_2 und die zwischen ihnen übergehende Wärmemenge Q_1 dieselben bleiben, wie vorher, aber für den Körper K von der Temperatur T ein anderer Körper K' von der Temperatur T' angewandt wird, und nennen wir die in diesem Falle durch Arbeit erzeugte Wärmemenge Q', so haben wir, entsprechend der vorigen, die Gleichung:

$$Q'.f(T') + Q_1.F(T_2, T_1) = 0. \tag{3}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen unter Berücksichtigung von (1) ergiebt sich:

$$-Q.f(T) + Q'.f(T') = 0. \tag{4}$$

Sieht man nun, was natürlich gestattet ist, diese beiden nach einander ausgeführten Kreisprocesse zusammen als Einen Kreisprocess an, so kommen in diesem die beiden Wärmeübergänge zwischen K_1 und K_2 nicht mehr in Betracht, da sie sich gerade gegenseitig aufgehoben haben, und es bleiben also nur die Verwandlung der von K abgegebenen Wärmemenge Q in Arbeit, und die Entstehung der von K' aufgenommenen Wärmemenge Q' aus Arbeit übrig. Diese beiden Verwandlungen von *gleicher* Art können aber auch so zerlegt und zusammengesetzt werden, dass sie wieder als zwei Verwandlungen von *verschiedener* Art erscheinen. Hält man nämlich einfach an der Thatsache fest, dass der eine Körper K die Wärmemenge Q verloren und der andere K' die Menge Q' empfangen hat, so kann man den Theil, welcher in beiden Mengen gemeinsam vorkommt, ohne Weiteres als von K zu K' übergeführt betrachten, und braucht nur für den übrigen Theil, um welchen die eine Menge grösser ist, als die andere, die Verwandlung aus Wärme in Arbeit (oder umgekehrt) als solche zu berücksichtigen. Sei z. B. die Temperatur T höher als T', so hat der auf diese Weise angenommene Wärmeübergang die Richtung vom wärmeren zum kälteren Körper, und ist somit positiv. Demnach muss die andere Verwandlung negativ, also eine Verwandlung aus Wärme in Arbeit sein, woraus folgt, dass die von K ab-

gegebene Wärmemenge Q grösser als die von K' empfangene Q' ist. Zerlegen wir nun Q in die beiden Theile

$$Q' \text{ und } Q - Q',$$

so ist der erstere die von K zu K' übergeführte, und der letztere die in Arbeit verwandelte Wärmemenge.

Bei dieser Auffassungsweise erscheint der Doppelprocess als ein Process von derselben Art, wie die beiden Processe, aus denen er besteht, denn der Umstand, dass die in Arbeit verwandelte Wärme nicht von einem dritten Körper, sondern von einem derjenigen beiden Körper herstammt, zwischen denen der Wärmeübergang stattfindet, macht keinen wesentlichen Unterschied, da die Temperatur der in Arbeit verwandelten Wärme beliebig ist, und daher auch denselben Werth haben kann, wie die Temperatur eines jener beiden Körper, in welchem Falle der dritte Körper überflüssig ist. Es muss daher für die beiden Wärmemengen Q' und $Q - Q'$ eine Gleichung von derselben Form gelten wie (2), nämlich:

$$-(Q - Q') \, . \, f(T) + Q' \, . \, F(T, T') = 0.$$

Eliminirt man hieraus vermittelst (4) die Grösse Q, und hebt dann die Grösse Q' fort, so erhält man die Gleichung

$$F(T, T') = f(T') - f(T), \tag{5}$$

durch welche, da die Temperaturen T und T' willkürlich sind, die für die zweite Verwandlungsart geltende Function von zwei Temperaturen ganz allgemein auf die für die erste Art geltende Function von Einer Temperatur zurückgeführt ist.

Für die letztere Function wollen wir zur Abkürzung ein einfacheres Zeichen einführen. Dabei ist es aber aus einem Grunde, der später ersichtlich werden wird, zweckmässig, nicht die Function selbst, sondern ihren reciproken Werth durch das neue Zeichen darzustellen. Wir wollen daher setzen:

$$\tau = \frac{1}{f(T)} \text{ oder } f(T) = \frac{1}{\tau}, \tag{6}$$

so dass nun τ die unbekannte Temperaturfunction ist, welche in den Aequivalenzwerthen vorkommt. Wenn von dieser Function besondere Werthe auszudrücken sind, welche den Temperaturen T_1, T_2 etc. oder T', T'' etc. entsprechen, so soll dieses einfach dadurch geschehen, dass die Indices oder Accente an τ selbst gesetzt werden, also τ_1, τ_2 etc. oder τ', τ'' etc. Dann lautet die Gleichung (5):

$$F(T, T') = \frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau}.$$

Hiernach lässt sich der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, welchen man, wie ich glaube, in dieser Form passend den *Satz von der Aequivalenz der Verwandlungen* nennen kann, folgendermaassen aussprechen.

Nennt man zwei Verwandlungen, welche sich, ohne dazu eine sonstige bleibende Veränderung zu erfordern, gegenseitig ersetzen können, äquivalent, so hat die Entstehung der Wärmemenge Q von der Temperatur T aus Arbeit den Aequivalenzwerth

$$\frac{Q}{\tau},$$

und der Uebergang der Wärmemenge Q von der Temperatur T_1 zur Temperatur T_2 den Aequivalenzwerth

$$Q\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right),$$

worin τ eine von der Art des Processes, durch welchen die Verwandlung geschieht, unabhängige Temperaturfunction ist.

§. 5. Gesammtwerth aller in einem Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen.

Schreibt man den letzten im vorigen Paragraphen angeführten Ausdruck in der Form

$$\frac{Q}{\tau_2} - \frac{Q}{\tau_1},$$

so sieht man, dass der Uebergang der Wärmemenge Q von der Temperatur T_1 zur Temperatur T_2 denselben Aequivalenzwerth hat, wie eine doppelte Verwandlung der ersten Art, nämlich die Verwandlung der Menge Q aus Wärme von der Temperatur T_1 in Arbeit und aus Arbeit in Wärme von der Temperatur T_2. Eine Erörterung der Frage, in wieweit diese äussere Uebereinstimmung in dem Wesen der Vorgänge selbst begründet ist, würde hier noch nicht am Orte sein; jedenfalls aber kann man bei der mathematischen Bestimmung des Aequivalenzwerthes jeden Wärmeübergang, gleichgültig wie er geschehen ist, als eine solche Combination von zwei entgegengesetzten Verwandlungen der ersten Art betrachten.

Durch diese Regel wird es leicht, für jeden noch so complicirten Kreisprocess, in welchem beliebig viele Verwandlungen der

beiden Arten vorkommen, den mathematischen Ausdruck abzuleiten, welcher den Gesammtwerth aller dieser Verwandlungen darstellt. Hiernach braucht man nämlich bei einer Wärmemenge, welche ein Wärmereservoir abgiebt, nicht erst zu untersuchen, welcher Theil davon in Arbeit verwandelt wird, und wo der übrige Theil hingeht, sondern kann statt dessen bei allen in dem Kreisprocesse vorkommenden Wärmereservoiren jede abgegebene Wärmemenge im Ganzen als in Arbeit verwandelt, und jede aufgenommene als aus Arbeit entstanden in Rechnung bringen. Nehmen wir also an, dass als Wärmereservoire die Körper K_1, K_2, K_3 etc. mit den Temperaturen T_1, T_2, T_3 etc. vorkommen, und nennen wir die Wärmemengen, welche sie während des Kreisprocesses abgegeben haben, Q_1, Q_2, Q_3 etc., wobei wir jetzt aufgenommene Wärmemengen als abgegebene *negative* Wärmemengen rechnen wollen[1]), so wird der Gesammtwerth aller Verwandlungen, welcher mit N bezeichnet werden möge, folgendermaassen dargestellt:

$$N = -\frac{Q_1}{\tau_1} - \frac{Q_2}{\tau_2} - \frac{Q_3}{\tau_3} - \text{etc.},$$

oder unter Anwendung eines Summenzeichens:

$$N = -\sum \frac{Q}{\tau}. \tag{7}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Temperaturen der Körper K_1, K_2, K_3 etc. constant, oder wenigstens so nahe constant seien, dass ihre Aenderungen vernachlässigt werden können. Wenn aber einer der Körper entweder durch die Aufnahme der Wärmemenge Q selbst, oder aus irgend einem anderen Grunde seine Temperatur während des Processes so bedeutend ändert, dass diese Aenderung Berücksichtigung erfordert, so muss man für jedes aufgenommene Wärmeelement dQ die Temperatur anwenden, welche der Körper bei seiner Aufnahme gerade hat, wodurch natürlich eine Integration nöthig wird. Nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, dass dieser Umstand bei allen Körpern stattfinde, so erhält die vorige Gleichung folgende Gestalt:

---

[1]) Diese Wahl des positiven und negativen Sinnes der Wärmemengen stimmt mit der im vorigen Abschnitte getroffenen überein, wo wir eine von dem veränderlichen Körper aufgenommene Wärmemenge als positiv und eine von ihm abgegebene als negativ rechneten, denn eine von einem Wärmereservoir abgegebene Wärmemenge ist von dem veränderlichen Körper aufgenommen und umgekehrt.

(8) $$N = -\int \frac{dQ}{\tau},$$

worin das Integral auf alle von den verschiedenen Körpern abgegebenen Wärmemengen zu beziehen ist.

§. 6. Beweis, dass in einem umkehrbaren Kreisprocesse der Gesammtwerth aller Verwandlungen gleich Null sein muss.

Wenn der in Rede stehende Kreisprocess *umkehrbar* ist, so lässt sich, wie complicirt er auch sei, beweisen, *dass die in ihm vorkommenden Verwandlungen sich gegenseitig gerade aufheben müssen, so dass ihre algebraische Summe gleich Null ist.*

Angenommen nämlich, es sei dieses nicht der Fall, sondern die algebraische Summe der Verwandlungen habe einen von Null verschiedenen Werth, dann denke man sich folgendes Verfahren angewandt. Man theile alle vorkommenden Verwandlungen in zwei Theile, von denen der erste die algebraische Summe Null hat, und der zweite nur aus Verwandlungen von gleichen Vorzeichen besteht. Die Verwandlungen des ersten Theiles denke man sich in lauter Paare von je zwei gleich grossen aber den Vorzeichen nach entgegengesetzten Verwandlungen zerlegt. Wenn alle vorhandenen Wärmereservoire constante Temperaturen haben, so dass in dem Kreisprocesse nur eine endliche Anzahl von bestimmten Temperaturen vorkommt, so ist auch die Anzahl der Paare, die man zu bilden hat, eine endliche; sollten aber die Temperaturen der Wärmereservoire sich stetig ändern, so dass unendlich viele verschiedene Temperaturen vorkommen, und daher die abgegebenen und aufgenommenen Wärmemengen in Elemente zerlegt werden müssen, so wird die Anzahl der Paare, die man zu bilden hat, unendlich gross. Das macht indessen dem Principe nach keinen Unterschied. Die beiden Verwandlungen jedes Paares lassen sich nun durch einen oder zwei Kreisprocesse von der in §. 2 beschriebenen Form rückgängig machen.

Seien nämlich erstens die beiden gegebenen Verwandlungen von verschiedener Art, sei z. B. die Wärmemenge Q von der Temperatur T in Arbeit verwandelt, und die Wärmemenge Q_1 aus einem Körper K_1 von der Temperatur T_1 in einen Körper K_2 von der Temperatur T_2 übertragen (wobei wir unter Q und Q_1 die

absoluten Werthe der Wärmemengen verstehen wollen), und sei angenommen, dass die Grössen der beiden Wärmemengen unter einander in der Beziehung stehen, dass man folgende der Gleichung (2) entsprechende Gleichung habe:

$$-\frac{Q}{\tau}+Q_1\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)=0.$$

Dann denke man sich den oben beschriebenen Kreisprocess in umgekehrter Weise ausgeführt, wodurch die Wärmemenge Q von der Temperatur T aus Arbeit entsteht, und eine andere Wärmemenge aus dem Körper K_2 in den Körper K_1 übertragen wird. Diese letztere Wärmemenge muss dann gerade gleich der in der vorigen Gleichung stehenden Wärmemenge Q_1 sein, und die gegebenen Verwandlungen sind somit rückgängig gemacht.

Sei ferner eine Verwandlung aus Arbeit in Wärme und eine aus Wärme in Arbeit gegeben, sei z. B. die Wärmemenge Q von der Temperatur T durch Arbeit erzeugt, und die Wärmemenge Q' von der Temperatur T' in Arbeit verwandelt, und stehen diese beiden in der Beziehung zu einander, dass man habe:

$$\frac{Q}{\tau}-\frac{Q'}{\tau'}=0.$$

Dann denke man sich zuerst den oben beschriebenen Kreisprocess ausgeführt, wodurch die Wärmemenge Q von der Temperatur T in Arbeit verwandelt, und eine andere Wärmemenge Q_1 aus einem Körper K_1 in einen anderen Körper K_2 übertragen wird. Darauf denke man sich einen zweiten Kreisprocess in umgekehrter Weise ausgeführt, in welchem die zuletzt genannte Wärmemenge Q_1 wieder von K_2 nach K_1 zurücktransportirt werde, und ausserdem eine Wärmemenge von der Temperatur T' aus Arbeit entstehe. Diese Verwandlung aus Arbeit in Wärme muss dann, abgesehen vom Vorzeichen, der vorigen Verwandlung aus Wärme in Arbeit äquivalent sein, da sie beide einem und demselben Wärmeübergange äquivalent sind. Die aus Arbeit entstandene Wärmemenge von der Temperatur T' muss daher eben so gross sein, wie die in der vorigen Gleichung stehende Wärmemenge Q', und die gegebenen Verwandlungen sind somit rückgängig gemacht.

Seien endlich zwei Wärmeübergänge gegeben, sei z. B. die Wärmemenge Q_1 aus einem Körper K_1 von der Temperatur T_1 in einen Körper K_2 von der Temperatur T_2 und die Wärmemenge Q_1' aus einem Körper K_2' von der Temperatur T_2' in einen Körper

K_1' von der Temperatur T_1' übergegangen, und stehen diese zu einander in der Beziehung, dass man habe:

$$Q_1\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)+Q_1'\left(\frac{1}{\tau_1'}-\frac{1}{\tau_2'}\right)=0.$$

Dann denke man sich zwei Kreisprocesse ausgeführt, in deren einem die Wärmemenge Q_1 von K_2 nach K_1 übertragen, und dabei die Wärmemenge Q von der Temperatur T durch Arbeit erzeugt werde, während im zweiten dieselbe Wärmemenge Q wieder in Arbeit verwandelt, und dabei eine andere Wärmemenge von K_1' nach K_2' übertragen werde. Diese andere Wärmemenge muss dann gerade gleich der gegebenen Wärmemenge Q_1' sein, und die beiden gegebenen Wärmeübergänge sind somit rückgängig gemacht.

Wenn durch Operationen dieser Art alle Verwandlungen des ersten Theiles rückgängig gemacht sind, so bleiben nur die den Vorzeichen nach übereinstimmenden Verwandlungen des zweiten Theiles ohne irgend eine sonstige Veränderung übrig.

Wären nun diese Verwandlungen *negativ*, so könnten sie nur Verwandlungen aus Wärme in Arbeit und Wärmeübergänge von niederer zu höherer Temperatur sein, und von diesen liessen sich noch die Verwandlungen der ersteren Art durch Verwandlungen der letzteren Art ersetzen. Wenn nämlich eine Wärmemenge Q von der Temperatur T in Arbeit verwandelt ist, so braucht man nur den in §. 2 beschriebenen Kreisprocess in umgekehrter Weise auszuführen, wobei die Wärmemenge Q von der Temperatur T durch Arbeit erzeugt, und zugleich eine andere Wärmemenge Q_1 aus einem Körper K_2 von der Temperatur T_2 in einen Körper K_1 von der höheren Temperatur T_1 übertragen wird. Dadurch wird die gegebene Verwandlung aus Wärme in Arbeit rückgängig gemacht und durch den Wärmeübergang von K_2 nach K_1 ersetzt. Nach Anwendung dieses Verfahrens würden schliesslich nur Wärmeübergänge von niederer zu höherer Temperatur übrig bleiben, die durch nichts compensirt wären. Da dieses unserem Grundsatze widerspricht, so muss die Voraussetzung, dass die Verwandlungen des zweiten Theiles negativ seien, unrichtig sein.

Wären ferner jene Verwandlungen *positiv*, so würde nun die Bedingung, dass der in Rede stehende Kreisprocess *umkehrbar* sein soll, in Betracht zu ziehen sein. Dächte man sich nämlich den ganzen Kreisprocess umgekehrt ausgeführt, so würden dabei alle in ihm vorkommenden Verwandlungen das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, und jene Verwandlungen des zweiten Theiles

würden somit negativ werden. Dadurch würde man abermals zu dem obigen mit unserem Grundsatze unvereinbaren Falle gelangen.

Da hiernach die Verwandlungen des zweiten Theiles weder positiv noch negativ sein können, so können sie überhaupt nicht existiren, und der erste Theil, dessen algebraische Summe Null ist, umfasst somit alle in dem Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen. Demnach können wir in der Gleichung (8) $N = 0$ setzen, und erhalten dadurch als analytischen Ausdruck des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie für umkehrbare Kreisprocesse die Gleichung:

$$\text{(VII.)} \qquad \int \frac{dQ}{\tau} = 0.$$

§. 7. Die Temperaturen der vorkommenden Wärmemengen und die Entropie.

Bei der vorstehenden Ableitung der Gleichung (VII.) wurden die Temperaturen der in Betracht kommenden Wärmemengen nach den Wärmereservoiren bestimmt, aus welchen sie herstammen, oder in welche sie übergehen. Betrachtet man nun aber einen Kreisprocess, welcher darin besteht, dass ein Körper eine Reihe von Zustandsänderungen durchmacht, und zuletzt wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, so muss dieser veränderliche Körper, wenn er mit einem Wärmereservoir zur Aufnahme oder Abgabe von Wärme in Verbindung gesetzt wird, dieselbe Temperatur haben, wie das Wärmereservoir, weil nur in diesem Falle die Wärme eben so gut von dem Wärmereservoir zu dem veränderlichen Körper, wie in umgekehrter Richtung übergehen kann, was für die Umkehrbarkeit des Kreisprocesses erforderlich ist. Absolut kann diese Bedingung zwar nicht erfüllt sein, da bei ganz gleicher Temperatur überhaupt kein Wärmeübergang eintreten würde, aber man kann sie wenigstens als so nahe erfüllt annehmen, dass die kleinen noch vorhandenen Temperaturdifferenzen in der Rechnung zu vernachlässigen sind.

In diesem Falle ist es natürlich einerlei, ob man die Temperatur einer übergehenden Wärmemenge der Temperatur des Wärmereservoirs oder der augenblicklichen Temperatur des veränderlichen Körpers gleichsetzen will, da beide unter einander übereinstimmen. Hat man aber einmal die letztere Wahl getroffen, und festgesetzt,

dass bei der Bildung der Gleichung (VII.) für jedes Wärmeelement dQ diejenige Temperatur in Rechnung gebracht werden soll, welche der veränderliche Körper bei seiner Aufnahme gerade hat, so kann man nun den Wärmereservoiren auch beliebige andere Temperaturen zuschreiben, ohne dass dadurch der Ausdruck $\int \frac{dQ}{\tau}$ irgend eine Aenderung erleidet. Bei dieser Bedeutung der vorkommenden Temperaturen kann man also die Gleichung (VII.) als gültig betrachten, ohne sich darum zu bekümmern, wo die von dem veränderlichen Körper aufgenommene Wärme herkommt oder die von ihm abgegebene Wärme hingeht, wenn der Process nur im Uebrigen umkehrbar ist.

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck $\frac{dQ}{\tau}$, wenn er in dem eben angegebenen Sinne verstanden wird, ist das Differential einer auf den Zustand des Körpers bezüglichen Grösse, und zwar einer Grösse, welche vollkommen bestimmt ist, sobald der augenblickliche Zustand bekannt ist, ohne dass man den Weg, auf welchem der Körper in denselben gelangt ist, zu kennen braucht, denn nur in diesem Falle kann das Integral jedesmal gleich Null werden, so oft der Körper nach beliebigen Veränderungen wieder in seinen Anfangszustand zurückkommt. Ich habe bei einer anderen Gelegenheit[1]), nach Einführung einer gewissen Erweiterung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen, den Vorschlag gemacht, diese Grösse nach dem griechischen Worte τροπή, Verwandlung, die *Entropie* des Körpers zu nennen. Die vollständige Erklärung dieses Namens und der Nachweis, dass er die Bedeutung der betreffenden Grösse richtig ausdrückt, kann freilich erst an einer späteren Stelle gegeben werden, nachdem die eben erwähnte Erweiterung besprochen ist, indessen wollen wir der Bequemlichkeit wegen diesen Namen schon jetzt anwenden.

Bezeichnen wir die Entropie des Körpers mit S, so können wir setzen:

$$\frac{dQ}{\tau} = dS,$$

oder umgeschrieben:

(VIII.) $$dQ = \tau dS.$$

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 125, S. 390.

§. 8. Die Temperaturfunction τ.

Um die Temperaturfunction τ zu bestimmen, wenden wir dasselbe Verfahren an, welches wir im vorigen Abschnitte, §. 7, angewandt haben, um die Function $\Phi(T_1, T_2)$ zu bestimmen. Da nämlich die Function τ von der Natur des beim Kreisprocesse angewandten veränderlichen Körpers unabhängig ist, so kommt es nur darauf an, bei einem mit irgend einem Körper ausgeführten Kreisprocesse ihre Form zu bestimmen. Wir wählen dazu als veränderlichen Körper wieder ein vollkommenes Gas und denken uns mit demselben, wie in jenem Paragraphen, einen einfachen Kreisprocess ausgeführt, in welchem das Gas nur bei Einer Temperatur, welche wir T nennen wollen, Wärme aufnimmt, und bei einer anderen Temperatur, welche T_1 heissen möge, Wärme abgiebt. Die beiden Wärmemengen, welche in diesem Falle aufgenommen und abgegeben werden, und deren absolute Werthe mit Q und Q_1 bezeichnet werden mögen, stehen, gemäss der Gleichung (8) des vorigen Abschnittes, in folgendem Verhältnisse zu einander:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{T}{T_1}. \tag{9}$$

Nun erhalten wir aber andererseits, wenn wir die Gleichung (VII.) auf diesen einfachen Kreisprocess anwenden, indem wir dabei die Abgabe der Wärmemenge Q_1 als Aufnahme der negativen Wärmemenge $-Q_1$ in Rechnung bringen, die Gleichung:

$$\frac{Q}{\tau} - \frac{Q_1}{\tau_1} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{\tau}{\tau_1}. \tag{10}$$

Aus der Vereinigung der Gleichungen (9) und (10) ergiebt sich:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{T}{T_1}$$

oder:

$$\tau = \frac{\tau_1}{T_1} T. \tag{11}$$

Betrachten wir nun T als eine beliebige und T_1 als eine gegebene Temperatur, so können wir die vorige Gleichung so schreiben:

$$\tau = T \,.\, \text{Const.}, \tag{12}$$

und die Temperaturfunction τ ist somit bis auf einen constanten Factor bestimmt.

Welchen Werth wir dem constanten Factor zuschreiben wollen, ist gleichgültig, da er sich aus der Gleichung (VII.) fortheben lässt und somit auf die mit dieser Gleichung angestellten Rechnungen ohne Einfluss ist. Wir wollen daher den bequemsten Werth, nämlich die Einheit, wählen, wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$\tau = T. \tag{13}$$

Demnach ist die Temperaturfunction τ nichts weiter, als die absolute Temperatur selbst.

Da die hier ausgeführte Bestimmung der Function τ sich auf die für Gase abgeleiteten Gleichungen stützt, so bildet die bei der Behandlung der Gase gemachte Nebenannahme, dass ein vollkommenes Gas, wenn es sich bei constanter Temperatur ausdehnt, nur so viel Wärme verschluckt, wie zu der dabei gethanen äussern Arbeit verbraucht wird, eine der Grundlagen, auf welchen diese Bestimmung beruht. Sollte Jemand wegen dieses Grundes Bedenken tragen, diese Bestimmung als vollständig zuverlässig anzuerkennen, so könnte er in den Gleichungen (VII.) und (VIII.) τ als Zeichen einer noch unbestimmten Temperaturfunction beibehalten, und die Gleichungen in dieser Form anwenden. Ein solches Bedenken würde aber meiner Ansicht nach nicht gerechtfertigt sein, und ich werde daher im Folgenden immer T an die Stelle von τ setzen. Dadurch gehen die Gleichungen (VII.) und (VIII.) in diejenigen über, welche schon im vorigen Abschnitte unter (V.) und (VI.) gegeben wurden, nämlich:

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

$$dQ = TdS.$$

ABSCHNITT V.

Umformungen der beiden Hauptgleichungen.

§. 1. Einführung von Veränderlichen, welche den Zustand des Körpers bestimmen.

In den bisherigen allgemeinen Betrachtungen sind wir dahin gelangt, die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie durch zwei sehr einfache, unter (III.) und (VI.) gegebene Gleichungen auszudrücken, nämlich:

$$\text{(III.)} \qquad dQ = dU + dW,$$

$$\text{(VI.)} \qquad dQ = TdS.$$

Wir wollen nun mit diesen Gleichungen einige Umformungen vornehmen, durch welche sie für weitere Rechnungen bequem werden.

Beide Gleichungen beziehen sich auf eine unendlich kleine Zustandsänderung eines Körpers, und zwar ist bei der letzteren Gleichung vorausgesetzt, dass die Zustandsänderung in umkehrbarer Weise vor sich gehe. Für die Gültigkeit der ersteren Gleichung ist diese Voraussetzung zwar nicht nothwendig, wir wollen sie aber auch bei ihr machen und in den hier folgenden Rechnungen ebenso, wie bisher, annehmen, dass wir es nur mit *umkehrbaren* Veränderungen zu thun haben.

Den Zustand des betrachteten Körpers denken wir uns durch irgend welche Grössen bestimmt, und zwar wollen wir für jetzt annehmen, dass *zwei* Grössen dazu ausreichen. Fälle, welche besonders oft vorkommen, sind die, wo der Zustand des Körpers

durch seine Temperatur und sein Volumen, oder durch seine Temperatur und den Druck, unter welchem er steht, oder endlich durch sein Volumen und den Druck bestimmt ist. Wir wollen uns aber nicht gleich an besondere Grössen binden, sondern wollen zunächst annehmen, der Zustand des Körpers sei durch zwei beliebige Grössen, welche x und y heissen mögen, bestimmt, und diese Grössen wollen wir in den Rechnungen als die unabhängigen Veränderlichen betrachten. Natürlich steht es uns dann bei specielleren Anwendungen immer frei, unter einer dieser Veränderlichen oder unter beiden eine oder zwei der vorher genannten Grössen, Temperatur, Volumen und Druck, zu verstehen.

Wenn die Grössen x und y den Zustand des Körpers bestimmen, so können wir in den obigen Gleichungen die Energie U und die Entropie S als Functionen dieser Veränderlichen behandeln. Ebenso ist die Temperatur T, sofern sie nicht selbst eine der Veränderlichen bildet, als Function der beiden Veränderlichen anzusehen. Die Grössen W und Q dagegen lassen sich, wie schon früher erwähnt, nicht so einfach bestimmen, sondern müssen in anderer Weise behandelt werden.

Die Differentialcoefficienten dieser Grössen, welche wir folgendermaassen bezeichnen wollen:

$$\frac{dW}{dx} = m; \qquad \frac{dW}{dy} = n \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{dx} = M; \qquad \frac{dQ}{dy} = N, \tag{2}$$

sind bestimmte Functionen von x und y. Wenn nämlich festgesetzt wird, dass die Veränderliche x in $x + dx$ übergehen soll, während y unverändert bleibt, und dass diese Zustandsänderung des Körpers in umkehrbarer Weise geschehen soll, so handelt es sich um einen vollkommen bestimmten Vorgang, und es muss daher auch die dabei gethane äussere Arbeit eine bestimmte sein, woraus weiter folgt, dass der Bruch $\frac{dW}{dx}$ ebenfalls einen bestimmten Werth haben muss. Ebenso verhält es sich, wenn festgesetzt wird, dass y in $y + dy$ übergehen soll, während x constant bleibt. Wenn hiernach die Differentialcoëfficienten der äusseren Arbeit W bestimmte Functionen von x und y sind, so muss zufolge der Gleichung (III.) auch von den Differentialcoëfficienten der vom Körper aufgenommenen Wärme Q dasselbe gelten, dass auch sie bestimmte Functionen von x und y sind.

Bilden wir nun aber für dW und dQ ihre Ausdrücke in dx und dy, indem wir unter Vernachlässigung der Glieder, welche in Bezug auf dx und dy von höherer Ordnung sind, schreiben:

$$dW = mdx + ndy \tag{3}$$

$$dQ = Mdx + Ndy, \tag{4}$$

so erhalten wir dadurch zwei vollständige Differentialgleichungen, welche sich nicht integriren lassen, so lange die Veränderlichen x und y von einander unabhängig sind, indem die Grössen m, n und M, N der Bedingungsgleichung der Integrabilität, nämlich:

$$\frac{dm}{dy} = \frac{dn}{dx} \text{ resp. } \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

nicht genügen. Die Grössen W und Q gehören also zu denjenigen, welche in der mathematischen Einleitung besprochen wurden, deren Eigenthümlichkeit darin besteht, dass zwar ihre Differentialcoëfficienten bestimmte Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen sind, dass sie selbst aber nicht durch solche Functionen dargestellt werden können, sondern sich erst dann bestimmen lassen, wenn noch eine weitere Beziehung zwischen den Veränderlichen gegeben und dadurch der Weg der Veränderungen vorgeschrieben ist.

§. 2. Elimination der Grössen U und S aus den beiden Hauptgleichungen.

Kehren wir nun zur Gleichung (III.) zurück und setzen darin für dW und dQ die Ausdrücke (3) und (4), und zerlegen ebenso dU in seine beiden auf dx und dy bezüglichen Theile, so lautet die Gleichung:

$$Mdx + Ndy = \left(\frac{dU}{dx} + m\right) dx + \left(\frac{dU}{dy} + n\right) dy.$$

Da diese Gleichung für alle beliebigen Werthe von dx und dy gültig sein muss, so zerfällt sie in folgende zwei:

$$M = \frac{dU}{dx} + m$$

$$N = \frac{dU}{dy} + n.$$

Differentiiren wir die erste dieser Gleichungen nach y und die zweite nach x, so erhalten wir:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2 U}{dx\,dy} + \frac{dm}{dy}$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2 U}{dy\,dx} + \frac{dn}{dx}.$$

Nun ist auf U der für jede Function von zwei unabhängigen Veränderlichen geltende Satz anzuwenden, dass, wenn man sie nach den beiden Veränderlichen differentiirt, die Ordnung der Differentiationen gleichgültig ist, so dass man setzen kann:

$$\frac{d^2 U}{dx\,dy} = \frac{d^2 U}{dy\,dx}.$$

Wenn man unter Berücksichtigung dieser letzten Gleichung die zweite der beiden vorigen Gleichungen von der ersten abzieht, so kommt:

$$(5) \qquad \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \frac{dm}{dy} - \frac{dn}{dx}.$$

In ähnlicher Weise wollen wir nun auch die Gleichung (VI.) behandeln. Setzen wir in derselben für dQ und dS die vollständigen Differentialausdrücke, so lautet sie:

$$Mdx + Ndy = T\left(\frac{dS}{dx}dx + \frac{dS}{dy}dy\right),$$

oder, wenn wir noch mit T dividiren:

$$\frac{M}{T}dx + \frac{N}{T}dy = \frac{dS}{dx}dx + \frac{dS}{dy}dy.$$

Diese Gleichung lässt sich ebenso, wie die oben betrachtete, in zwei Gleichungen zerlegen, nämlich:

$$\frac{M}{T} = \frac{dS}{dx}$$

$$\frac{N}{T} = \frac{dS}{dy}.$$

Indem wir die erste dieser Gleichungen nach y und die zweite nach x differentiiren, erhalten wir:

$$\frac{T\frac{dM}{dy} - M\frac{dT}{dy}}{T^2} = \frac{d^2 S}{dx\,dy}$$

$$\frac{T\frac{dN}{dx} - N\frac{dT}{dx}}{T^2} = \frac{d^2 S}{dy\,dx}.$$

Da nun für die zweiten Differentialcoefficienten von S dasselbe gilt, was oben über diejenigen von U gesagt wurde, nämlich dass zu setzen ist:

$$\frac{d^2 S}{dx\,dy} = \frac{d^2 S}{dy\,dx},$$

so erhält man durch Subtraction der beiden Gleichungen von einander:

$$\frac{T\frac{dM}{dy} - M\frac{dT}{dy}}{T^2} - \frac{T\frac{dN}{dx} - N\frac{dT}{dx}}{T^2} = 0,$$

oder umgeschrieben:

$$(6) \qquad \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \frac{1}{T}\left(M\frac{dT}{dy} - N\frac{dT}{dx}\right).$$

Den beiden so erhaltenen Gleichungen (5) und (6) wollen wir noch eine etwas andere äussere Gestalt geben. Um nicht zu viele verschiedene Buchstaben in den Formeln zu haben, wollen wir für M und N, welche als abgekürzte Zeichen für die Differentialcoëfficienten $\frac{dQ}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ eingeführt sind, künftig wieder die Differentialcoëfficienten selbst schreiben. Betrachten wir ferner die in (5) an der rechten Seite stehende Differenz, welche, wenn wir auch für m und n wieder die Differentialcoëfficienten $\frac{dW}{dx}$ und $\frac{dW}{dy}$ schreiben, lautet:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right),$$

so ist die durch diese Differenz dargestellte Grösse eine Function von x und y, die gewöhnlich als bekannt anzunehmen ist, indem die von aussen auf den Körper wirkenden Kräfte der directen Beobachtung zugänglich sind, und daraus dann weiter die äussere Arbeit bestimmt werden kann. Wir wollen diese Differenz, welche im Folgenden sehr häufig vorkommen wird, *die auf xy bezügliche Arbeitsdifferenz* nennen, und dafür ein besonderes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(7) \qquad D_{xy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right).$$

Durch diese Aenderungen in der Bezeichnung gehen die Gleichungen (5) und (6) über in:

(8) $$\frac{d}{dy}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dy}\right) = D_{xy}$$

(9) $$\frac{d}{dy}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{dT}{dy} \cdot \frac{dQ}{dx} - \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dQ}{dy}\right).$$

Diese beiden Gleichungen bilden die auf umkehrbare Veränderungen bezüglichen analytischen Ausdrücke der beiden Hauptsätze für den Fall, wo der Zustand des Körpers durch zwei beliebige Veränderliche bestimmt ist. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sofort noch eine dritte, welche insofern einfacher ist, als sie nur die Differentialcoëfficienten erster Ordnung von Q enthält, nämlich:

(10) $$\frac{dT}{dy} \cdot \frac{dQ}{dx} - \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dQ}{dy} = TD_{xy}$$

§. 3. Anwendung der Temperatur als eine der unabhängigen Veränderlichen.

Besonders einfach werden die drei vorstehenden Gleichungen, wenn man als eine der unabhängigen Veränderlichen die Temperatur des Körpers wählt. Wir wollen zu dem Zwecke $y = T$ setzen, so dass nun die noch unbestimmt gelassene Grösse x und die Temperatur T die beiden unabhängigen Veränderlichen sind. Wenn $y = T$ ist, so folgt daraus ohne Weiteres, dass

$$\frac{dT}{dy} = 1$$

ist. Was ferner den Differentialcoëfficienten $\frac{dT}{dx}$ anbetrifft, so ist bei der Bildung desselben vorausgesetzt, dass, während x in $x + dx$ übergeht, die andere Veränderliche, welche bisher y hiess, constant bleibe. Da nun gegenwärtig T selbst die andere Veränderliche ist, welche in dem Differentialcoëfficienten als constant vorausgesetzt wird, so folgt daraus, dass man zu setzen hat:

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

Bilden wir nun zunächst die auf xT bezügliche Arbeitsdifferenz, so lautet diese:

(11) $$D_{xT} = \frac{d}{dT}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dT}\right),$$

und unter Anwendung dieses Werthes gehen die Gleichungen (8), (9) und (10) über in:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = D_{xT} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dx} \tag{13}$$

$$\frac{dQ}{dx} = TD_{xT}. \tag{14}$$

Wenn man das in (14) gegebene Product TD_{xT} statt des Differentialcoëfficienten $\frac{dQ}{dx}$ in die Gleichung (12) einsetzt, und es, wie dort vorgeschrieben ist, nach T differentiirt, so erhält man noch folgende einfache Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = T\frac{dD_{xT}}{dT}. \tag{15}$$

§. 4. Specialisirung der äusseren Kräfte.

Bisher haben wir über die äusseren Kräfte, denen der Körper unterworfen ist, und auf welche sich die bei Zustandsänderungen gethane äussere Arbeit bezieht, keine besonderen Annahmen gemacht. Wir wollen nun einen Fall näher betrachten, welcher vorzugsweise häufig vorkommt, nämlich den, wo die einzige vorhandene äussere Kraft, oder wenigstens die einzige, welche bedeutend genug ist, um bei den Rechnungen Berücksichtigung zu verdienen, ein auf die Oberfläche des Körpers wirkender Druck ist, welcher an allen Punkten gleich stark und überall normal gegen die Oberfläche gerichtet ist.

In diesem Falle wird nur bei Volumenänderungen des Körpers äussere Arbeit gethan. Nennen wir den auf die Flächeneinheit bezogenen Druck p, so ist die äussere Arbeit, welche gethan wird, wenn das Volumen v um dv zunimmt:

$$dW = pdv. \tag{16}$$

Denken wir uns nun, dass der Zustand des Körpers durch zwei beliebige Veränderliche x und y bestimmt sei, so sind der Druck p und das Volumen v als Functionen von x und y zu betrachten. Wir können also die vorige Gleichung in folgender Form schreiben:

$$dW = p\left(\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy\right),$$

woraus folgt:

(17) $$\begin{cases} \dfrac{dW}{dx} = p\dfrac{dv}{dx} \\ \dfrac{dW}{dy} = p\dfrac{dv}{dy}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werthe von $\frac{dW}{dx}$ und $\frac{dW}{dy}$ in den in (7) gegebenen Ausdruck von D_{xy} ein, und führen die darin angedeuteten zweiten Differentiationen aus, und berücksichtigen zugleich, dass $\frac{d^2v}{dxdy} = \frac{d^2v}{dydx}$ sein muss, so erhalten wir:

(18) $$D_{xy} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dy}.$$

Diesen Werth von D_{xy} haben wir auf die Gleichungen (8) und (10) anzuwenden.

Sind x und T die beiden unabhängigen Veränderlichen, so erhält man, ganz der vorigen Gleichung entsprechend:

(19) $$D_{xT} = \frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT},$$

welchen Werth man auf die Gleichungen (12), (14) und (15) anzuwenden hat.

Die einfachsten Formen nimmt der in (18) gegebene Ausdruck an, wenn man entweder das Volumen oder den Druck als eine der unabhängigen Veränderlichen, oder wenn man Volumen und Druck als die beiden unabhängigen Veränderlichen wählt. Für diese Fälle geht nämlich die Gleichung (18), wie sich leicht ersehen lässt, über in:

(20) $$D_{vy} = \frac{dp}{dy}$$

(21) $$D_{py} = -\frac{dv}{dy}$$

(22) $$D_{vp} = 1.$$

Will man endlich in den Fällen, wo entweder das Volumen oder der Druck als eine unabhängige Veränderliche gewählt ist, die Temperatur als andere unabhängige Veränderliche wählen, so braucht man nur in den Gleichungen (20) und (21) T an die Stelle von y zu setzen, also:

$$D_{vT} = \frac{dp}{dT} \tag{23}$$

$$D_{pT} = -\frac{dv}{dT}. \tag{24}$$

§. 5. Zusammenstellung einiger häufig vorkommender Formen der Differentialgleichungen.

Unter den vorher genannten Umständen, wo die einzige vorhandene fremde Kraft ein gleichmässiger und normaler Oberflächendruck ist, pflegt man als unabhängige Veränderliche, welche den Zustand des Körpers bestimmen sollen, am häufigsten die im vorigen Paragraphen zuletzt genannten Grössen zu wählen, nämlich Volumen und Temperatur, oder Druck und Temperatur, oder endlich Volumen und Druck. Die für diese drei Fälle geltenden Systeme von Differentialgleichungen will ich, obwohl sie sich leicht aus den obigen allgemeineren Systemen ableiten lassen, doch ihrer häufigen Anwendung wegen hier in übersichtlicher Weise zusammenstellen. Das erste System ist dasjenige, welches ich in meinen Abhandlungen bei Betrachtung specieller Fälle meistens angewandt habe.

Wenn v und T als unabhängige Veränderliche gewählt sind:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{dp}{dT} \\ &\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dv} \\ &\frac{dQ}{dv} = T\frac{dp}{dT} \\ &\frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = T\frac{d^2p}{dT^2}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Wenn p und T als unabhängige Veränderliche gewählt sind:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dp}\right) - \frac{d}{dp}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = -\frac{dv}{dT} \\ &\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dp}\right) - \frac{d}{dp}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dp} \\ &\frac{dQ}{dp} = -T\frac{dv}{dT} \\ &\frac{d}{dp}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = -T\frac{d^2v}{dT^2}. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Wenn v und p als unabhängige Veränderliche gewählt sind:

$$27)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{dQ}{dv}\right) - \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dQ}{dp}\right) = 1 \\ \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{dQ}{dv}\right) - \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dQ}{dp}\right) = \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{dT}{dp}\cdot\dfrac{dQ}{dv} - \dfrac{dT}{dv}\cdot\dfrac{dQ}{dp}\right) \\ \dfrac{dT}{dp}\cdot\dfrac{dQ}{dv} - \dfrac{dT}{dv}\cdot\dfrac{dQ}{dp} = T. \end{cases}$$

§. 6. Gleichungen für einen Körper, welcher eine theilweise Aenderung seines Aggregatzustandes erleidet.

Ein Fall, welcher noch eine eigenthümliche Vereinfachung zulässt, und welcher wegen seiner häufigen Anwendungen von besonderem Interesse ist, ist der, wo mit den Zustandsänderungen des betrachteten Körpers *eine theilweise Aenderung des Aggregatzustandes* verbunden ist.

Wir wollen annehmen, es sei ein Körper gegeben, von dem sich ein Theil in einem und der übrige Theil in einem anderen Aggregatzustande befinde. Als Beispiel kann man sich denken, ein Theil des Körpers befinde sich im flüssigen und der übrige Theil im dampfförmigen Zustande, und zwar mit derjenigen Dichtigkeit, welche der Dampf in Berührung mit der Flüssigkeit annimmt; indessen gelten die aufzustellenden Gleichungen auch, wenn ein Theil des Körpers sich im festen und der andere im flüssigen, oder ein Theil im festen und der andere im dampfförmigen Zustande befindet. Wir wollen daher der grösseren Allgemeinheit wegen die beiden Aggregatzustände, um die es sich handeln soll, nicht näher bestimmen, sondern sie nur den *ersten* und den *zweiten* Aggregatzustand nennen.

Es sei also in einem Gefässe von gegebenem Volumen eine gewisse Menge des Stoffes eingeschlossen, und ein Theil desselben habe den ersten und der andere Theil den zweiten Aggregatzustand. Wenn die specifischen Volumina, welche der Stoff bei einer gegebenen Temperatur in den beiden Aggregatzuständen hat, ungleich sind, so können in einem gegebenen Raume die beiden in verschiedenen Aggregatzuständen befindlichen Theile nicht beliebige, sondern nur ganz bestimmte Grössen haben. Wenn nämlich der Theil, welcher sich in dem Aggregatzustande von grösserem specifischem Volumen befindet, an Grösse zunimmt, so

wächst damit zugleich der Druck, den der eingeschlossene Stoff auf die Umhüllungswände ausübt, und den er daher auch umgekehrt von den Umhüllungswänden erleidet, und es wird zuletzt ein Punkt erreicht, wo der Druck so gross ist, dass er den weiteren Uebergang in diesen Aggregatzustand verhindert. Wenn dieser Punkt erreicht ist, so können, so lange die Temperatur der Masse und ihr Volumen, d. h. der Rauminhalt des Gefässes, constant bleiben, die Grössen der in den beiden Aggregatzuständen befindlichen Theile sich nicht weiter ändern. Nimmt dann aber, während die Temperatur constant bleibt, der Rauminhalt des Gefässes zu, so kann der Theil, welcher sich in dem Aggregatzustande mit grösserem specifischem Volumen befindet, noch weiter auf Kosten des anderen wachsen, bis abermals derselbe Druck, wie vorher, erreicht und dadurch der weitere Uebergang verhindert ist.

Hieraus ergiebt sich die Eigenthümlichkeit, welche diesen Fall von anderen unterscheidet. Wählen wir nämlich die Temperatur und das Volumen der Masse als die beiden unabhängigen Veränderlichen, durch welche ihr Zustand bestimmt wird, so ist der Druck nicht eine Function dieser *beiden* Veränderlichen, sondern eine Function der Temperatur allein. Ebenso verhält es sich, wenn wir statt des Volumens eine andere Grösse, welche sich gleichfalls unabhängig von der Temperatur ändern kann und mit der Temperatur zusammen den ganzen Zustand des Körpers bestimmt, als zweite unabhängige Veränderliche wählen. Auch von dieser kann der Druck nicht abhängen. Die beiden Grössen Temperatur und Druck zusammen können in diesem Falle nicht als die beiden Veränderlichen, welche zur Bestimmung des Körperzustandes dienen sollen, gewählt werden.

Wir wollen nun neben der Temperatur T irgend eine noch unbestimmt gelassene Grösse x als zweite unabhängige Veränderliche zur Bestimmung des Körperzustandes wählen. Betrachten wir dann den in (19) gegebenen Ausdruck der auf $x\,T$ bezüglichen Arbeitsdifferenz, nämlich:

$$D_{xT} = \frac{dp}{dT} \cdot \frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dv}{dT},$$

so ist hierin dem Vorigen nach $\frac{dp}{dx} = 0$ zu setzen, und wir erhalten also:

$$D_{xT} = \frac{dp}{dT} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{28}$$

Hierdurch gehen die drei Gleichungen (12), (13) und (14) über in:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{dp}{dT} \cdot \frac{dv}{dx} \tag{29}$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dx} \tag{30}$$

$$\frac{dQ}{dx} = T\frac{dp}{dT} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{31}$$

§. 7. Die Clapeyron'sche Gleichung und die Carnot'sche Function.

Im Anschlusse an die in diesem Abschnitte enthaltenen Umformungen der Hauptgleichungen möge hier noch diejenige Gleichung, welche Clapeyron[1]) aus der Carnot'schen Theorie als Hauptgleichung abgeleitet hat, angeführt werden, um zu sehen, in welcher Beziehung sie zu den von uns entwickelten Gleichungen steht. Da aber die Clapeyron'sche Gleichung eine unbestimmte Temperaturfunction enthält, welche man die Carnot'sche Function zu nennen pflegt, so wird es zweckmässig sein, auch unseren Gleichungen, so weit sie hierbei in Betracht kommen, vorher die Form zu geben, in welcher man sie erhält, wenn man die im vorigen Abschnitte eingeführte Temperaturfunction τ nicht, gemäss der nachträglichen Bestimmung, gleich der absoluten Temperatur T setzt, sondern als eine noch unbestimmte Temperaturfunction beibehält. Dadurch wird sich dann die Gelegenheit bieten, die Beziehung zwischen unserer Temperaturfunction τ und der Carnot'schen Function festzustellen.

Wenn man statt der Gleichung

$$dQ = TdS$$

die weniger bestimmte, im vorigen Abschnitte unter (VIII.) gegebene Gleichung

$$dQ = \tau dS$$

anwendet, und aus ihr ebenso, wie es in §. 2 geschehen ist, S eliminirt, so erhält man, statt der Gleichung (9), die folgende:

---

1) *Journal de l'Ecole polytechnique T. XIV. (1834)* u. Pogg. Ann. Bd. 59.

$$(32)\quad \frac{d}{dy}\left(\frac{dQ}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dy}\right)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dy}\cdot\frac{dQ}{dx}-\frac{d\tau}{dx}\cdot\frac{dQ}{dy}\right),$$

und wenn man diese mit (8) verbindet, so erhält man statt (10) die Gleichung:

$$(33)\quad \frac{d\tau}{dy}\cdot\frac{dQ}{dx}-\frac{d\tau}{dx}\cdot\frac{dQ}{dy}=\tau D_{xy}.$$

Nimmt man nun an, dass als äussere Kraft nur ein gleichmässiger und normaler Oberflächendruck wirke, so kann man für D_{xy} den in (18) gegebenen Ausdruck anwenden, und die Gleichung geht dadurch über in:

$$(34)\quad \frac{d\tau}{dy}\cdot\frac{dQ}{dx}-\frac{d\tau}{dx}\cdot\frac{dQ}{dy}=\tau\left(\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dy}\right).$$

Wählt man ferner als unabhängige Veränderliche v und p, indem man setzt: $x=v$ und $y=p$, so kommt:

$$(35)\quad \frac{d\tau}{dp}\cdot\frac{dQ}{dv}-\frac{d\tau}{dv}\cdot\frac{dQ}{dp}=\tau.$$

Da nun τ nur eine Function von T ist, so kann man setzen:

$$\frac{d\tau}{dv}=\frac{d\tau}{dT}\cdot\frac{dT}{dv} \text{ und } \frac{d\tau}{dp}=\frac{d\tau}{dT}\cdot\frac{dT}{dp}.$$

Wenn man diese Werthe von $\frac{d\tau}{dv}$ und $\frac{d\tau}{dp}$ in die vorige Gleichung einführt, und dann durch $\frac{d\tau}{dT}$ dividirt, so erhält man, statt der letzten der Gleichungen (27), folgende Gleichung:

$$(36)\quad \frac{dT}{dp}\cdot\frac{dQ}{dv}-\frac{dT}{dv}\cdot\frac{dQ}{dp}=\frac{\tau}{\frac{d\tau}{dT}}.$$

Hierin ist vorausgesetzt, dass die Wärme nach mechanischem Maasse gemessen sei. Will man gewöhnliches Wärmemaass einführen, so hat man den Ausdruck an der rechten Seite der Gleichung durch das mechanische Aequivalent der Wärme zu dividiren, und erhält:

$$(37)\quad \frac{dT}{dp}\cdot\frac{dQ}{dv}-\frac{dT}{dv}\cdot\frac{dQ}{dp}=\frac{\tau}{E\frac{d\tau}{dT}}.$$

Mit dieser Gleichung stimmt die Clapeyron'sche der Form nach überein, indem sie lautet[1]):

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 59, S. 574.

(38) $$\frac{dT}{dp}\cdot\frac{dQ}{dv} - \frac{dT}{dv}\cdot\frac{dQ}{dp} = C,$$

worin C eine unbestimmte Temperaturfunction ist, nämlich die schon erwähnte Carnot'sche Function.

Setzt man die in den beiden vorigen Gleichungen an der rechten Seite stehenden Ausdrücke unter einander gleich, so erhält man die Beziehung zwischen C und τ, nämlich:

(39) $$C = \frac{\tau}{E\frac{d\tau}{dT}} = \frac{1}{E\frac{d\log\tau}{dT}}.$$

Wenn man, gemäss der von uns ausgeführten Bestimmung, annimmt, dass τ nichts weiter, als die absolute Temperatur T ist, so nimmt auch C eine einfache Form an, nämlich:

(40) $$C = \frac{T}{E}.$$

Da die Gleichung (33) aus der Verbindung zweier Gleichungen hervorgegangen ist, welche den ersten und zweiten Hauptsatz ausdrücken, so ergiebt sich daraus, dass auch die Clapeyron'sche Gleichung nicht als ein Ausdruck des zweiten Hauptsatzes in der von uns angenommenen Form anzusehen ist, sondern als Ausdruck eines Satzes, welcher sich aus der Verbindung des ersten und zweiten Hauptsatzes ableiten lässt.

Was nun weiter die Art anbetrifft, wie Clapeyron seine Differentialgleichung behandelt hat, so ist diese von unserer Behandlungsart sehr verschieden. Er ging nämlich, wie Carnot, von der Annahme aus, dass die Wärmemenge, welche man einem Körper mittheilen muss, während er aus einem Zustande in einen anderen übergeht, durch seinen Anfangs- und Endzustand vollkommen bestimmt sei, ohne dass man zu wissen brauche, in welcher Weise und auf welchem Wege der Uebergang stattgefunden hat. Demgemäss betrachtete er Q als eine Function von p und v und leitete für diese durch Integration seiner Differentialgleichung folgenden Ausdruck ab:

(41) $$Q = F(T) - C\varphi(p,v),$$

worin $F(T)$ eine willkürliche Function der Temperatur ist, und $\varphi(p,v)$ eine Function von p und v bedeutet, welche der folgenden einfacheren Differentialgleichung genügt:

(42) $$\frac{dT}{dv}\cdot\frac{d\varphi}{dp} - \frac{dT}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dv} = 1.$$

Um auch diese Gleichung zu integriren, muss man für den betrachteten Körper die Temperatur T als Function von p und v ausdrücken können. Nimmt man an, der betrachtete Körper sei ein vollkommenes Gas, so hat man:

$$(43) \qquad T = \frac{pv}{R},$$

und demgemäss:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{p}{R} \text{ und } \frac{dT}{dp} = \frac{v}{R}.$$

Dadurch geht die Gleichung (42) über in:

$$(44) \qquad p\frac{d\varphi}{dp} - v\frac{d\varphi}{dv} = R,$$

und hieraus erhält man durch Integration:

$$\varphi(p, v) = R \log p + \Phi(pv),$$

worin $\Phi(pv)$ eine willkürliche Function des Productes pv ist. Für diese kann man gemäss (43) auch eine willkürliche Function der Temperatur setzen, so dass die Gleichung lautet:

$$(45) \qquad \varphi(p, v) = R \log p + \Psi(T).$$

Führt man diesen Ausdruck von $\varphi(p, v)$ in (41) ein, und setzt dann noch

$$F(T) - C\Psi(T) = RB,$$

worin B wiederum eine willkürliche Function der Temperatur bedeutet, so kommt:

$$(46) \qquad Q = R(B - C \log p).$$

Dieses ist die Gleichung, welche Clapeyron für Gase abgeleitet hat.

ABSCHNITT VI.

Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf gesättigte Dämpfe.

§. 1. Hauptgleichungen für gesättigte Dämpfe.

Unter den Gleichungen des vorigen Abschnittes mögen zunächst die in §. 6 angeführten, welche sich auf eine theilweise Aenderung des Aggregatzustandes beziehen, zur Anwendung gebracht werden, weil der dort erwähnte Umstand, dass der Druck nur eine Function der Temperatur ist, eine besondere Erleichterung der Behandlung gewährt. Wir wollen zunächst den Uebergang aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand betrachten.

In einem ausdehnsamen Gefässe sei von irgend einem Stoffe die Gewichtsmenge M enthalten, und von dieser befinde sich der Theil m im Zustande von Dampf, und zwar, wie es sich bei der Berührung mit der Flüssigkeit von selbst versteht, von Dampf im Maximum der Dichtigkeit, und der übrige Theil $M - m$ sei flüssig. Wenn die Temperatur T der Masse gegeben ist, so ist damit der Zustand des dampfförmigen Theiles und ebenso der Zustand des flüssigen Theiles bestimmt. Wenn nun auch noch m gegeben ist und dadurch die Grössen jener beiden Theile bestimmt sind, so kennt man den Zustand der ganzen Masse. Wir wollen daher T und m als die unabhängigen Veränderlichen wählen, und somit

in den Gleichungen (29), (30) und (31) des vorigen Abschnittes m an die Stelle von x setzen. Dadurch gehen diese Gleichungen über in:

$$(1)\qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) - \frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dm}$$

$$(2)\qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) - \frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dm}$$

$$(3)\qquad \frac{dQ}{dm} = T\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dm}.$$

Es möge nun das specifische Volumen (d. h. das Volumen der Gewichtseinheit) des gesättigten Dampfes mit s, und das specifische Volumen der Flüssigkeit mit σ bezeichnet werden. Beide Grössen beziehen sich auf die Temperatur T und auf den dieser Temperatur entsprechenden Druck, und sind ebenso, wie der Druck, als Functionen der Temperatur allein zu betrachten. Bezeichnen wir ferner das Volumen, welches die Masse im Ganzen einnimmt, mit v, so ist zu setzen:

$$v = ms + (M - m)\sigma$$
$$= m(s - \sigma) + M\sigma.$$

Hierin wollen wir noch für die Differenz $s - \sigma$ ein vereinfachtes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(4)\qquad u = s - \sigma,$$

dann kommt:

$$(5)\qquad v = mu + M\sigma,$$

woraus folgt:

$$(6)\qquad \frac{dv}{dm} = u.$$

Die Wärmemenge, welche der Masse zugeführt werden muss, wenn eine Gewichtseinheit derselben bei der Temperatur T und unter dem entsprechenden Drucke aus dem flüssigen in den dampfförmigen Aggregatzustand übergehen soll, und welche wir kurz die Verdampfungswärme nennen, möge mit ϱ bezeichnet werden, dann ist:

$$(7)\qquad \frac{dQ}{dm} = \varrho.$$

Ferner wollen wir die specifische Wärme des Stoffes im flüssigen und dampfförmigen Aggregatzustande in die Gleichungen einführen. Die specifische Wärme, um welche es sich hier handelt, ist aber nicht die bei constantem Volumen, noch auch die bei

constantem Drucke, sondern bezieht sich auf den Fall, wo mit der Temperatur der Druck in der Weise wächst, wie das Maximum der Spannkraft des gesättigten Dampfes.

Auf die specifische Wärme der Flüssigkeit hat dieses Wachsen des Druckes einen sehr geringen Einfluss, da die Flüssigkeiten sich durch Druckzunahmen von solchen Grössen, wie sie hierbei vorkommen, nur sehr wenig zusammendrücken lassen. Es wird später bei den auf die verschiedenen specifischen Wärmen bezüglichen Untersuchungen davon die Rede sein, wie man diesen Einfluss bestimmen kann, und ich will mich daher für jetzt damit begnügen, nur Eine Zahl als Beispiel anzuführen. Für Wasser bei 100° beträgt die Differenz zwischen der hier in Betracht kommenden specifischen Wärme und der specifischen Wärme bei constantem Drucke nur $\frac{1}{3900}$ der letzteren, eine Differenz, welche unbedenklich vernachlässigt werden kann. Wir können daher die hier in Betracht kommende specifische Wärme der Flüssigkeit, welche wir mit C bezeichnen wollen, wenn sie auch der Bedeutung nach von der specifischen Wärme bei constantem Drucke verschieden ist, doch für unsere Rechnungen als mit ihr gleich betrachten.

Anders ist es bei dem Dampfe. Die hier in Betracht kommende specifische Wärme soll sich dem Obigen nach auf diejenige Wärmemenge beziehen, welche gesättigter Dampf zur Erwärmung bedarf, wenn er zugleich so stark zusammengedrückt wird, dass er sich bei der erhöhten Temperatur wieder im gesättigten Zustande befindet. Da diese Zusammendrückung sehr erheblich ist, so ist auch diese Art von specifischer Wärme von allen bisher betrachteten sehr verschieden. Wir wollen sie *die specifische Wärme des gesättigten Dampfes* nennen und mit H bezeichnen.

Nach Einführung der beiden Zeichen C und H kann man die Wärmemenge, welche nöthig ist, um die Dampfmenge m und die Flüssigkeitsmenge $M - m$ um dT zu erwärmen, sofort hinschreiben, nämlich:

$$dQ = mH\,dT + (M - m)\,C\,dT,$$

woraus folgt:

$$\frac{dQ}{dT} = mH + (M - m)\,C,$$

oder anders geordnet:

$$\frac{dQ}{dT} = m(H - C) + MC. \tag{8}$$

9*

Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt weiter:

$$(9)\qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) = \frac{d\varrho}{dT}$$

$$(10)\qquad \frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = H - C.$$

Durch Einsetzung der in den Gleichungen (7), (9) und (10) gegebenen Werthe in die Gleichungen (1), (2) und (3) erhält man:

$$(11)\qquad \frac{d\varrho}{dT} + C - H = u\frac{dp}{dT}$$

$$(12)\qquad \frac{d\varrho}{dT} + C - H = \frac{\varrho}{T}$$

$$(13)\qquad \varrho = Tu\frac{dp}{dT}.$$

Dieses sind die auf die Dampfbildung bezüglichen Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Die Gleichung (11) ist eine Folge des ersten Hauptsatzes, (12) eine Folge des zweiten Hauptsatzes und (13) ergiebt sich aus der Vereinigung beider Hauptsätze.

Will man die Wärmemengen nicht nach mechanischem Maasse sondern nach gewöhnlichem Wärmemaasse messen, so braucht man nur alle Glieder der vorigen Gleichungen durch das mechanische Aequivalent der Wärme zu dividiren. Für diesen Fall wollen wir die beiden specifischen Wärmen und die Verdampfungswärme durch neue Zeichen darstellen, indem wir setzen:

$$(14)\qquad c = \frac{C}{E};\qquad h = \frac{H}{E};\qquad r = \frac{\varrho}{E}.$$

Dann lauten die Gleichungen:

$$(15)\qquad \frac{dr}{dT} + c - h = \frac{u}{E}\cdot\frac{dp}{dT}$$

$$(16)\qquad \frac{dr}{dT} + c - h = \frac{r}{T}$$

$$(17)\qquad r = \frac{Tu}{E}\cdot\frac{dp}{dT}.$$

§. 2. Specifische Wärme des gesättigten Dampfes.

Da die vorstehenden Gleichungen (15), (16) und (17), von denen jedoch nur zwei unabhängig sind, durch die mechanische Wärmetheorie neu gewonnen sind, so kann man sie dazu benutzen, zwei Grössen, deren eine früher ganz unbekannt und die andere nur unvollkommen bekannt war, näher zu bestimmen, nämlich die Grösse h und die in u enthaltene Grösse s.

Indem wir uns zuerst zur Betrachtung der Grösse h, *der specifischen Wärme des gesättigten Dampfes*, wenden, wird es vielleicht zweckmässig sein, zunächst Einiges von den früher über diese Grösse ausgesprochenen Ansichten mitzutheilen.

Die Grösse h ist besonders für die Dampfmaschinentheorie sehr wichtig und in der That ist der Erste, welcher über sie eine bestimmte Ansicht ausgesprochen hat, der berühmte Verbesserer der Dampfmaschinen, James Watt, gewesen.

Dieser ging natürlich bei seinen Betrachtungen von denjenigen Ansichten aus, welche auf der älteren Wärmetheorie beruhen. Dahin gehört besonders die schon im Abschnitt I. erwähnte Ansicht, dass die sogenannte Gesammtwärme (d. h. die von einem Körper während des Ueberganges aus einem gegebenen Anfangszustande in seinen gegenwärtigen Zustand im Ganzen aufgenommene Wärmemenge) nur von dem gegenwärtigen Zustande, und nicht von der Art, wie der Körper in denselben gelangt ist, abhänge, und dass sie daher als eine Function derjenigen Veränderlichen, von welchen der Zustand des Körpers abhängt, dargestellt werden könne. Gemäss dieser Ansicht würden wir in unserem Falle, wo der Zustand des aus Flüssigkeit und Dampf bestehenden Körpers durch die Grössen T und m bestimmt wird, die betreffende Wärmemenge, für welche wir, unserer bisherigen Bezeichnung entsprechend, den Buchstaben Q wählen, als eine Function von T und m zu betrachten und in Folge dessen zu setzen haben:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) - \frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = 0.$$

Führt man hierin für die beiden zweiten Differentialcoefficienten die in (9) und (10) gegebenen Werthe ein, so kommt:

$$\frac{d\varrho}{dT} + C - H = 0,$$

oder nach Division aller Glieder durch E:

$$\frac{dr}{dT} + c - h = 0,$$

woraus man zur Bestimmung von h erhalten würde:

(18) $$h = \frac{dr}{dT} + c.$$

Diese Gleichung war es in der That, welche man, wenn auch nicht gerade in derselben Form, früher benutzt hat, um h zu bestimmen.

Um aus dieser Gleichung h berechnen zu können, musste man den Differentialcoefficienten $\frac{dr}{dT}$, also die Aenderung der Verdampfungswärme mit der Temperatur, kennen.

Watt hatte über die Verdampfungswärme des Wassers bei verschiedenen Temperaturen Messungen angestellt, und war dabei zu einem Resultate gelangt, welches sich in einem sehr einfachen Satze aussprechen liess, den man *das Watt'sche Gesetz* zu nennen pflegte. Dieser Satz lautete in seiner kürzesten Form: *die Summe der freien und latenten Wärme ist constant*, und sollte aussagen, dass die Summe der beiden Wärmemengen, welche man einer Gewichtseinheit Wasser mittheilen muss, um sie vom Gefrierpunkte bis zur Temperatur T zu erwärmen und dann bei dieser Temperatur in Dampf zu verwandeln, von der Temperatur T unabhängig sei. Die zur Erwärmung des Wassers nöthige Wärmemenge wird durch das Integral

$$\int_a^T c\,dT$$

dargestellt, worin a die absolute Temperatur des Gefrierpunktes bedeutet, und der obige Satz führt daher zu der Gleichung:

(19) $$r + \int_a^T c\,dT = \text{Const.},$$

durch deren Differentiation man erhält:

(20) $$\frac{dr}{dT} + c = 0.$$

Vereinigt man diese Gleichung mit (18), so erhält man:

(21) $$h = 0.$$

Dieses Resultat hat man lange für richtig gehalten, und hat es in folgendem Satze ausgesprochen: *Wenn Dampf vom Maximum der Dichtigkeit in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle sein*

Volumen ändert, so bleibt er dabei immer im Maximum der Dichtigkeit.

Später hat Regnault die Aenderung der Verdampfungswärme mit der Temperatur zum Gegenstande neuer und sehr sorgfältiger Untersuchungen gemacht[1]), und hat dabei gefunden, dass das Watt'sche Gesetz, nach welchem die Summe der freien und latenten Wärme constant sein soll, der Wirklichkeit nicht entspricht, sondern dass diese Summe einen mit steigender Temperatur wachsenden Werth hat. Das Resultat seiner Untersuchungen wird durch folgende Gleichung ausgedrückt, in welcher statt der absoluten Temperatur T die vom Gefrierpunkte an gezählte Temperatur t eingeführt ist:

$$r + \int_0^t c\,dt = 606{\cdot}5 + 0{\cdot}305\,t. \tag{22}$$

Wenn man diese Gleichung nach t differentiirt, und dann statt des Differentialcoefficienten $\frac{dr}{dt}$ den gleichbedeutenden $\frac{dr}{dT}$ setzt, so kommt:

$$\frac{dr}{dT} + c = 0{\cdot}305. \tag{23}$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit (18) erhält man:

$$h = 0{\cdot}305. \tag{24}$$

Dieses war der Werth von h, welchen man nach der Veröffentlichung der Regnault'schen Versuche glaubte statt des Werthes Null annehmen und in die Dampfmaschinentheorie einführen zu müssen. Man kam also zu der Ansicht, dass gesättigter Dampf bei der Zusammendrückung, wenn er sich dabei so erwärmen soll, dass er immer gerade die Temperatur hat, für welche die Dichtigkeit das Maximum ist, Wärme von Aussen aufnehmen müsse, und dass er umgekehrt bei der Ausdehnung, um sich gerade in der richtigen Weise abzukühlen, Wärme nach Aussen abgeben müsse. Daraus musste man weiter schliessen, dass in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle bei der Zusammendrückung des gesättigten Dampfes ein theilweiser Niederschlag erfolge, während bei Ausdehnung der Dampf nicht im Maximum der Dichtigkeit

[1]) *Relation des expériences t. I.*, zugleich *Mém. de l'Acad. t. XXI, 1847.*

bleibe, indem seine Temperatur nicht so stark sinke, wie dazu erforderlich sein würde.

Nach diesen Mittheilungen über die früher in Bezug auf h gezogenen Schlüsse, wollen wir nun sehen, was sich aus unseren Gleichungen schliessen lässt. Die Grösse h kommt in den beiden Gleichungen (15) und (16) vor; die erstere derselben enthält aber ausser h noch die Grösse u, welche nicht ohne Weiteres als genügend bekannt angesehen werden darf, und sie ist daher zur Bestimmung von h weniger geeignet, als die letztere, welche ausser h nur solche Grössen enthält, die beim Wasser und bei einer Anzahl anderer Flüssigkeiten durch die Versuche von Regnault sehr genau bestimmt sind. Aus dieser Gleichung ergiebt sich durch blosse Umstellung der Glieder:

$$h = \frac{dr}{dT} + c - \frac{r}{T}, \tag{25}$$

und wir haben somit durch die mechanische Wärmetheorie zur Bestimmung von h eine neue Gleichung gewonnen, welche sich von der früher angenommenen Gleichung (18) durch das negative Glied $-\frac{r}{T}$, dessen Werth sehr beträchtlich ist, unterscheidet.

§. 3. Numerische Bestimmung von h für Wasserdampf.

Wenn wir die Gleichung (25) zunächst auf Wasser anwenden, so haben wir nach Regnault für die Summe der beiden ersten Glieder an der rechten Seite die Zahl 0·305 zu setzen. Um das letzte Glied zu bestimmen, müssen wir r als Function der Temperatur kennen. Nach Gleichung (22) haben wir zu setzen:

$$r = 606{\cdot}5 + 0{\cdot}305\, t - \int_0^t c\,dt. \tag{26}$$

Die specifische Wärme c des Wassers bestimmt Regnault durch folgende Formel:

$$c = 1 + 0{\cdot}00004\, t + 0{\cdot}0000009\, t^2, \tag{27}$$

durch deren Anwendung die vorige Gleichung übergeht in:

$$r = 606{\cdot}5 - 0{\cdot}695\, t - 0{\cdot}00002\, t^2 - 0{\cdot}0000003\, t^3. \tag{28}$$

Wenn man diesen Ausdruck von r in (25) einsetzt, und dabei auch

noch T durch $273 + t$ ersetzt, so erhält man für Wasserdampf die Gleichung:

$$(29)\quad h = 0{\cdot}305 - \frac{606{\cdot}5 - 0{\cdot}695\, t - 0{\cdot}00002\, t^2 - 0{\cdot}0000003\, t^3}{273 + t}.$$

Der unter (28) gegebene Ausdruck von r ist durch seine Länge unbequem, und ich glaube, dass die Versuche über die Verdampfungswärme bei verschiedenen Temperaturen, so werthvoll sie auch sind, doch nicht einen solchen Grad von Genauigkeit besitzen, dass eine so lange Formel zu ihrer Darstellung erforderlich wäre. Ich habe daher in meiner Abhandlung über die Dampfmaschinentheorie vorgeschlagen, statt jener Formel folgende anzuwenden:

$$(30)\qquad r = 607 - 0{\cdot}708\, t.$$

Die Art, wie die beiden Constanten dieser Formel bestimmt sind, soll später bei Besprechung der Dampfmaschinen näher mitgetheilt werden. Hier möge nur, um zu zeigen, dass die Abweichung beider Formeln von einander so gering ist, dass man ohne Bedenken die eine für die andere setzen kann, eine Zusammenstellung einiger Zahlenwerthe folgen:

t	0°	50°	100°	150°	200°
r nach Gleichung (28)	606·5	571 6	536·5	500·7	464·3
r nach Gleichung (30)	607·0	571·6	536·2	500·8	465·4

Durch Einsetzung des in (30) gegebenen Ausdruckes von r in die Gleichung (25) erhält man, statt (29), die Gleichung:

$$h = 0{\cdot}305 - \frac{607 - 0{\cdot}708\, t}{273 + t},$$

welche sich auch in folgende noch einfachere Form bringen lässt:

$$(31)\qquad h = 1{\cdot}013 - \frac{800{\cdot}3}{273 + t}.$$

Ein Blick auf die Gleichungen (29) und (31) lässt sofort erkennen, dass für Temperaturen, welche nicht sehr hoch sind, h eine *negative* Grösse ist, und für einige bestimmte Temperaturen ergeben sich aus (29) folgende Werthe, welche mit den aus (31) berechneten Werthen sehr nahe übereinstimmen:

t	0°	50°	100°	150°	200°
h	— 1·916	— 1·465	— 1·133	— 0·879	— 0·676

Der Umstand, dass die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes negative und zwar so grosse negative Werthe hat, bildet eine wichtige Eigenschaft desselben. Man kann sich von der Ursache dieses eigenthümlichen Verhaltens in folgender Weise Rechenschaft geben. Wenn der Dampf zusammengedrückt wird, so wird durch die dabei verbrauchte Arbeit Wärme erzeugt, und diese Wärme ist mehr als ausreichend, um den Dampf um so viel zu erwärmen, dass er die Temperatur annimmt, zu welcher die neue Dichtigkeit als Maximum gehört. Man muss ihm daher, wenn er sich gerade nur in der Weise erwärmen soll, dass er gesättigt bleibt, einen Theil der erzeugten Wärme entziehen. In entsprechender Weise wird bei der Ausdehnung des Dampfes mehr Wärme zu Arbeit verbraucht, als nöthig ist, um den Dampf um so viel abzukühlen, dass er gerade in dem Zustande als gesättigter Dampf bleibt. Man muss ihm also, wenn dieses Letztere stattfinden soll, bei der Ausdehnung Wärme mittheilen.

Sollte der ursprünglich gesättigte Dampf sich in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle befinden, so würde er bei der Zusammendrückung überhitzt werden, und bei der Ausdehnung sich theilweise niederschlagen.

Der Schluss, dass die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes negativ sei, wurde unabhängig und gleichzeitig von Rankine und mir[1]) gezogen. Rankine hat aber von den beiden Gleichungen (15) und (16), welche h enthalten, nur die erstere (freilich in etwas anderer Form) entwickelt. Die letztere konnte er nicht entwickeln, weil ihm der dazu nöthige zweite Hauptsatz fehlte. Da in der ersteren Gleichung neben h noch das in der Grösse u enthaltene specifische Volumen des gesättigten Dampfes vorkommt, so wandte Rankine, um dieses zu bestimmen, das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz auf den gesättigten

[1]) Rankine's Abhandlung ist im Februar 1850 in der Edinburger Royal Society vorgetragen und dann in den Transactions dieser Gesellschaft Vol. XX, p. 147 gedruckt. Meine Abhandlung ist im Februar 1850 in der Berliner Akademie vorgetragen und dann in Poggendorff's Annalen Bd. 79, S. 368 und 500 gedruckt.

Dampf an, was, wie wir später sehen werden, ungenau ist. Die genauere Bestimmung von h konnte nur durch die zuerst von mir abgeleitete Gleichung (16) stattfinden.

§. 4. Numerische Bestimmung von h für andere Dämpfe.

Zur Zeit der ersten Aufstellung der Gleichung (25) hatte Regnault seine bekannten werthvollen Messungen zur Bestimmung der specifischen Wärme und der Verdampfungswärme als Functionen der Temperatur nur beim Wasser ausgeführt [1]), und es konnte daher auch die Grösse h nur für Wasser numerisch berechnet werden. Später hat Regnault seine Messungen auch auf andere Flüssigkeiten ausgedehnt [2]), und es ist nun möglich, auch für diese Flüssigkeiten jene Gleichung zur numerischen Berechnung von h anzuwenden. Man erhält auf diese Weise folgende Resultate:

Schwefelkohlenstoff: CS_2.

Nach Regnault ist zu setzen:

$$\int_0^t c\,dt = 0{\cdot}23523\,t + 0{\cdot}0000815\,t^2$$

$$r + \int_0^t c\,dt = 90{\cdot}00 + 0{\cdot}14601\,t - 0{\cdot}0004123\,t^2,$$

woraus folgt:

$$c = 0{\cdot}23523 + 0{\cdot}0001630\,t$$
$$r = 90{\cdot}00 - 0{\cdot}08922\,t - 0{\cdot}0004938\,t^2.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe geht die Gleichung (25) über in:

$$h = 0{\cdot}14601 - 0{\cdot}0008246\,t - \frac{90{\cdot}00 - 0{\cdot}08922\,t - 0{\cdot}0004938\,t^2}{273 + t}.$$

Hieraus ergeben sich für h unter anderen folgende Werthe:

t	0^0	100^0
h	$-0{\cdot}1837$	$-0{\cdot}1406$

1) *Relation des expériences t. I. Paris 1847.*
2) Ebendas. *t. II. Paris 1862.*

Die specifische Wärme des gesättigten Dampfes ist also auch beim Schwefelkohlenstoff negativ, hat aber kleinere Werthe, als beim Wasser.

Aether: $C_4H_{10}O$.

Nach Regnault ist zu setzen:

$$\int_0^t c\,dt = 0{\cdot}52900\,t + 0{\cdot}00029587\,t^2$$

$$r + \int_0^t c\,dt = 94{\cdot}00 + 0{\cdot}45000\,t - 0{\cdot}00055556\,t^2,$$

woraus folgt:

$$c = 0{\cdot}52900 + 0{\cdot}00059174\,t$$
$$r = 94{\cdot}00 - 0{\cdot}07900\,t - 0{\cdot}0008514\,t^2.$$

Dadurch geht (25) über in:

$$h = 0{\cdot}45000 - 0{\cdot}0011111\,t - \frac{94{\cdot}00 - 0{\cdot}07900\,t - 0{\cdot}0008514\,t^2}{273 + t},$$

und hieraus ergeben sich folgende Werthe:

t	0°	100°
h	0·1057	0·1309

Beim Aether hat also die specifische Wärme des gesättigten Dampfes, wenigstens bei den gewöhnlich vorkommenden Temperaturen, *positive* Werthe.

Chloroform: $CHCl_3$.

Nach Regnault ist zu setzen:

$$\int_0^t c\,dt = 0{\cdot}23235\,t + 0{\cdot}00005072\,t^2$$

$$r + \int_0^t c\,dt = 67{\cdot}00 + 0{\cdot}1375\,t,$$

woraus folgt:

$$c = 0{\cdot}23235 + 0{\cdot}00010144\,t$$
$$r = 67{\cdot}00 - 0{\cdot}09485\,t - 0{\cdot}00005072\,t^2.$$

Dadurch geht (25) über in:

$$h = 0{\cdot}1375 - \frac{67{\cdot}00 - 0{\cdot}09485\,t - 0{\cdot}00005072\,t^2}{273 + t},$$

und hieraus ergeben sich folgende Werthe:

t	0^0	100^0
h	$-0{\cdot}1079$	$-0{\cdot}0153$

Chlorkohlenstoff: CCl_4.

Nach Regnault ist zu setzen:

$$\int_0^t c\,dt = 0{\cdot}19798\,t + 0{\cdot}0000906\,t^2$$

$$r + \int_0^t c\,dt = 52{\cdot}00 + 0{\cdot}14625\,t - 0{\cdot}000172\,t^2,$$

woraus folgt:

$$c = 0{\cdot}19798 + 0{\cdot}0001812\,t$$
$$r = 52{\cdot}00 - 0{\cdot}05173\,t - 0{\cdot}0002626\,t^2.$$

Dadurch geht (25) über in:

$$h = 0{\cdot}14625 - 0{\cdot}000344\,t - \frac{52{\cdot}00 - 0{\cdot}05173\,t - 0{\cdot}0002626\,t^2}{273 + t},$$

und hieraus ergeben sich folgende Werthe:

t	0^0	100^0
h	$-0{\cdot}0442$	$-0{\cdot}0066$

Aceton: C_3H_6O.

Nach Regnault ist zu setzen:

$$\int_0^t c\,dt = 0{\cdot}50643\,t + 0{\cdot}0003965\,t^2$$

$$r + \int_0^t c\,dt = 140{\cdot}5 + 0{\cdot}36644\,t - 0{\cdot}000516\,t^2,$$

woraus folgt:

$$c = 0{\cdot}50643 + 0{\cdot}0007930\,t$$
$$r = 140{\cdot}5 - 0{\cdot}13999\,t - 0{\cdot}0009125\,t^2.$$

Dadurch geht (25) über in:

$$h = 0{\cdot}36644 - 0{\cdot}001032\,t - \frac{140{\cdot}5 - 0{\cdot}13999\,t - 0{\cdot}0009125\,t^2}{273 + t},$$

und hieraus ergeben sich folgende Werthe:

t	0^0	100^0
h	— 0·1482	— 0·0515

Ausser den vorstehenden Flüssigkeiten hat Regnault noch Alcohol, Benzin und Terpentinöl in der Weise untersucht, dass er die Grösse $r + \int_0^t c dt$ bestimmt hat. Beim Alcohol und Terpentinöl giebt er aber keine empirische Formel zur Darstellung dieser Grösse an, weil die Versuchsresultate zu viele Unregelmässigkeiten zeigten, und beim Benzin hat er die Grösse $\int_0^t c dt$ nicht als Function der Temperatur bestimmt, sondern nur einen Mittelwerth der specifischen Wärme für ein beschränktes Temperatur-Intervall aufgesucht. Für diese Flüssigkeiten würde daher die numerische Berechnung von h mit grösseren Unsicherheiten behaftet sein, als bei den oben angeführten Flüssigkeiten, weshalb wir von ihrer Ausführung hier absehen wollen.

In allen vorstehenden speciellen Formeln für h zeigt sich, dass diese Grösse mit steigender Temperatur wächst. In dem einzigen Falle, wo sie bei gewöhnlichen Temperaturen positiv ist, beim Aether, nimmt ihr absoluter Werth mit steigender Temperatur zu. In den anderen Fällen, wo sie negativ ist, nimmt ihr absoluter Werth mit steigender Temperatur ab. Sie nähert sich in diesen Fällen also der Null, und zwar meistens in solcher Weise, dass man annehmen darf, dass sie bei einer gewissen höheren Temperatur den Werth Null erreichen und bei noch weiterem Wachsen der Temperatur positiv werden wird. Zur Bestimmung der Temperatur, für welche $h = 0$ wird, hat man gemäss (25) zu setzen:

$$\frac{dr}{dT} + c - \frac{r}{T} = 0, \tag{32}$$

und diese Gleichung hat man, nachdem darin, wie es oben geschehen ist, c und r durch Functionen der Temperatur ersetzt sind, nach t aufzulösen.

Die empirischen Formeln von Regnault, nach welchen wir c und r als Functionen von t bestimmt haben, dürfen aber natürlich nicht zu weit über die Temperaturgrenzen hinaus angewandt werden, innerhalb deren Regnault seine Versuche angestellt hat. Dadurch wird die Bestimmung der Temperatur, für welche $h = 0$ wird, in manchen Fällen unmöglich, wie z. B. beim Wasser, wo man aus den Gleichungen, welche man erhält, wenn man in (29) und (31) $h = 0$ setzt, eine Temperatur von etwa 500° erhalten würde, während doch die Gleichungen nur bis etwas über 200° anwendbar sind. Bei anderen Flüssigkeiten dagegen liegt die Temperatur, für welche die Formel von h den Werth Null annimmt, und über welche hinaus sie positive Werthe hat, noch innerhalb der Grenzen, für welche man die Formel anwenden darf. So berechnet Cazin[1]) diese Temperatur für Chloroform zu 123·48° und für Chlorkohlenstoff zu 128·9°.

§. 5. Experimentelle Prüfung der specifischen Wärme des gesättigten Dampfes.

Nachdem die Theorie zu dem Resultate geführt hatte, dass die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes negativ sei, und dass daher gesättigter Wasserdampf in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle sich bei der Ausdehnung theilweise niederschlagen müsse, ist dieses Resultat von Hirn einer experimentellen Prüfung unterworfen[2]). Ein cylinderförmiges Gefäss von Metall war an seinen beiden Enden mit parallelen Spiegelglasplatten versehen, so dass man hindurchsehen konnte. Nachdem dieser Cylinder mit Wasserdampf von hohem Drucke gefüllt war, welcher vollkommen durchsichtig war, öffnete man plötzlich einen Hahn, so dass ein Theil des Dampfes in die Atmosphäre ausströmte und der zurückbleibende Dampf sich somit ausdehnte. Dabei sah man einen dicken Nebel im Innern des Cylinders entstehen, wodurch der theilweise Niederschlag des Dampfes erwiesen war.

Als später der zweite Band der *Relation des expériences* von Regnault erschienen war, worin die oben erwähnten, auf andere

---

[1]) *Annales de Chimie et de Physique, 4. série, t. XIV.*

[2]) *Bulletin 133 de la Société industrielle de Mulhouse, p. 137.*

Flüssigkeiten bezüglichen Data enthalten waren, mittelst deren man *h* auch für diese Flüssigkeiten berechnen konnte, und als sich dabei herausgestellt hatte, dass *h* für Aetherdampf positiv sein muss, stellte Hirn auch mit diesem Dampfe Versuche an, welche er folgendermaassen beschreibt[1]). „An den Hals einer festen Flasche von Krystall brachte ich eine Pumpe an, deren Capacität angenähert gleich der der Flasche war, und welche unten mit einem Hahn versehen war. Nachdem etwas Aether in die Flasche gegossen war, tauchte man sie bis zum Halse in Wasser von ungefähr 50°, und öffnete den Hahn, bis man annehmen konnte, dass die Luft vollkommen ausgetrieben sei. Dann schloss man den Hahn, und tauchte die Pumpe ebenfalls mit der Flasche in das warme Wasser. Sofort wurde der Stempel durch den Aetherdampf ganz hinauf getrieben. Indem man dann plötzlich den Apparat aus dem Wasser nahm, stiess man den Stempel schnell hinunter. In diesem Augenblicke, aber auch nur während eines Augenblickes, füllte sich die Flasche mit einem sehr sichtbaren Nebel.“ Hiermit war also erwiesen, dass der Aetherdampf sich umgekehrt verhält, wie der Wasserdampf, dass er nämlich, statt bei der Ausdehnung, vielmehr bei der Zusammendrückung sich theilweise niederschlägt, wie es dem entgegengesetzten Vorzeichen von *h* entspricht.

Zur Controle dieses Versuches machte Hirn noch einen ganz eben solchen Versuch mit Schwefelkohlenstoff. Da zeigte sich, dass beim Hinunterstossen des Stempels die Flasche vollkommen durchsichtig blieb. Dieses stimmt wieder mit der Theorie überein, indem beim Schwefelkohlenstoff, wie beim Wasser, *h* negativ ist, und somit bei der Zusammendrückung des Dampfes nicht ein Niederschlag, sondern umgekehrt eine Ueberhitzung eintreten muss.

Einige Jahre später hat Cazin, unterstützt von der *Association scientifique*, ähnliche und in einigen Beziehungen noch erweiterte Versuche mit grosser Sorgfalt und vielem Geschicke angestellt[2]).

Er wandte ebenfalls ein cylindrisches Metallgefäss an, welches an seinen Enden mit Glasplatten zum Durchsehen versehen war. Dasselbe befand sich in einem Oelbade, um ihm eine bestimmte für den Versuch geeignete Temperatur geben zu können.

---

[1]) Cosmos, 10. April 1863.

[2]) *Annales de Chimie et de Physique, 4. série, t. XIV.*

Bei einer ersten Versuchsreihe wurde nur Ausdehnung des Dampfes beabsichtigt, und es war daher die Einrichtung getroffen, dass man, wenn das cylindrische Gefäss mit Dampf gefüllt war, einen Hahn öffnen konnte, durch den dann ein Theil des Dampfes entweder in die Atmosphäre austrat, oder in ein Luftreservoir strömte, dessen Druck man um eine beliebige Differenz kleiner als den Druck des Dampfes machen konnte. Bei einer zweiten Versuchsreihe war mit dem cylindrischen Gefässe eine Pumpe in Verbindung gebracht, welche sich in dem gleichen Oelbade befand, und deren Kolben durch einen besonderen Mechanismus schnell aufwärts oder abwärts getrieben werden konnte, so dass das Volumen des Dampfes vergrössert oder verkleinert wurde.

Durch die Versuche mit diesen Apparaten wurden zunächst die von Hirn beim Wasserdampf und Aetherdampf gefundenen Resultate bestätigt, und zwar geschah die Prüfung mit dem letzten Apparate jedesmal in doppelter Weise, durch Verdünnung und Verdichtung. Der Wasserdampf zeigte bei der Verdünnung Nebelbildung, während er bei der Verdichtung klar durchsichtig blieb. Der Aetherdampf dagegen zeigte bei der Verdichtung Nebelbildung, während er bei der Verdünnung klar durchsichtig blieb.

Ausserdem stellte Cazin noch specielle Versuche mit Chloroformdampf an. Wie schon oben erwähnt, wird beim Chloroformdampf die Grösse h, welche bei niederen Temperaturen negativ ist, bei einer Temperatur von mässiger Höhe, welche Cazin zu 123·48° berechnet hat, Null, und bei noch höheren Temperaturen positiv. Dieser Dampf muss also bei niederen Temperaturen sich bei der Ausdehnung theilweise condensiren, und bei höheren Temperaturen, jenseit jener Uebergangstemperatur, sich bei der Zusammendrückung theilweise condensiren.

Mit dem ersten Apparate, welcher nur Ausdehnung gestattete, beobachtete Cazin bis zur Temperatur von 123° Nebelbildung bei der Ausdehnung. Bei Temperaturen über 145° fand die Nebelbildung nicht mehr statt. Zwischen 123° und 145° war das Verhalten je nach der Grösse der Ausdehnung etwas verschieden. Bei kleiner Ausdehnung fand keine Nebelbildung statt; bei grosser Ausdehnung dagegen trat zu Ende der Ausdehnung etwas Nebelbildung ein. Dieses Letztere erklärt sich sehr einfach daraus, dass die grosse Ausdehnung auch eine Temperaturerniedrigung von entsprechender Grösse zur Folge hatte, und dadurch der Dampf zu denjenigen Temperaturen gelangte, bei welchen Ausdehnung

mit Niederschlag verbunden ist. Das Resultat stimmte also ganz mit der Theorie überein.

Mit dem zweiten Apparate zeigte der Chloroformdampf bis 130° bei der Ausdehnung Nebelbildung, während er bei der Zusammendrückung klar durchsichtig blieb. Ueber 136° zeigte er bei der Zusammendrückung Nebelbildung, während er bei der Ausdehnung klar durchsichtig blieb. Hierdurch ist die Theorie noch vollständiger als durch die Versuche mit dem ersten Apparate bestätigt. Auf den Umstand, dass die Temperatur, bei welcher das Verhalten des Dampfes sich umkehrt, bei diesen Versuchen zwischen 130° und 136° zu liegen schien, während die Theorie 123·48° giebt, darf man kein zu grosses Gewicht legen. Einerseits sind diese Versuche zu einer genauen Bestimmung dieser Temperatur nicht geeignet, weil bei ihnen immer endliche Volumenänderungen von beträchtlicher Grösse vorkommen, während die theoretische Zahl sich auf unendlich kleine Volumenänderungen bezieht. Andererseits sagt Cazin selbst, dass sein Chloroform nicht chemisch rein war, und zu gegebenen Dampfspannungen höherer Temperaturen bedurfte, als die, welche Regnault gefunden hat. Man kann also unter Berücksichtigung dieser Umstände die Bestätigung der Theorie durch das Experiment als ganz genügend betrachten.

§. 6. Das specifische Volumen des gesättigten Dampfes.

Wir wollen nun die zweite der beiden Grössen, welche zu Anfang des §. 2 genannt wurden, nämlich die Grösse s, *das specifische Volumen des gesättigten Dampfes*, betrachten.

Man wandte früher zur Berechnung des Volumens, welches ein Dampf bei verschiedenen Temperaturen und unter verschiedenem Drucke einnimmt, das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz an, und machte dabei keinen Unterschied, ob sich der Dampf im gesättigten oder im überhitzten Zustande befindet. Es wurden freilich von manchen Seiten Zweifel darüber ausgesprochen, ob die Dämpfe wirklich bis zum Sättigungspunkte jenen Gesetzen folgen; da aber die experimentelle Bestimmung des Volumens gesättigter Dämpfe zu grosse Schwierigkeiten darbot, und eine theoretische Bestimmung aus Mangel an sicheren Anhaltspunkten nicht möglich war, so blieb man dabei, jene Gesetze auch auf

gesättigte Dämpfe anzuwenden, um dadurch wenigstens eine ungefähre Bestimmung ihres Volumens ausführen zu können.

Unsere neu gewonnenen, am Ende des §. 1 angeführten Gleichungen gewähren uns nun aber ein Mittel zu einer theoretisch strengen und mit zuverlässigen Daten ausführbaren Berechnung des Volumens gesättigter Dämpfe. In diesen Gleichungen kommt nämlich die Grösse u vor, welche gleich der Differenz $s - \sigma$ ist, worin σ das specifische Volumen der Flüssigkeit bedeutet. Dieses letztere ist der Regel nach gegen s sehr klein und kann daher bei vielen Rechnungen ganz vernachlässigt werden; ausserdem aber ist es als bekannt anzusehen, so dass auch seine Berücksichtigung keine Schwierigkeit hat.

Die letzte jener Gleichungen, nämlich die Gleichung (17) lautet, wenn wir darin u durch $s - \sigma$ ersetzen:

$$r = \frac{T(s-\sigma)}{E} \cdot \frac{dp}{dT}. \tag{33}$$

Indem wir diese Gleichung nach s auflösen, erhalten wir:

$$s = \frac{Er}{T\frac{dp}{dT}} + \sigma. \tag{34}$$

Mittelst dieser Gleichung kann man für alle Stoffe, für welche die Dampfspannung p und die Verdampfungswärme r als Functionen der Temperatur bekannt sind, auch das specifische Volumen s des gesättigten Dampfes für jede Temperatur berechnen.

§. 7. Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze.

Wir wollen die vorstehenden Gleichungen zunächst dazu anwenden, zu untersuchen, ob der gesättigte Wasserdampf dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folgt, oder ob und in wie weit er davon abweicht.

Wenn der gesättigte Dampf jenen Gesetzen folgte, so müsste die nachstehende Gleichung gelten:

$$\frac{ps}{T} = \text{Const.},$$

oder auch, indem man T durch $a + t$ ersetzt, und die Gleichung mit dem constanten Factor $\frac{a}{E}$ multiplicirt:

$$\frac{1}{E} ps \frac{a}{a+t} = \text{Const.}$$

Aus der Gleichung (33) lässt sich aber, nachdem auch in ihr T durch $a+t$ ersetzt ist, folgende Gleichung ableiten:

$$(35) \qquad \frac{1}{E} p(s-\sigma) \frac{a}{a+t} = \frac{ar}{(a+t)^2 \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}}.$$

Da nun die Differenz $s-\sigma$ sehr wenig von s verschieden ist, so ist die linke Seite dieser Gleichung sehr nahe gleich der linken Seite der vorigen Gleichung, und man braucht also, um zu untersuchen, wie der gesättigte Dampf sich zum Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze verhält, nur zu prüfen, *ob der an der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Ausdruck constant ist, oder sich mit der Temperatur ändert.* Eine solche Prüfung eines Ausdruckes, ob seine aufeinander folgenden Werthe untereinander gleich sind, oder ob und in welcher Weise sie von der Gleichheit abweichen, ist besonders einfach und anschaulich, und die unter (35) gegebene Form der Gleichung ist daher für unseren gegenwärtigen Zweck sehr geeignet.

Ich habe die Werthe des Ausdruckes für eine Reihe von Temperaturen von 0° bis über 200° berechnet, indem ich dabei für r und p die von Regnault gegebenen Zahlen angewandt habe.

Was zunächst die Verdampfungswärme r anbetrifft, so habe ich von der schon unter (28) angeführten Formel

$$r = 606{\cdot}5 - 0{\cdot}695\,t - 0{\cdot}00002\,t^2 - 0{\cdot}0000003\,t^3$$

Gebrauch gemacht, wofür man ohne wesentliche Aenderung der Resultate auch die unter (30) gegebene vereinfachte Formel benutzen könnte.

Was ferner den Druck p anbetrifft, so wandte ich bei meinen Rechnungen zuerst diejenigen Zahlen an, welche Regnault in seiner bekannten grossen Tabelle zusammengestellt hat, in welcher von $-32°$ bis $+230°$ die Spannungen des Wasserdampfes von Grad zu Grad angegeben sind. Ich fand aber dabei eigenthümliche Abweichungen vom regelmässigen Verlaufe der Zahlen, welche in gewissen Temperaturintervallen einen anderen Charakter hatten, als in anderen Intervallen, und ich erkannte bald, dass der Grund dieser Abweichungen darin lag, dass Regnault seine Zahlen mittelst empirischer Formeln berechnet hat, und dass er in verschiedenen Temperaturintervallen verschiedene Formeln angewandt

hat. Demnach schien es mir zweckmässiger, mich bei meiner Untersuchung von dem Einflusse der empirischen Formeln ganz frei zu machen, und mich an diejenigen Zahlen zu halten, welche das Ergebniss der Beobachtungen in möglichster Reinheit darstellen, weil diese zur Vergleichung mit theoretischen Resultaten besonders geeignet sind.

Regnault hat, um aus seinen zahlreichen Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werthe zu erhalten, eine graphische Darstellung zu Hülfe genommen, indem er Curven construirt hat, deren Abscissen die Temperatur, und deren Ordinaten den Druck p bedeuten, und welche in verschiedenen Absätzen von -33^0 bis $+230^0$ gehen. Von 100^0 bis 230^0 hat er auch noch eine Curve gezeichnet, deren Ordinaten nicht p selbst, sondern den Logarithmus von p bedeuten. Aus dieser Darstellung haben sich folgende Werthe ergeben, welche als das unmittelbarste Resultat seiner Beobachtungen zu betrachten sind, und aus welchen auch diejenigen Werthe, die zur Berechnung seiner empirischen Formeln gedient haben, entnommen sind:

t in Cent.-Gr. des Luftthermometers.	p in Millimetern.	t in Cent.-Gr. des Luftthermometers.	p in Millimetern	
			nach der Curve der Zahlen.	nach der Curve der Logarithmen [1]).
-20^0	0·91	110^0	1073·7	1073·3
-10	2·08	120	1489·0	1490·7
0	4·60	130	2029·0	2030·5
10	9·16	140	2713·0	2711·5
20	17·39	150	3572·0	3578·5
30	31·55	160	4647·0	4651·6
40	54·91	170	5960·0	5956·7
50	91·98	180	7545·0	7537·0
60	148·79	190	9428·0	9425·4
70	233·09	200	11660·0	11679·0
80	354·64	210	14308·0	14325·0
90	525·45	220	17390·0	17390·0
100	760·00	230	20915·0	20927·0

[1]) Es sind in dieser Columne statt der durch die Curve unmittelbar gegebenen und von Regnault angeführten *Logarithmen*, die dazu gehörigen *Zahlen* mitgetheilt, um sie besser mit den Werthen der vorhergehenden Columne vergleichen zu können.

Um nun mit diesen Daten die beabsichtigte Rechnung auszuführen, habe ich zuerst nach der vorstehenden Tabelle die Werthe von $\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$ für die Temperaturen 5^0, 15^0, 25^0 etc. bestimmt, und zwar auf folgende Weise. Da die Grösse $\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$ mit wachsender Temperatur nur langsam abnimmt, habe ich die Abnahme in jedem Intervall von 10 Graden, also von 0^0 bis 10^0, von 10^0 bis 20^0 etc. als gleichförmig betrachtet, so dass ich den z. B. für 25^0 geltenden Werth als das Mittel aus allen zwischen 20^0 und 30^0 vorkommenden Werthen ansehen konnte. Dann konnte ich mich, da $\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{d(\log p)}{dt}$ ist, folgender Formel bedienen:

$$\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}\right)_{25^0} = \frac{\log p_{30} - \log p_{20}}{10}$$

oder auch:

$$\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}\right)_{25^0} = \frac{Log\, p_{30} - Log\, p_{20}}{10 . M}, \tag{36}$$

worin *Log* das Zeichen der Briggs'schen Logarithmen und *M* der Modulus dieses Systems ist. Mit Hülfe dieser Werthe von $\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$ und der durch die oben angeführte Gleichung gegebenen Werthe von r, so wie endlich des Werthes 273 von a sind die Werthe, welche die Formel auf der rechten Seite von (35) und somit auch der Ausdruck $\frac{1}{E} p (s - \sigma) \frac{a}{a + t}$ für die Temperaturen 5^0, 15^0, 25^0 etc. annimmt, berechnet und finden sich in der zweiten Columne der nachstehenden Tabelle angeführt. Bei den Temperaturen über 100^0 sind die beiden oben für p mitgetheilten Zahlenreihen einzeln benutzt, und die dadurch gefundenen doppelten Resultate neben einander gestellt. Die Bedeutung der dritten und vierten Columne wird gleich weiter unten noch näher bezeichnet werden.

1.	$\frac{1}{E}p(s-\sigma)\frac{a}{a+t}$.			4.	
t in Cent.-Gr. des Luftthermometers.	2. nach den Beobachtungswerthen.		3. nach der Gleichung (38).	Differenzen.	
5⁰	30·93		30·46	— 0·47	
15	30·60		30·38	— 0·22	
25	30·40		30·30	— 0·10	
35	30·23		30·20	— 0·03	
45	30·10		30·10	0·00	
55	29·98		30·00	+ 0·02	
65	29·88		29·88	0·00	
75	29·76		29·76	0·00	
85	29·65		29·63	— 0·02	
95	29·49		29·48	— 0·01	
105	29·47	29·50	29·33	— 0·14	— 0·17
115	29·16	29·02	29·17	+ 0·01	+ 0·15
125	28·89	28·93	28·99	+ 0·10	+ 0·06
135	28·88	29·01	28·80	— 0·08	— 0·21
145	28·65	28·40	28·60	— 0·05	+ 0·20
155	28·16	28·25	28·38	+ 0·22	+ 0·13
165	28·02	28·19	28·14	+ 0·12	— 0·05
175	27·84	27·90	27·89	+ 0·05	- 0·01
185	27·76	27·67	27·62	— 0·14	— 0·05
195	27·45	27·20	27·33	— 0·12	+ 0·13
205	26·89	26·94	27·02	+ 0·13	+ 0·08
215	26·56	26·79	26·68	+ 0·12	— 0·11
225	26·64	26·50	26·32	— 0·32	— 0·18

Man sieht in dieser Tabelle sogleich, dass $\frac{1}{E}p(s-\sigma)\frac{a}{a+t}$ nicht, wie es sein müsste, wenn das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz gültig wäre, constant ist, sondern mit der Temperatur entschieden abnimmt. Zwischen 35⁰ und 95⁰ zeigt sich diese Abnahme sehr regelmässig. Unter 35⁰ findet die Abnahme weniger regelmässig statt, was sich einfach daraus erklärt, dass hier der Druck p und sein Differentialcoefficient

$\frac{dp}{dt}$ sehr klein sind, und dass daher geringe Ungenauigkeiten in ihrer Bestimmung, die ganz in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen, doch *verhältnissmässig* bedeutend werden können. Ueber 100° hinaus nehmen die Werthe dieses Ausdrucks ebenfalls nicht so regelmässig ab, wie zwischen 35° und 95°, doch zeigen sie wenigstens im *Allgemeinen* einen entsprechenden Gang, und besonders, wenn man eine graphische Darstellung ausführt, findet man, dass die Curve, welche innerhalb jenes Intervalls fast genau die Punkte verbindet, welche durch die in der Tabelle enthaltenen Zahlen bestimmt werden, sich auch darüber hinaus bis 230° ganz natürlich so fortsetzen lässt, dass diese Punkte gleichmässig auf beiden Seiten vertheilt liegen.

Der Gang dieser Curve kann in der ganzen Ausdehnung der Tabelle ziemlich genau durch eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{E} p (s - \sigma) \frac{a}{a + t} = m - n e^{kt} \tag{37}$$

ausgedrückt werden, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und m, n und k Constante sind. Wenn die letzteren aus den Werthen, welche die Curve für 45°, 125° und 205° giebt, bestimmt werden, so kommt:

$$m = 31{\cdot}549;\quad n = 1{\cdot}0486;\quad k = 0{\cdot}007138, \tag{37a}$$

und wenn man zur Bequemlichkeit noch Briggs'sche Logarithmen einführt, so erhält man:

$$Log\left[31{\cdot}549 - \frac{1}{E} p (s - \sigma) \frac{a}{a + t}\right] = 0{\cdot}0206 + 0{\cdot}003100\, t. \tag{38}$$

Nach dieser Gleichung sind die in der dritten Columne enthaltenen Zahlen berechnet, und in der vierten sind die Differenzen hinzugefügt, welche diese Zahlen mit den in der zweiten befindlichen bilden.

§. 8. Differentialcoefficienten von $\frac{ps}{ps_0}$.

Aus dem Vorstehenden lässt sich nun leicht eine Formel ableiten, aus welcher man noch bestimmter erkennen kann, in welcher Weise das Verhalten des Dampfes vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze abweicht. Unter Annahme dieser Gesetze

würde man, wenn ps_0 den bei 0° geltenden Werth von ps bedeutet, setzen können:

$$\frac{ps}{ps_0} = \frac{a+t}{a},$$

und würde also für den Differentialcoefficienten $\frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right)$ eine constante Grösse, nämlich den bekannten Ausdehnungscoefficienten $\frac{1}{a} = 0{\cdot}003665$ erhalten. Statt dessen ergiebt sich aus (37), wenn man darin für $s - \sigma$ einfach s setzt, die Gleichung:

$$(39)\qquad \frac{ps}{ps_0} = \frac{m - n \, . \, e^{kt}}{m-n} \cdot \frac{a+t}{a},$$

und daraus folgt:

$$(40)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{m - n\,[1 + k(a+t)]\,e^{kt}}{m-n}.$$

Der Differentialcoefficient ist also nicht eine Constante, sondern eine mit wachsender Temperatur abnehmende Function, welche, nachdem man für m, n und k die in (37a) mitgetheilten Zahlen eingesetzt hat, unter anderen folgende Werthe annimmt:

t.	$\frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right)$.	t.	$\frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right)$.	t.	$\frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right)$.
0°	0·00342	70°	0·00307	140°	0·00244
10	0·00338	80	0·00300	150	0·00231
20	0·00334	90	0·00293	160	0·00217
30	0·00329	100	0·00285	170	0·00203
40	0·00325	110	0·00276	180	0·00187
50	0·00319	120	0·00266	190	0·00168
60	0·00314	130	0·00256	200	0·00149

Man sieht hieraus, dass die Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze bei niedrigen Temperaturen nur gering sind, bei höheren aber, z. B. bei 100° und darüber hinaus, nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Es kann vielleicht auf den ersten Blick auffallend erscheinen, dass die gefundenen Werthe von $\frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right)$ *kleiner* sind, als 0·003665,

während man doch weiss, dass bei denjenigen Gasen, welche beträchtlich vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze abweichen, wie die Kohlensäure und die schweflige Säure, der Ausdehnungscoefficient nicht *kleiner*, sondern *grösser* ist, als jene Zahl. Man darf jedoch den vorher berechneten Differentialcoefficienten nicht ganz gleichstellen mit dem Ausdehnungscoefficienten im *wörtlichen* Sinne, welcher sich auf die Vermehrung des Volumens bei *constantem Drucke* bezieht, auch nicht mit der Zahl, welche man erhält, wenn man bei der Erwärmung das *Volumen constant* lässt, und dann die Zunahme der Expansivkraft beobachtet, sondern es handelt sich hier um einen dritten besonderen Fall des allgemeinen Differentialcoefficienten $\frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right)$, nämlich um den, wo zugleich mit der Erwärmung der Druck in so starkem Verhältnisse wächst, wie es beim Wasserdampfe geschieht, wenn dieser im Maximum seiner Dichte bleibt; und diesen Fall müssen wir auch bei der Kohlensäure betrachten, wenn wir eine Vergleichung anstellen wollen.

Der Wasserdampf hat bei etwa 108° eine Spannkraft von 1 m und bei 129½° eine solche von 2 m. Wir wollen daher untersuchen, wie sich die Kohlensäure verhält, wenn sie sich auch um 21½° erwärmt, und dabei der Druck von 1 m bis 2 m vermehrt wird. Nach Regnault[1]) ist der Ausdehnungscoefficient der Kohlensäure bei constantem Drucke, wenn dieser 760 mm beträgt, 0·003710, und wenn er 2520 mm beträgt, 0·003846. Für einen Druck von 1500 mm (dem Mittel zwischen 1 m und 2 m) erhält man daraus, wenn man die Zunahme des Ausdehnungscoefficienten als proportional der Druckzunahme betrachtet, den Werth 0·003767. Würde also die Kohlensäure unter diesem mittleren Drucke von 0° bis 21½° erwärmt, so würde dabei die Grösse $\frac{pv}{pv_0}$ von 1 zu $1 + 0{\cdot}003767 \times 21{\cdot}5 = 1{\cdot}08099$ anwachsen. — Ferner ist aus anderen Versuchen von Regnault[2]) bekannt, dass wenn Kohlensäure, welche sich bei einer Temperatur von nahe 0° unter dem Drucke von 1 m befunden hat, mit einem Drucke von 1·98292 m belastet wird, dabei die Grösse pv im Verhältnisse von 1 : 0·99146 abnimmt, woraus sich bei einer Druckvermehrung von 1 m zu 2 m

---

[1]) *Relation des expériences, t. I, Mem. I.*

[2]) Ebendas. *t. I, Mem. VI.*

eine Abnahme im Verhältnisse von 1 : 0·99131 ergiebt. — Wenn nun beides gleichzeitig stattfindet, die Temperaturerhöhung von 0° bis $21\frac{1}{2}°$ und die Druckzunahme von 1 m zu 2 m, so muss dabei die Grösse $\frac{pv}{pv_0}$ sehr nahe von 1 zu 1·08099 × 0·99131 = 1·071596 anwachsen, und daraus erhält man als mittleren Werth des Differentialcoefficienten $\frac{d}{dt}\left(\frac{pv}{pv_0}\right)$:

$$\frac{0{\cdot}071596}{21{\cdot}5} = 0{\cdot}00333.$$

Man sieht also, dass man für den Fall, auf den es hier ankommt, schon bei der Kohlensäure einen Werth erhält, der kleiner als 0·003665 ist, und es kann daher jenes Resultat beim Dampfe *im Maximum seiner Dichte* um so weniger befremden.

Wollte man dagegen den eigentlichen Ausdehnungscoefficienten des Dampfes bestimmen, also die Zahl, welche angiebt, um wie viel ein Dampfquantum sich ausdehnt, wenn es bei einer bestimmten Temperatur im Maximum seiner Dichte genommen, und dann, getrennt von Wasser, unter constantem Drucke erwärmt wird, so würde man gewiss einen Werth erhalten, der *grösser* und vielleicht *beträchtlich* grösser wäre, als 0·003665.

§. 9. Formel zur Bestimmung des specifischen Volumens des gesättigten Wasserdampfes, und Vergleichung derselben mit der Erfahrung.

Aus der Gleichung (37) und ebenso aus der Gleichung (34) lassen sich die *relativen* Werthe von $s - \sigma$ und daher auch mit grosser Annäherung von s für verschiedene Temperaturen berechnen, ohne dass man das mechanische Aequivalent der Wärme E zu kennen braucht. Will man aber aus diesen Gleichungen die *absoluten* Werthe von s berechnen, so muss entweder E bekannt sein, oder man muss suchen, mit Hülfe eines anderen Datums E zu eliminiren.

Zu der Zeit, als ich zuerst diese Rechnungen ausführte, waren für E von Joule mehrere aus verschiedenen Versuchsarten abgeleitete Werthe angegeben, welche ziemlich weit von einander abwichen, und Joule hätte sich noch nicht darüber ausgesprochen, welchen dieser Werthe er für den wahrscheinlichsten hielt. Wegen

dieser Unsicherheit schien es mir zweckmässig, zur Bestimmung der absoluten Werthe von s einen anderen Anhaltspunkt zu suchen, und ich glaube, dass das von mir gewählte Verfahren auch jetzt noch genügendes Interesse besitzt, um es hier mittheilen zu dürfen.

Man drückt bekanntlich das specifische Gewicht der Gase und Dämpfe gewöhnlich in der Weise aus, dass man das Gewicht einer Volumeneinheit des Gases oder Dampfes mit dem Gewichte einer Volumeneinheit atmosphärischer Luft unter demselben Drucke und bei derselben Temperatur vergleicht. Ebenso kann man das specifische Volumen in der Weise ausdrücken, dass man das Volumen einer Gewichtseinheit des Gases oder Dampfes mit dem Volumen einer Gewichtseinheit atmosphärischer Luft unter demselben Drucke und bei derselben Temperatur vergleicht. Wenden wir dieses Letztere auf den gesättigten Dampf an, für welchen wir das Volumen einer Gewichtseinheit mit s bezeichnet haben, und bezeichnen wir ferner das Volumen einer Gewichtseinheit atmosphärischer Luft unter demselben Drucke und bei derselben Temperatur mit v', so wird die in Rede stehende Grösse durch den Bruch $\frac{s}{v'}$ dargestellt.

Für s ergiebt sich aus (37), wenn wir darin σ vernachlässigen, der Ausdruck:

$$s = \frac{E(a+t)}{ap}(m - ne^{kt}). \tag{41}$$

Für v' können wir nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze die Gleichung:

$$v' = R'\frac{a+t}{p}$$

bilden. Durch Division dieser beiden Gleichungen durch einander erhalten wir:

$$\frac{s}{v'} = \frac{E}{R'a}(m - ne^{kt}). \tag{42}$$

Bilden wir dieselbe Gleichung für irgend eine specielle Temperatur, welche wir mit t_0 bezeichnen wollen, und bezeichnen auch den betreffenden Werth des Bruches $\frac{s}{v'}$ mit $\left(\frac{s}{v'}\right)_0$, so kommt:

$$\left(\frac{s}{v'}\right)_0 = \frac{E}{R'a}(m - ne^{kt_0}).$$

Indem wir mit Hülfe dieser Gleichung aus der vorigen den constanten Factor $\frac{E}{R'a}$ eliminiren, erhalten wir:

$$\frac{s}{v'} = \left(\frac{s}{v'}\right)_0 \frac{m - ne^{kt}}{m - ne^{kt_0}}. \tag{43}$$

Es fragt sich nun, ob man für irgend eine Temperatur t_0 die Grösse $\left(\frac{s}{v'}\right)_0$ oder ihren reciproken Werth $\left(\frac{v'}{s}\right)_0$, welcher das specifische Gewicht des Dampfes bei der Temperatur t_0 bedeutet, mit genügender Sicherheit bestimmen kann.

Die gewöhnlich für die specifischen Gewichte der Dämpfe angeführten Werthe sind nicht an gesättigten, sondern an stark überhitzten Dämpfen beobachtet. Sie stimmen, wie man weiss, ziemlich gut mit den theoretischen Werthen überein, welche man aus dem bekannten Gesetze über die Beziehung zwischen dem Volumen eines zusammengesetzten Gases und den Volumen seiner gasförmigen Bestandtheile ableiten kann. So hat z. B. Gay-Lussac für das specifische Gewicht des Wasserdampfes experimentell den Werth 0·6235 gefunden, und der theoretische Werth, welchen man erhält, wenn man annimmt, dass zwei Maass Wasserstoff und ein Maass Sauerstoff bei ihrer Verbindung zwei Maass Wasserdampf geben, ist:

$$\frac{2 \times 0{\cdot}06926 + 1{\cdot}10563}{2} = 0{\cdot}622.$$

Diesen Werth des specifischen Gewichtes darf man aber auf den *gesättigten* Wasserdampf nicht allgemein anwenden, indem sich aus der Tabelle des vorigen Paragraphen, welche die Werthe von $\frac{d}{dt}\left(\frac{ps}{ps_0}\right)$ enthält, zu grosse Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze ergeben. Nun zeigt aber andererseits jene Tabelle, dass die Abweichungen um so geringer werden, je niedriger die Temperatur wird, und man wird daher nur noch einen unbedeutenden Fehler begehen, wenn man annimmt, dass der gesättigte Wasserdampf bei der Temperatur des Gefrierpunktes dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze schon hinlänglich folge, um für diese Temperatur das specifische Gewicht gleich 0·622 setzen zu dürfen. Streng genommen müsste man noch weiter gehen, und die Temperatur, für welche das specifische Gewicht des gesättigten Wasserdampfes den theoretischen Werth annimmt, noch tiefer, als den Gefrierpunkt, setzen. Da es aber bedenklich sein würde, die Gleichung (37), welche nur eine empirische Formel enthält, für so tiefe Temperaturen noch in Anwendung zu bringen, so wollen wir uns mit jener Annahme begnügen.

Indem wir also für t_0 den Werth 0 anwenden, und zugleich setzen:

$$\left(\frac{v'}{s}\right)_0 = 0{\cdot}622 \text{ und daher: } \left(\frac{s}{v'}\right)_0 = \frac{1}{0{\cdot}622},$$

geht die Gleichung (43) über in:

(44) $$\frac{s}{v'} = \frac{m - ne^{kt}}{0{\cdot}622\,(m-n)},$$

aus welcher Gleichung man unter Anwendung der in (37a) gegebenen Werthe von m, n und k die Grösse $\frac{s}{v'}$ und somit auch die Grösse s für jede Temperatur berechnen kann.

Man kann der vorstehenden Gleichung noch eine für die Rechnung bequemere Form geben, indem man setzt:

(45) $$\frac{s}{v'} = M - N\alpha^t,$$

und den Constanten M, N und α folgende aus den Werthen von m, n und k berechnete Werthe giebt:

(45a) $M = 1{\cdot}6630$; $N = 0{\cdot}05527$; $\alpha = 1{\cdot}007164$.

Um von dem Verhalten dieser Formel eine Anschauung zu geben, sind in der folgenden Tabelle einige Werthe von $\frac{s}{v'}$ und auch von dem reciproken Werthe $\frac{v'}{s}$, welchen wir kürzer durch den schon früher für das specifische Gewicht angewandten Buchstaben d bezeichnen wollen, zusammengestellt.

t	0°	50°	100°	150°	200°
$\frac{s}{v'}$	1·608	1·585	1·550	1·502	1·433
d	0·622	0·631	0·645	0·666	0·698

Das Resultat, dass der gesättigte Wasserdampf von dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze, welche man bis dahin allgemein auf ihn angewandt hatte, so weit abweiche, wie es in den obigen Formeln und Tabellen ausgedrückt ist, fand, wie schon an einer andern Stelle gelegentlich erwähnt wurde, anfangs energischen Widerspruch, selbst von sehr competenter Seite. Gegenwärtig wird es aber, wie ich glaube, ziemlich allgemein als richtig anerkannt.

Auch eine experimentelle Bestätigung hat es erfahren durch die im Jahre 1860 veröffentlichten Untersuchungen von **Fairbairn** und **Tate**[1]), deren Beobachtungsresultate in der nachstehenden Tabelle einerseits mit den früher angenommenen Zahlen, bei welchen für alle Temperaturen das specifische Gewicht 0·622 vorausgesetzt ist, und andererseits mit den aus der Gleichung (45) hervorgehenden Zahlen verglichen sind.

Temperatur in Centesimal-Graden.	Volumen eines Kilogramm gesättigten Wasserdampfes in Cubikmetern		
	früher angenommene Werthe.	nach der Gleichung (45).	nach den Beobachtungen.
58·21°	8·38	8·23	8·27
68·52	5·41	5·29	5·33
70·76	4·94	4·83	4·91
77·18	3·84	3·74	3·72
77·49	3·79	3·69	3·71
79·40	3·52	3·43	3·43
83·50	3·02	2·94	3·05
86·83	2·68	2·60	2·62
92·66	2·18	2·11	2·15
117·17	0·991	0·947	0·941
118·23	0·961	0·917	0·906
118·46	0·954	0·911	0·891
124·17	0·809	0·769	0·758
128·41	0·718	0·681	0·648
130·67	0·674	0·639	0·634
131·78	0·654	0·619	0·604
134·87	0·602	0·569	0·583
137·46	0·562	0·530	0·514
139·21	0·537	0·505	0·496
141·81	0·502	0·472	0·457
142·36	0·495	0·465	0·448
144·74	0·466	0·437	0·432

[1]) *Proc. of the Royal Soc. 1860* und *Phil. Mag. Ser. 4, Vol. XXI.*

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die beobachteten Werthe viel besser mit den aus meiner Gleichung berechneten, als mit den früher angenommenen Werthen stimmen, und dass die Differenzen, welche zwischen den Beobachtungswerthen und den Werthen meiner Formel noch vorkommen, sogar meistens in dem Sinne stattfinden, dass die Beobachtungswerthe von den früher angenommenen Werthen noch weiter abweichen, als die Werthe meiner Formel.

§. 10. Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme aus dem Verhalten des gesättigten Dampfes.

Nachdem wir die absoluten Werthe von s bestimmt haben, ohne das mechanische Aequivalent der Wärme als bekannt vorauszusetzen, können wir nun umgekehrt, unter Anwendung dieser Werthe, die Gleichung (17) dazu benutzen, das mechanische Aequivalent der Wärme zu bestimmen, indem wir dieser Gleichung folgende Form geben:

$$(46) \qquad E = \frac{(a+t)\frac{dp}{dt}}{r}(s-\sigma).$$

Der in dieser Gleichung als Factor von $s - \sigma$ stehende Bruch lässt sich nach den von Regnault festgestellten Zahlen für verschiedene Temperaturen berechnen. Will man ihn z. B. für 100° berechnen, so hat man nach Regnault für $\frac{dp}{dt}$, wenn der Druck in Millimetern Quecksilber dargestellt wird, den Werth 27·20. Um diese Zahl auf das hier anzuwendende Druckmaass, nämlich Kilogramme auf ein Quadratmeter, zu reduciren, muss man sie mit dem Gewichte einer bei der Temperatur 0° genommenen Quecksilbersäule von ein Quadratmeter Grundfläche und ein Millimeter Höhe, also mit dem Gewichte eines Cubikdecimeter Quecksilber von 0° multipliciren. Da dieses Gewicht nach Regnault in Kilogrammen 13·596 beträgt, so erhält man die Zahl 369·8. Ferner hat man $a + t$ und r für 100° gleich 373 und 536·5 zu setzen. Daraus ergiebt sich:

$$\frac{(a+t)\frac{dp}{dt}}{r} = \frac{373 \times 369{\cdot}8}{536{\cdot}5} = 257,$$

und somit geht (46) über in:

(47) $$E = 257\,(s - \sigma).$$

Es kommt nun darauf an, die Grösse $s - \sigma$ oder, da σ bekannt ist, die Grösse s für Wasserdampf von 100° zu bestimmen. Das früher übliche Verfahren, dasselbe specifische Gewicht, welches man für überhitzten Dampf experimentell gefunden oder theoretisch aus der Zusammensetzung des Wassers abgeleitet hatte, auch auf den gesättigten Dampf anzuwenden, führte zu dem Ergebnisse, dass ein Kilogramm Wasserdampf bei 100° einen Raum von 1·696 Cubikmeter einnehme. Dieser Werth muss aber dem Obigen nach beträchtlich zu gross sein, und muss daher auch einen zu grossen Werth des mechanischen Aequivalentes der Wärme geben. Nimmt man dagegen dasjenige specifische Gewicht, welches sich aus der Gleichung (45) berechnen lässt, und welches für 100° gleich 0·645 ist, als angenähert richtig an, so erhält man für s den Werth 1·638.

Unter Anwendung dieses Werthes von s geht die Gleichung (47) über in:

(48) $$E = 421.$$

Man erhält also auf diese Weise für das mechanische Aequivalent der Wärme einen Werth, welcher mit dem von Joule durch Reibung des Wassers gefundenen und dem in Abschnitt II. aus dem Verhalten der Gase abgeleiteten Werthe, die beide nahe gleich 424 sind, in ganz befriedigender Weise übereinstimmt. Diese Uebereinstimmung kann als eine Bestätigung unserer über die Dichtigkeit des gesättigten Dampfes angestellten Betrachtungen dienen.

§. 11. Vollständige Differentialgleichung von Q für einen aus Flüssigkeit und Dampf bestehenden Körper.

Im §. 1 dieses Abschnittes hatten wir für einen aus Flüssigkeit und Dampf bestehenden Körper die beiden ersten Differentialcoefficienten von Q durch folgende, dort unter (7) und (8) gegebene Gleichungen bestimmt:

$$\frac{dQ}{dm} = \varrho$$

$$\frac{dQ}{dT} = m(H - C) + MC.$$

Hieraus lässt sich sofort die vollständige Differentialgleichung erster Ordnung von Q bilden, nämlich:

$$dQ = \varrho dm + \left[m(H - C) + MC\right] dT. \quad (49)$$

Nun ist, gemäss der Gleichung (12), zu setzen:

$$H - C = \frac{d\varrho}{dT} - \frac{\varrho}{T},$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$dQ = \varrho dm + \left[m\left(\frac{d\varrho}{dT} - \frac{\varrho}{T}\right) + MC\right] dT, \quad (50)$$

welche Gleichung man, da ϱ nur eine Function von T und folglich $\frac{d\varrho}{dT} dT$ gleich $d\varrho$ ist, auch so schreiben kann:

$$dQ = d(m\varrho) + \left(-\frac{m\varrho}{T} + MC\right) dT, \quad (51)$$

oder noch kürzer:

$$dQ = Td\left(\frac{m\varrho}{T}\right) + MCdT. \quad (52)$$

Diese Gleichungen sind, so lange die beiden Grössen, deren Differentiale an der rechten Seite vorkommen, von einander unabhängig sind, und somit der Weg der Veränderungen unbestimmt gelassen ist, nicht integrabel. Sie werden aber integrabel, sobald auf irgend eine Weise der Weg der Veränderungen bestimmt wird. Man kann daher mit ihnen ganz ähnliche Rechnungen anstellen, wie die, welche in Abschnitt II. für Gase ausgeführt wurden.

Wir wollen beispielsweise einen Fall behandeln, welcher einerseits an sich von Wichtigkeit ist, und andererseits dadurch an Interesse gewinnt, dass er in der Dampfmaschinentheorie eine wesentliche Rolle spielt. Wir wollen nämlich annehmen, die aus Flüssigkeit und Dampf bestehende Masse ändere ihr Volumen, *ohne dass ihr dabei Wärme mitgetheilt oder entzogen werde.* Bei dieser Volumenänderung erleidet auch die Temperatur und die Grösse des dampfförmigen Theiles eine Aenderung, und zugleich wird eine positive oder negative äussere Arbeit gethan. *Es sollen nun unter diesen Umständen die Grösse des dampfförmigen Theiles m, das Volumen v und die äussere Arbeit W als Functionen der Temperatur bestimmt werden.*

§. 12. Veränderung des dampfförmigen Theiles der Masse.

Da die in dem Gefässe befindliche Masse keine Wärme empfangen oder abgeben soll, so haben wir $dQ = 0$ zu setzen. Indem wir dieses in der Gleichung (52) thun, erhalten wir:

$$Td\left(\frac{m\varrho}{T}\right) + MCdT = 0. \tag{53}$$

Denken wir uns beide Glieder dieser Gleichung durch E dividirt, so gehen dadurch die Grössen ϱ und C, welche sich auf *mechanisches* Wärmemaass beziehen, in die Grössen r und c über, welche sich auf *gewöhnliches* Wärmemaass beziehen. Dividiren wir zugleich noch die beiden Glieder durch T, so lautet die Gleichung:

$$d\left(\frac{mr}{T}\right) + Mc\frac{dT}{T} = 0. \tag{53a}$$

Das erste Glied dieser Gleichung, welches ein einfaches Differential ist, lässt sich natürlich sofort integriren, und auch im letzten Gliede ist, da c nur von der Temperatur T abhängt, die Integration immer ausführbar. Wenn wir diese Integration vorläufig nur andeuten, und die auf den Anfangszustand bezüglichen Werthe aller vorkommenden Grössen zur Unterscheidung mit dem Index 1 versehen, so lautet die entstehende Gleichung:

$$\frac{mr}{T} - \frac{m_1 r_1}{T_1} + M\int_{T_1}^{T} c\frac{dT}{T} = 0,$$

oder anders geordnet:

$$\frac{mr}{T} = \frac{m_1 r_1}{T_1} - M\int_{T_1}^{T} c\frac{dT}{T}. \tag{54}$$

Zur wirklichen Ausführung der angedeuteten Integration kann man für c die von Regnault aufgestellten empirischen Formeln anwenden. Beim Wasser lautet die schon unter (27) angeführte Regnault'sche Formel:

$$c = 1 + 0{\cdot}00004\,t + 0{\cdot}0000009\,t^2.$$

Da sich hiernach c mit der Temperatur sehr wenig ändert, so wollen wir in den hier folgenden auf Wasser bezüglichen Rechnungen c als constant betrachten, was auf die Genauigkeit der

Resultate nur einen unerheblichen Einfluss haben kann. Dadurch geht (54) über in:

$$(55) \qquad \frac{mr}{T} = \frac{m_1 r_1}{T_1} - Mc \log \frac{T}{T_1},$$

woraus weiter folgt:

$$(56) \qquad m = \frac{T}{r}\left(\frac{m_1 r_1}{T_1} - Mc \log \frac{T}{T_1}\right).$$

Wenn wir hierin für r den Ausdruck setzen, welcher unter (28) und in vereinfachter Form unter (30) gegeben ist, so ist m als Function der Temperatur bestimmt.

Um von dem Verhalten dieser Function eine ungefähre Anschauung zu geben, habe ich einige für einen besonderen Fall berechnete Werthe in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Es ist nämlich angenommen, das Gefäss enthalte zu Anfange kein tropfbar flüssiges Wasser, sondern sei gerade mit Wasserdampf vom Maximum der Dichte angefüllt, so dass also in der vorigen Gleichung $m_1 = M$ zu setzen ist, und es finde nun eine Ausdehnung des Gefässes statt. Wenn das Gefäss zusammengedrückt werden sollte, so dürfte man die Annahme, dass zu Anfange kein flüssiges Wasser vorhanden sei, nicht machen, weil dann der Dampf nicht im Maximum der Dichte bleiben, sondern durch die bei der Zusammendrückung erzeugte Wärme überhitzt werden würde. Bei der Ausdehnung dagegen bleibt der Dampf nicht nur im Maximum der Dichte, sondern es schlägt sich sogar ein Theil desselben nieder, und die dadurch entstehende Verminderung von m ist es eben, um welche es sich in der Tabelle handelt. Die anfängliche Temperatur ist zu 150° C. angenommen, und es sind für die Zeitpunkte, wo die Temperatur durch die Ausdehnung auf 125°, 100° etc. gesunken ist, die entsprechenden Werthe von $\frac{m}{M}$ angegeben. Die vom Gefrierpunkte ab gezählte Temperatur ist, wie schon früher, zum Unterschiede von der durch T dargestellten absoluten Temperatur, mit t bezeichnet:

t	150°	125°	100°	75°	50°	25°
$\frac{m}{M}$	1	0·956	0·911	0·866	0·821	0·776

§. 13. Beziehung zwischen Volumen und Temperatur.

Um die zwischen dem Volumen v und der Temperatur stattfindende Beziehung auszudrücken, hat man zunächst die Gleichung (5), nämlich:

$$v = mu + M\sigma.$$

Die hierin vorkommende Grösse σ, welche das Volumen einer Gewichtseinheit Flüssigkeit bedeutet, ist als Function der Temperatur bekannt, und dasselbe gilt natürlich auch von dem Producte $M\sigma$. Es kommt also nur noch darauf an, das Product mu zu bestimmen. Dazu braucht man nur in der Gleichung (55) für r den in (17) gegebenen Ausdruck zu substituiren, wodurch man erhält:

$$(57) \qquad \frac{mu}{E} \cdot \frac{dp}{dT} = \frac{m_1 r_1}{T_1} - Mc \log \frac{T}{T_1},$$

und somit:

$$(58) \qquad mu = \frac{E}{\frac{dp}{dT}} \left(\frac{m_1 r_1}{T_1} - Mc \log \frac{T}{T_1} \right).$$

Der hierin vorkommende Differentialcoefficient $\frac{dp}{dT}$ ist als bekannt anzusehen, wenn p selbst als Function der Temperatur bekannt ist, und somit ist durch diese Gleichung das Product mu bestimmt, und aus ihm erhält man durch Addition von $M\sigma$ die gesuchte Grösse v.

In der folgenden Tabelle ist wieder eine Reihe von Werthen des Bruches $\frac{v}{v_1}$ zusammengestellt, welche sich für denselben Fall, auf den sich die vorige Tabelle bezieht, aus dieser Gleichung ergeben. Ausserdem sind zur Vergleichung noch diejenigen Werthe von $\frac{v}{v_1}$ hinzugefügt, welche man erhalten würde, wenn die beiden bisher in der Dampfmaschinentheorie gewöhnlich gemachten Annahmen richtig wären, 1. dass der Dampf bei der Ausdehnung, ohne sich theilweise niederzuschlagen, gerade im Maximum der Dichte bleibe, 2. dass er dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folge; nach welchen Annahmen

$$\frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p} \cdot \frac{T}{T_1}$$

sein würde.

t	150°	125°	100°	75°	50°	25°
$\frac{v}{v_1}$	1	1·88	3·90	9·23	25·7	88·7
$\frac{p_1}{p} \cdot \frac{T}{T_1}$	1	1·93	4·16	10·21	29·7	107·1

§. 14. Bestimmung der Arbeit als Function der Temperatur.

Es bleibt endlich noch die bei der Volumenänderung gethane Arbeit zu bestimmen. Dazu haben wir allgemein die Gleichung:

$$W = \int_{v_1}^{v} p dv. \tag{59}$$

Nun ist nach Gleichung (5), wenn wir darin die überhaupt nur kleine und dabei sehr wenig veränderliche Grösse σ als constant betrachten:

$$dv = d(mu),$$

also

$$pdv = pd(mu),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$pdv = d(mup) - mu \frac{dp}{dT} dT. \tag{60}$$

Hierin könnte man für $mu \frac{dp}{dT}$ den aus Gleichung (57) hervorgehenden Ausdruck setzen, und dann die Integration ausführen. Indessen erhält man das Resultat gleich in einer etwas bequemeren Form durch folgende Substitution. Nach (13) ist:

$$mu \frac{dp}{dT} dT = \frac{m\varrho}{T} dT,$$

und in Folge von (53) kann man setzen:

$$\frac{m\varrho}{T} dT = d(m\varrho) + MCdT,$$

und somit der vorigen Gleichung folgende Gestalt geben:

$$mu \frac{dp}{dT} dT = d(m\varrho) + MCdT.$$

Dadurch geht (60) über in:

$$(61)\qquad \begin{aligned} p\,dv &= d(mup) - d(m\varrho) - MC\,dT \\ &= -\,d[m(\varrho - up)] - MC\,dT, \end{aligned}$$

und durch Integration dieser Gleichung erhält man:

$$(62)\qquad W = m_1(\varrho_1 - u_1p_1) - m(\varrho - up) + MC(T_1 - T).$$

Setzt man hierin noch, gemäss (14), für ϱ und C die Producte Er und Ec, und fasst dann die Glieder, welche E als Factor enthalten, zusammen, so kommt:

$$(63)\qquad W = mup - m_1u_1p_1 + E[m_1r_1 - mr + Mc(T_1 - T)],$$

woraus sich, da die Grössen mr und mu schon durch die vorigen Gleichungen bekannt sind, W berechnen lässt.

Auch diese Rechnung habe ich für den obigen speciellen Fall ausgeführt, wobei sich für $\frac{W}{M}$, d. h. für die von der Gewichtseinheit bei der Ausdehnung gethane Arbeit, die in der Tabelle angeführten Werthe ergeben haben. Als Gewichtseinheit ist ein Kilogramm und als Arbeitseinheit ein Kilogramm-Meter gewählt. Für E ist der von Joule gefundene Werth 423·55 angewandt.

Zur Vergleichung mit den Zahlen der Tabelle will ich noch anführen, dass man für diejenige Arbeit, welche während der Verdampfung selbst dadurch gethan wird, dass der sich bildende Dampf den äusseren Gegendruck überwindet, in dem Falle, wo 1 Kilogr. Wasser bei der Temperatur 150° und unter dem entsprechenden Drucke verdampft, den Werth 18 700 erhält.

t	150°	125°	100°	75°	50°	25°
$\frac{W}{M}$	0	11 300	23 200	35 900	49 300	63 700

ABSCHNITT VII.

Schmelzprocess und Verdampfung fester Körper.

§. 1. Hauptgleichungen für den Schmelzprocess.

Während man bei der Verdampfung den Einfluss des äusseren Druckes längst kannte und in allen Untersuchungen berücksichtigte, hatte man bei der Schmelzung diesen Einfluss früher nicht beachtet, weil er sich hier viel weniger bemerklich macht. Indessen lässt schon eine oberflächliche Betrachtung erkennen, dass, wenn beim Schmelzen das Volumen des Körpers sich ändert, der äussere Druck einen Einfluss auf den Vorgang haben muss. Nimmt das Volumen des Körpers beim Schmelzen zu, so wird durch eine Vermehrung des Druckes das Schmelzen erschwert, und man kann daher schliessen, dass bei grösserem Drucke eine höhere Temperatur zum Schmelzen erforderlich ist, als bei geringerem Drucke. Nimmt dagegen das Volumen beim Schmelzen ab, so wird durch Vermehrung des Druckes das Schmelzen erleichtert, und die zum Schmelzen erforderliche Temperatur wird daher um so niedriger sein, je grösser der Druck ist.

Um nun aber den Zusammenhang zwischen Druck und Schmelzpunkt und die etwaigen sonstigen mit der Druckänderung zusammenhängenden Aenderungen näher bestimmen zu können, müssen wir die Gleichungen aufstellen, welche aus den beiden Hauptsätzen

der mechanischen Wärmetheorie für den Schmelzprocess hervorgehen.

Dazu verfahren wir ebenso, wie bei der Verdampfung. Wir denken uns in einem ausdehnsamen Gefässe eine Menge M eines Stoffes enthalten, welcher sich zum Theil im festen, zum Theil im flüssigen Zustande befinde. Der flüssige Theil habe die Grösse m und demgemäss der feste Theil die Grösse $M-m$. Beide zusammen sollen den Rauminhalt des Gefässes vollständig ausfüllen, so dass dieser Rauminhalt zugleich das Volumen v des Körpers ist.

Wenn dieses Volumen v und die Temperatur T des Körpers gegeben sind, so ist damit auch die Grösse m bestimmt. Um dieses nachzuweisen, wollen wir zunächst die Voraussetzung machen, dass beim Schmelzen das Volumen des Körpers sich vergrössere. Der Körper sei in einem Zustande gegeben, in welchem die Temperatur T gerade die dem stattfindenden Drucke entsprechende Schmelztemperatur ist. Wenn die in diesem Zustande vorhandene Grösse des flüssigen Theiles auf Kosten des festen wüchse, so würde durch das damit verbundene Ausdehnungsbestreben der Druck des Körpers gegen die Gefässwände und demgemäss auch der Gegendruck dieser Wände zunehmen. Durch diesen vermehrten Druck würde der Schmelzpunkt steigen, und da dann die vorhandene Temperatur tiefer wäre, als der Schmelzpunkt, so müsste wieder ein Gefrieren des flüssigen Theiles beginnen. Wenn umgekehrt der feste Theil auf Kosten des flüssigen wüchse, so würde der Druck abnehmen und demgemäss der Schmelzpunkt sinken, und da alsdann die vorhandene Temperatur höher wäre, als der Schmelzpunkt, so müsste wieder ein Schmelzen des festen Theiles beginnen. Machen wir die entgegengesetzte Voraussetzung, dass beim Schmelzen das Volumen des Körpers sich verkleinere, so würden wir bei der Zunahme des festen Theiles eine Druckvermehrung und dadurch wieder ein theilweises Schmelzen und bei der Zunahme des flüssigen Theiles eine Druckverminderung und dadurch wieder ein theilweises Gefrieren erhalten. Es ergiebt sich also unter beiden Voraussetzungen das Resultat, dass nur die ursprünglich vorhandenen Grössen des flüssigen und festen Theiles, welche denjenigen Druck bedingen, zu welchem eine Schmelztemperatur gehört, die der gegebenen Temperatur gleich ist, für die Dauer bestehen können.

Ebenso, wie dem Vorigen nach durch die Temperatur und das Volumen die Grösse m mit bestimmt wird, wird auch durch die

Temperatur und die Grösse m das Volumen mit bestimmt, und wir können T und m als diejenigen Veränderlichen wählen, welche zur Bestimmung des Zustandes des Körpers dienen sollen. Dabei ist dann p als eine Function von T allein anzusehen. Es kommen also auch hier wieder die Gleichungen zur Anwendung, welche im vorigen Abschnitte unter (1), (2) und (3) angeführt sind, nämlich:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) - \frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dm}$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) - \frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dm}$$

$$\frac{dQ}{dm} = T\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dm}.$$

Bezeichnen wir nun das specifische Volumen (das Volumen der Gewichtseinheit) für den flüssigen Zustand des Körpers, wie früher, mit σ, und das specifische Volumen für den festen Zustand mit τ, so gilt für das Gesammtvolumen v des Körpers die Gleichung:

$$v = m\sigma + (M - m)\tau,$$

oder:

$$v = m(\sigma - \tau) + M\tau, \tag{1}$$

woraus folgt:

$$\frac{dv}{dm} = \sigma - \tau. \tag{2}$$

Bezeichnen wir ferner die Schmelzwärme für die Gewichtseinheit mit ϱ', so ist zu setzen:

$$\frac{dQ}{dm} = \varrho'. \tag{3}$$

Um den anderen Differentialcoefficienten von Q, nämlich $\frac{dQ}{dT}$, auszudrücken, müssen wir für die specifische Wärme des Körpers im flüssigen und festen Zustande Zeichen einführen. Dabei ist aber auch hier wieder dieselbe Bemerkung zu machen, wie bei der Verdampfung, dass es sich nicht um die specifische Wärme bei constantem Drucke handelt, sondern um die specifische Wärme für den Fall, wo mit der Temperatur der Druck sich in der Weise ändert, wie es geschehen muss, wenn die Temperatur immer die zu dem Drucke gehörige Schmelztemperatur sein soll. Bei der Verdampfung, wo die vorkommenden Druckänderungen der Regel nach nicht sehr gross sind, konnten wir bei der specifischen Wärme

des flüssigen Körpers den Einfluss der Druckänderung vernachlässigen, und die in der Formel vorkommende specifische Wärme des flüssigen Körpers mit der specifischen Wärme bei constantem Drucke als gleichbedeutend betrachten. In unserem gegenwärtigen Falle aber kommen bei geringen Temperaturänderungen so grosse Druckänderungen vor, dass ihr Einfluss auf die specifische Wärme nicht vernachlässigt werden darf. Wir wollen daher die specifische Wärme des flüssigen Körpers, welche wir in den auf die Verdampfung bezüglichen Formeln mit C bezeichneten, unter den jetzigen Umständen mit C' bezeichnen. Die specifische Wärme des festen Körpers unter den jetzigen Umständen möge mit K' bezeichnet werden. Unter Anwendung dieser Zeichen können wir setzen:

$$\frac{dQ}{dT} = mC' + (M-m)K',$$

oder auch:

$$\frac{dQ}{dT} = m(C'-K') + MK'. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dm}\right) = \frac{d\varrho'}{dT}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = C'-K', \tag{6}$$

und durch Einsetzung dieser Werthe und des in (3) gegebenen Werthes von $\frac{dQ}{dm}$ in die obigen Differentialgleichungen erhalten wir:

$$\frac{d\varrho'}{dT} + K' - C' = (\sigma-\tau)\frac{dp}{dT} \tag{7}$$

$$\frac{d\varrho'}{dT} + K' - C' = \frac{\varrho'}{T} \tag{8}$$

$$\varrho' = T(\sigma-\tau)\frac{dp}{dT}. \tag{9}$$

In diesen Gleichungen ist vorausgesetzt, dass die Wärme nach mechanischem Maasse gemessen sei. Für den Fall, wo die Wärme nach gewöhnlichem Maasse gemessen wird, mögen statt der deutschen Buchstaben lateinische angewandt werden, indem gesetzt wird:

$$c' = \frac{C'}{E};\quad k' = \frac{K'}{E};\quad r' = \frac{\varrho'}{E}. \tag{10}$$

Dann gehen die obigen Gleichungen über in:

$$(11)\qquad \frac{dr'}{dT} + k' - c' = \frac{\sigma - \tau}{E} \cdot \frac{dp}{dT}$$

$$(12)\qquad \frac{dr'}{dT} + k' - c' = \frac{r'}{T}$$

$$(13)\qquad r' = \frac{T(\sigma - \tau)}{E} \cdot \frac{dp}{dT}.$$

Dieses sind die gesuchten Gleichungen, von denen die erste dem ersten Hauptsatze und die zweite dem zweiten Hauptsatze entspricht, während die dritte aus der Vereinigung beider Hauptsätze hervorgegangen ist.

§. 2. Beziehung zwischen Druck und Schmelztemperatur.

Die vorstehenden Gleichungen, von denen nur zwei unabhängig sind, lassen sich zur Bestimmung zweier bisher unbekannter Grössen anwenden.

Wir wollen zuerst von der letzten Gleichung Gebrauch machen, um die Abhängigkeit der Schmelztemperatur vom Drucke zu bestimmen. Dazu geben wir ihr folgende Gestalt:

$$(14)\qquad \frac{dT}{dp} = \frac{T(\sigma - \tau)}{Er'}.$$

Durch diese Gleichung bestätigt sich zunächst die schon oben gemachte Bemerkung, dass, wenn der Körper sich beim Schmelzen ausdehnt, der Schmelzpunkt mit wachsendem Drucke steigt, und wenn der Körper sich beim Schmelzen zusammenzieht, der Schmelzpunkt mit wachsendem Drucke sinkt, denn jenachdem σ grösser oder kleiner ist, als τ, ist die Differenz $\sigma - \tau$ und demgemäss auch der Differentialcoefficient $\frac{dT}{dp}$ positiv oder negativ. Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich aber auch der numerische Werth von $\frac{dT}{dp}$ berechnen.

Wir wollen diese Rechnung für Wasser ausführen. Das Volumen eines Kilogramm Wasser, in Cubikmetern ausgedrückt, ist bei 4° C. gleich 0·001. Beim Gefrierpunkte ist es ein Wenig grösser, aber der Unterschied ist so gering, dass wir ihn für unsere Rechnung vernachlässigen und daher die Zahl 0·001 als Werth von σ anwenden können. Die Grösse τ, das Volumen eines Kilogramm Eis, in Cubikmetern ausgedrückt, ist 0·001087. Die Schmelzwärme r' des Wassers ist nach Person 79. Ferner ist T beim Gefrier-

punkte 273 und für E wenden wir den Werth 424 an. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{dT}{dp} = -\frac{273 \times 0{\cdot}000087}{424 \times 79}.$$

Will man den Druck nicht in mechanischen Einheiten (Kilogramme auf ein Quadratmeter), sondern in Atmosphären angeben, so hat man den vorher bestimmten Werth von $\frac{dT}{dp}$ noch mit 10333 zu multipliciren, also:

$$\frac{dT}{dp} = -\frac{273 \times 0{\cdot}000087 \times 10\,333}{424 \times 79}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\frac{dT}{dp} = -\,0{\cdot}00733,$$

d. h. durch die Druckzunahme um eine Atmosphäre wird der Schmelzpunkt um 0·00733 Grad C. erniedrigt.

§. 3. Experimentelle Bestätigung des vorstehenden Resultates.

Der Schluss, dass der Schmelzpunkt des Eises durch vermehrten Druck erniedrigt werde, und die erste Berechnung dieser Erniedrigung stammt von James Thomson her, welcher aus der Carnot'schen Theorie eine Gleichung ableitete, die von der Gleichung (14) nur dadurch verschieden war, dass sie rechts an der Stelle von $\frac{T}{E}$ eine noch unbestimmte Temperaturfunction enthielt, deren auf den Frostpunkt bezüglicher Werth aus Regnault's Angaben über die Verdampfungswärme und die Spannung des Wasserdampfes bestimmt war. Der Bruder des vorher genannten Forschers, der berühmte Physiker William Thomson, unterwarf dann das theoretisch gewonnene Resultat einer sehr genauen experimentellen Prüfung [1]).

Um die Temperaturunterschiede fein messen zu können, liess er sich ein mit Schwefeläther gefülltes Thermometer anfertigen, dessen Gefäss $3^1/_2$ Zoll Länge und $^3/_8$ Zoll Durchmesser hatte, und dessen

[1]) *Phil. Mag. Ser. III, Vol. 37, p. 123* und Pogg. Ann. Bd. 81, S. 163.

Röhre $6\frac{1}{2}$ Zoll lang war. $5\frac{1}{2}$ Zoll davon waren in 220 gleiche Theile getheilt und 212 dieser Theile umfassten ein Temperaturintervall von 3° Fahr., so dass jeder Theil nahe gleich $\frac{1}{71}$ Grad Fahr. war. Dieses Thermometer wurde hermetisch in eine etwas weitere Glasröhre eingeschlossen, um es vor der Wirkung des äusseren Druckes zu schützen, und wurde mit dieser Umhüllung in eine Oersted'sche Presse gesetzt, welche mit Wasser und klaren Eisstücken gefüllt war, und zur Druckmessung ein gewöhnliches Luftmanometer enthielt.

Nachdem das Thermometer einen festen Stand angenommen hatte, welcher dem Schmelzpunkte des Eises unter atmosphärischem Drucke entsprach, wurde durch Niederschrauben des Stempels der Presse der Druck vermehrt, und sofort sah man das Thermometer sinken, indem die aus Wasser und Eis bestehende Masse die zu dem grösseren Drucke gehörende tiefere Schmelztemperatur annahm. Beim Nachlassen des Druckes ging das Thermometer wieder auf den ursprünglichen Stand zurück. Die nachstehende Tabelle enthält die für zwei Druckkräfte beobachteten Temperaturerniedrigungen und daneben sind diejenigen Temperaturerniedrigungen angeführt, welche sich für dieselben Druckkräfte berechnen lassen, wenn man den im vorigen Paragraphen gefundenen Werth von $\frac{dT}{dp}$, der sich zunächst auf den gewöhnlichen Druck von 1 Atm. bezieht, bis zum Drucke von 16·8 Atm. anwendet.

Druck.	Temperaturerniedrigung	
	beobachtet	berechnet
8·1 Atm.	0·059° C.	0·059° C.
16·8 „	0·129 „	0·123 „

Man sieht, dass zwischen den beobachteten und den berechneten Zahlen eine fast vollkommene Uebereinstimmung stattfindet, und somit auch dieses Resultat der Theorie in ausgezeichneter Weise bestätigt ist.

Später hat Mousson[1]) einen sehr interessanten Versuch angestellt, indem er Eis, welches fortwährend auf einer Temperatur

[1]) Pogg. Ann. Bd. 105, S. 161.

von — 18° bis — 20° erhalten wurde, durch Anwendung eines ungeheuren Druckes zum Schmelzen brachte. Den angewandten Druck giebt er nach einer ungefähren Schätzung zu etwa 13 000 Atm. an, wobei aber zu bemerken ist, dass möglicher Weise die Schmelzung schon bei einem viel geringeren Drucke eingetreten ist, indem sich bei der von ihm getroffenen Einrichtung nur erkennen liess, dass überhaupt eine Schmelzung des Eises während des Versuches stattgefunden hatte, aber nicht, zu welcher Zeit sie eingetreten war.

§. 4. Experimentelle Untersuchung mit Substanzen, die sich beim Schmelzen ausdehnen.

Mit solchen Substanzen, die sich beim Schmelzen ausdehnen, und bei denen daher die Schmelztemperatur mit wachsendem Drucke steigen muss, hat zuerst Bunsen eine experimentelle Untersuchung angestellt[1]), und zwar mit Wallrath und Paraffin. Durch eine sinnreiche Einrichtung erhielt er in höchst einfacher Weise eine sehr grosse und sofort messbare Druckvermehrung und konnte dieselbe Substanz unter gewöhnlichem atmosphärischem Drucke und unter dem vermehrten Drucke nebeneinander beobachten.

Er zog ein sehr dickwandiges Glasrohr von einem Fuss Länge und einer Weite von Strohhalmdicke am einen Ende zu einer feinen 15 bis 20 Zoll langen und am anderen Ende zu einer etwas weiteren nur $1\frac{1}{2}$ Zoll langen Haarröhre aus. Die letztere, welche sich bei der Anwendung des Apparates unten befinden sollte, wurde so umgebogen, dass sie, dem unteren Theile der Glasröhre parallel, aufwärts stand. Diese kurze umgebogene Haarröhre wurde nun mit der zu untersuchenden Substanz und das weitere Glasrohr mit Quecksilber gefüllt, während die lange Haarröhre mit Luft gefüllt blieb. Beide Haarröhren wurden an ihren Enden zugeschmolzen. Wenn nun der Apparat erwärmt wurde, so stieg das Quecksilber, indem es sich ausdehnte, in der längeren Haarröhre empor und drückte die hier befindliche Luft zusammen. Durch den Gegendruck der Luft wurde zunächst das Quecksilber und dann weiter die in der kurzen Haarröhre befindliche Substanz gedrückt, und

[1]) Pogg. Ann. Bd. 81, S. 562.

die Stärke dieses Druckes, welche sich auf über hundert Atmosphären steigern liess, konnte an der Grösse des noch vorhandenen Luftvolumens gemessen werden.

Ein solcher Apparat wurde an einem Brette dicht neben einem anderen Apparate befestigt, welcher dieselbe Einrichtung hatte, nur dass die obere, mit Luft gefüllte Capillarröhre nicht zugeschmolzen war, so dass die Zusammendrückung der Luft und die damit verbundene Druckvermehrung in ihm nicht stattfand. Beide Apparate zusammen wurden nun in Wasser getaucht, dessen Temperatur etwas über dem Schmelzpunkte der zu untersuchenden Substanz lag. Dabei konnte man, wenn das untere, mit der Substanz gefüllte Röhrchen sich schon ganz unter Wasser befand, durch noch weiteres Einsenken einen immer grösseren Theil des Quecksilbers mit erwärmen und so den Druck in dem oben geschlossenen Apparate immer mehr steigern. Unter diesen Umständen liess Bunsen die in beiden Apparaten befindliche Substanz vielfach schmelzen, und bei der Abkühlung des Wassers wieder erstarren, und beobachtete die Temperatur, bei der das Letztere stattfand. Dabei zeigte sich, dass in dem Apparate, in welchem der Druck vermehrt war, das Erstarren immer bei höherer Temperatur eintrat, als in dem anderen Apparate, und zwar ergaben sich folgende Zahlen.

Beim Wallrath:

Druck.	Erstarrungspunkt.
1 Atm.	47·7° C.
29 „	48·3 „
96 „	49·7 „
141 „	50·5 „
156 „	50·9 „

Beim Paraffin:

Druck.	Erstarrungspunkt.
1 Atm.	46·3° C.
85 „	48·9 „
100 „	49·9 „

Später hat Hopkins[1]) Versuche mit Wallrath, Wachs, Schwefel und Stearin angestellt, bei denen der Druck durch einen mit Gewichten beschwerten Hebel hervorgebracht und bis über 800 Atm. getrieben wurde. Auch diese Versuche ergaben bei allen jenen Substanzen Erhöhung der Schmelztemperatur mit wachsendem Drucke. Die einzelnen bei verschiedenen Druckkräften von Hopkins beobachteten Temperaturen zeigen aber noch erhebliche Unregelmässigkeiten. Beim Wachs, bei welchem die Temperatur mit wachsendem Drucke am regelmässigsten stieg, hatte eine Druckzunahme von 808 Atm. eine Erhöhung des Schmelzpunktes um $15\frac{1}{2}^0$ C. zur Folge.

Aus der theoretischen Formel die Erhöhung des Schmelzpunktes numerisch zu berechnen, ist bei den von Bunsen und Hopkins untersuchten Stoffen für jetzt nicht gut ausführbar, weil die zu dieser Rechnung nöthigen Data noch nicht genau genug bekannt sind.

§. 5. Abhängigkeit der Werkwärme des Schmelzens von der Schmelztemperatur.

Nachdem wir die Gleichung (13) dazu angewandt haben, die Abhängigkeit der Schmelztemperatur vom Drucke zu bestimmen, wollen wir nun die Gleichung (12) in Anwendung bringen, welche sich in folgender Gestalt schreiben lässt:

$$(15) \qquad \frac{dr'}{dT} = c' - k' + \frac{r'}{T}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn durch Druckänderung die Temperatur des Schmelzens geändert wird, dabei auch die zum Schmelzen erforderliche Wärmemenge r' sich ändert, und kann dazu dienen, die Grösse dieser Aenderung zu bestimmen. Die in ihr vorkommenden Zeichen c' und k' bedeuten die specifische Wärme des Stoffes im flüssigen und festen Zustande, aber, wie schon gesagt, nicht die specifische Wärme bei constantem Drucke, sondern die specifische Wärme für den Fall, wo der Druck sich mit der Temperatur in der Weise ändert, wie es die Gleichung (13) angiebt.

Wie man diese Art von specifischer Wärme bestimmen kann, soll im nächsten Abschnitte besprochen werden, und es mögen hier

[1]) *Report of the Brit. Assoc. 1854, 2, p. 57.*

nur beispielsweise die für Wasser geltenden Zahlenwerthe angeführt werden. Die specifische Wärme bei constantem Drucke, nämlich diejenige specifische Wärme, welche einfach unter dem atmosphärischen Drucke gemessen ist, hat in der Nähe von 0° für flüssiges Wasser den Werth 1 und für Eis nach Person[1]) den Werth 0·48. Die specifische Wärme für den hier in Betracht kommenden Fall dagegen hat für flüssiges Wasser und Eis die Werthe

$$c' = 0{\cdot}945 \text{ und } k' = 0{\cdot}631.$$

Nimmt man ferner für r' nach Person den Werth 79 an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{dT} &= 0{\cdot}945 - 0{\cdot}631 + \frac{79}{273} \\ &= 0{\cdot}314 + 0{\cdot}289 \\ &= 0{\cdot}603. \end{aligned}$$

Bekanntlich kann der Gefrierpunkt des Wassers auch dadurch erniedrigt werden, dass man es vor jeder Erschütterung bewahrt. Diese Temperaturerniedrigung bezieht sich aber nur auf den Anfang des Gefrierens, denn sobald das Gefrieren begonnen hat, gefriert gleich ein so grosser Theil des vorhandenen Wassers, dass die ganze Wassermasse dadurch wieder auf 0° erwärmt wird, und bei dieser Temperatur gefriert dann der übrige Theil. Es wird daher nicht nöthig sein, auch die mit dieser Art von Temperaturerniedrigung verbundene Aenderung der Grösse r', welche einfach durch die Differenz der specifischen Wärmen des flüssigen Wassers und des Eises bei constantem Drucke bedingt wird, hier näher zu besprechen.

§. 6. Uebergang aus dem festen in den luftförmigen Zustand.

Wir haben bisher die Uebergänge aus dem flüssigen in den luftförmigen und aus dem festen in den flüssigen Zustand betrachtet; es kann aber auch geschehen, dass ein Stoff direct aus dem festen in den luftförmigen Zustand übergeht. Für diesen Fall gelten drei Gleichungen von derselben Form, wie die, welche im vorigen Abschnitte unter (15) bis (17) und in diesem Abschnitte

---

[1]) *Comptes rendus T. XXX, p. 526.*

unter (11) bis (13) gegeben sind, nur dass die auf die verschiedenen Aggregatzustände bezüglichen specifischen Wärmen und specifischen Volumina und die Werkwärme des Ueberganges aus dem einen Zustande in den anderen in der dem gegenwärtigen Falle entsprechenden Weise gewählt werden müssen.

Der Umstand, dass die Werkwärme des Ueberganges aus dem festen in den luftförmigen Zustand grösser ist, als diejenige des Ueberganges aus dem flüssigen in den luftförmigen Zustand, führt sofort zu einem Schlusse, den schon Kirchhoff gezogen hat[1]).

Betrachtet man nämlich einen Stoff gerade bei seinem Schmelzpunkte, so kann sich bei dieser Temperatur Dampf vom flüssigen und vom festen Körper entwickeln. Bei Temperaturen über dem Schmelzpunkte hat man es nur mit solchem Dampfe zu thun, der sich vom flüssigen Körper entwickelt, und bei Temperaturen unter dem Schmelzpunkte hat man es (abgesehen von dem am Schlusse des vorigen Paragraphen besprochenen speciellen Falle, wo eine sehr ruhig gehaltene Flüssigkeit trotz der schon erreichten tieferen Temperatur noch flüssig geblieben ist) nur mit solchem Dampfe zu thun, der sich vom festen Körper entwickelt.

Wenn man nun für diese beiden Fälle, also für Temperaturen über und unter dem Schmelzpunkte, den Dampfdruck p als Function der Temperatur darstellt, und die Curve construirt, welche die Temperatur als Abscisse und den Druck als Ordinate hat, so fragt es sich, wie die den beiden Fällen entsprechenden Curvenstücke sich bei der gemeinsamen Grenztemperatur, nämlich der Schmelztemperatur, zu einander verhalten. Was zunächst den Werth von p selbst anbetrifft, so können wir es als erfahrungsmässig feststehend betrachten, dass er für beide Fälle gleich ist, dass also die beiden Curvenstücke bei der Schmelztemperatur in Einem Punkte zusammentreffen. In Bezug auf den Differentialcoefficienten $\frac{dp}{dT}$ aber lehrt die letzte der oben erwähnten drei Gleichungen, dass er für die beiden Fälle verschiedene Werthe hat, so dass an der Stelle, wo die beiden Curvenstücke zusammentreffen, ihre Tangenten verschiedene Richtungen haben.

Die Gleichung (17) des vorigen Abschnittes, welche sich auf den Uebergang aus dem flüssigen in den luftförmigen Zustand bezieht, lässt sich so schreiben:

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 103, S. 206.

(16) $$\frac{dp}{dT} = \frac{Er}{T(s - \sigma)}.$$

Soll nun die entsprechende Gleichung für den Uebergang aus dem festen in den luftförmigen Zustand gebildet werden, so möge dabei an der linken Seite der Druck des sich vom festen Körper entwickelnden Dampfes zum Unterschiede durch P bezeichnet werden. An der rechten Seite ist zunächst an die Stelle von σ, dem specifischen Volumen des flüssigen Stoffes, das specifische Volumen des festen Stoffes zu setzen, welches wir mit τ bezeichnet haben, wodurch aber, da diese beiden specifischen Volumina sehr wenig von einander abweichen und ausserdem beide gegen s, das specifische Volumen des luftförmigen Stoffes, sehr klein sind, nur ein sehr geringer Unterschied im Werthe der Formel entsteht. Von grösserer Bedeutung dagegen ist es, dass an die Stelle von r, der Werkwärme des Ueberganges aus dem flüssigen in den luftförmigen Zustand, die Werkwärme des Ueberganges aus dem festen in den luftförmigen Zustand treten muss. Diese ist gleich der Summe aus r und der durch r' bezeichneten Werkwärme des Schmelzens. Die Gleichung lautet daher für den in Rede stehenden Fall:

(17) $$\frac{dP}{dT} = \frac{E(r + r')}{T(s - \tau)}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (16) und vernachlässigt dabei den kleinen Unterschied zwischen σ und τ, so ergiebt sich:

(18) $$\frac{dP}{dT} - \frac{dp}{dT} = \frac{Er'}{T(s - \sigma)}.$$

Wendet man diese Gleichung speciell auf Wasser an, so ist zu setzen:

$$T = 273; \quad r' = 79; \quad s = 205; \quad \sigma = 0{\cdot}001,$$

und es kommt daher, indem man noch für E den bekannten Werth 424 setzt:

$$\frac{dP}{dT} - \frac{dp}{dT} = \frac{424 \times 79}{273 \times 205} = 0{\cdot}599.$$

Will man den Druck nicht in Kilogrammen auf ein Quadratmeter, sondern in Millimetern Quecksilber ausdrücken, so hat man, gemäss der in §. 10 des vorigen Abschnittes gemachten Bemerkung, die obige Zahl durch 13·596 zu dividiren, und man erhält daher, wenn man in diesem Falle für p und P die griechischen Buchstaben π und Π anwendet:

$$\frac{d\Pi}{dT} - \frac{d\pi}{dT} = 0{\cdot}044.$$

Zur Vergleichung möge noch hinzugefügt werden, dass der Differentialcoefficient $\frac{d\pi}{dT}$ nach den Dampfspannungen, welche Regnault bei den Temperaturen zunächst über 0° beobachtet hat, bei 0° den Werth 0·33 hat.

ABSCHNITT VIII.

Behandlung homogener Körper.

§. 1. Zustandsänderungen ohne Veränderung des Aggregatzustandes.

Wir kehren nun zu den im Abschnitt V. aufgestellten allgemeinen Gleichungen zurück, und wollen sie auf solche Fälle anwenden, wo ein Körper Aenderungen erleidet, die sich nicht auf den Aggregatzustand erstrecken, und wo sich stets alle Theile des Körpers in gleichem Zustande befinden.

Diese Zustandsänderungen wollen wir uns dadurch veranlasst denken, dass die Temperatur und die auf den Körper wirkenden äusseren Kräfte sich ändern. Infolge dessen ändert sich dann auch die Anordnung der Theilchen des Körpers, was sich äusserlich durch Volumen- und Gestaltänderung kund geben kann.

Der einfachste Fall in Bezug auf die äusseren Kräfte ist der, wo nur ein gleichmässiger, normaler Oberflächendruck auf den Körper wirkt, und daher bei der Bestimmung der äusseren Arbeit auf die Gestaltänderung des Körpers keine Rücksicht genommen zu werden braucht, sondern nur die Volumenänderung in Betracht zu ziehen ist. In diesem Falle kann man den Zustand des Körpers als bestimmt ansehen, wenn von den drei Grössen *Temperatur*, *Druck* und *Volumen*, welche wir, wie früher, durch T, p und v bezeichnen wollen, irgend zwei gegeben sind. Je nachdem man v

und T oder p und T oder endlich v und p als die beiden Grössen auswählt, welche zur Bestimmung des Zustandes des Körpers dienen sollen, erhält man eines der drei Systeme von Gleichungen, welche in Abschnitt V. unter (25), (26) und (27) aufgestellt wurden, und von diesen Gleichungen wollen wir nun Gebrauch machen, um die verschiedenen specifischen Wärmen und andere auf Temperatur-, Druck- und Volumenänderungen bezügliche Grössen zu bestimmen.

§. 2. Genauere Bezeichnung der Differentialcoefficienten.

Wenn man die oben genannten Gleichungen des Abschnittes V. auf eine Gewichtseinheit eines Stoffes bezieht, so bedeutet der Differentialcoefficient $\frac{dQ}{dT}$ in den Gleichungen (25) die specifische Wärme bei constantem Volumen und in den Gleichungen (26) die specifische Wärme bei constantem Drucke. Ebenso hat der Differentialcoefficient $\frac{dQ}{dv}$ in den Gleichungen (25) und (27) und der Differentialcoefficient $\frac{dQ}{dp}$ in den Gleichungen (26) und (27) verschiedene Bedeutungen. Aehnliche Unbestimmtheiten in der Bedeutung der Differentialcoefficienten kommen in allen solchen Fällen vor, wo die Natur des Gegenstandes es mit sich bringt, dass die als unabhängige Veränderliche dienenden Grössen zuweilen gewechselt werden. Hat man irgend zwei Grössen als unabhängige Veränderliche ausgewählt, so versteht es sich von selbst, dass bei der Differentiation nach der einen die andere als constant anzusehen ist. Wenn man nun aber, während man die erste unabhängige Veränderliche beibehält, als zweite unabhängige Veränderliche nach einander verschiedene Grössen wählt, so erhält man natürlich ebenso viele verschiedene Bedeutungen für den nach der ersten Veränderlichen genommenen Differentialcoefficienten.

Wegen dieser Unbestimmtheit habe ich für derartige Fälle in meiner Abhandlung „über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie“ [1]) eine, so viel ich weiss, vorher nicht üblich gewesene

[1]) Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft 1865 und Pogg. Ann. Bd. 125, S. 353.

Bezeichnung angewandt, indem ich die Grösse, welche bei der Differentiation als constant angesehen wurde, als Index zum Differentialcoefficienten hinzugefügt habe. Dieses that ich damals in der Form, dass ich den Differentialcoefficienten in Klammern schloss, und neben diese den Index schrieb, den ich, weil an dieser Stelle auch andere Indices vorkommen können, zur Unterscheidung noch mit einem über ihn gesetzten waagrechten Striche versah. Die beiden oben erwähnten Differentialcoefficienten, welche die specifische Wärme bei constantem Volumen und bei constantem Drucke bedeuten, sahen demnach so aus:

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\bar{v}} \text{ und } \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\bar{p}}$$

Diese Schreibweise wurde bald von verschiedenen Autoren adoptirt, nur dass man gewöhnlich der Bequemlichkeit wegen den waagrechten Strich fortliess. Später[1]) habe ich, unter Beibehaltung dessen, was an meiner Schreibweise wesentlich ist, die Form derselben noch vereinfacht, indem ich den Index neben das *d* im Zähler des Differentialcoefficienten setzte. Dadurch wurden die Klammern unnöthig und auch der waagrechte Strich konnte fortbleiben, weil an dieser Stelle kein anderer Index angebracht zu werden pflegt, und ein Unterscheidungsmerkmal daher nicht erforderlich ist. Hiernach gestalten sich die beiden obigen Differentialcoefficienten so:

$$\frac{d_v Q}{dT} \text{ und } \frac{d_p Q}{dT}.$$

In dieser Form wollen wir jene Schreibweise im Folgenden anwenden.

§. 3. Beziehungen zwischen den Differentialcoefficienten von Druck, Volumen und Temperatur.

Wenn der Zustand eines Körpers durch je zwei der Grössen *Temperatur*, *Volumen* und *Druck* bestimmt ist, so kann man jede dieser drei Grössen als eine Function der beiden anderen ansehen, und daher folgende sechs Differentialcoefficienten bilden:

---

[1]) Ueber den Satz vom mittleren Ergal und seine Anwendung auf die Molecularbewegungen der Gase. Sitzungsberichte der Niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde 1874, S. 183.

$$\frac{d_v p}{dT}, \quad \frac{d_T p}{dv}; \quad \frac{d_p v}{dT}, \quad \frac{d_T v}{dp}; \quad \frac{d_p T}{dv}, \quad \frac{d_v T}{dp}.$$

Bei diesen Differentialcoefficienten könnte man die Indices, welche angeben, welche Grösse bei jeder Differentiation als constant vorausgesetzt ist, fortlassen, wenn man ein- für allemal festsetzte, dass von den drei Grössen T, v und p diejenige, welche in dem Differentialcoefficienten nicht vorkommt, als constant zu betrachten ist. Indessen der Uebersichtlichkeit wegen und weil im Folgenden auch Differentialcoefficienten zwischen denselben Grössen vorkommen werden, bei denen die als constant vorausgesetzte Grösse eine andere ist, als hier, wollen wir die Indices mitschreiben.

Es erleichtert nun die mit diesen sechs Differentialcoefficienten anzustellenden Rechnungen, wenn man die zwischen ihnen stattfindenden Beziehungen im Voraus feststellt.

Zuerst ist klar, dass unter den sechs Differentialcoefficienten dreimal je zwei vorkommen, welche einander reciprok sind. Nehmen wir z. B. die Grösse v als constant an, so hängen die beiden anderen Grössen T und p so unter einander zusammen, dass jede von ihnen einfach als Function der anderen anzusehen ist. Ebenso stehen, wenn p als constant angenommen wird, T und v, und wenn T als constant angenommen wird, v und p in dieser einfachen Beziehung zu einander. Man hat also zu setzen:

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{\frac{d_v T}{dp}} = \frac{d_v p}{dT}; \quad \frac{1}{\frac{d_p T}{dv}} = \frac{d_p v}{dT}; \quad \frac{1}{\frac{d_T p}{dv}} = \frac{d_T v}{dp}.$$

Um ferner die Beziehung zwischen den drei Paaren von Differentialcoefficienten zu erhalten, wollen wir beispielsweise p als Function von T und v betrachten. Dann lautet die vollständige Differentialgleichung für p:

$$dp = \frac{d_v p}{dT} dT + \frac{d_T p}{dv} dv.$$

Wenn wir nun diese Gleichung auf den Fall anwenden wollen, wo p constant ist, so haben wir in ihr zu setzen:

$$dp = 0 \text{ und } dv = \frac{d_p v}{dT} dT,$$

wodurch sie übergeht in:

$$0 = \frac{d_v p}{dT} dT + \frac{d_T p}{dv} \cdot \frac{d_p v}{dT} dT.$$

Wenn man hieraus dT forthebt, und dann noch mit $\frac{d_v p}{dT}$ dividirt, oder mit $\frac{d_v T}{dp}$ multiplicirt, so erhält man:

$$\frac{d_T p}{dv} \cdot \frac{d_p v}{dT} \cdot \frac{d_v T}{dp} = -1. \tag{2}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung, in Verbindung mit den Gleichungen (1) kann man jeden der sechs Differentialcoefficienten durch ein Product oder einen Bruch aus zwei anderen Differentialcoefficienten darstellen.

§. 4. Vollständige Differentialgleichungen für Q.

Kehren wir nun zur Betrachtung der Wärmeaufnahme und Wärmeabgabe des gegebenen Körpers zurück, und bezeichnen die specifische Wärme bei constantem Volumen mit C_v und die specifische Wärme bei constantem Druck mit C_p, so haben wir, wenn wir das Gewicht des Körpers als eine Gewichtseinheit annehmen, zu setzen:

$$\frac{d_v Q}{dT} = C_v; \quad \frac{d_p Q}{dT} = C_p.$$

Ferner kommen in Abschnitt V. unter (25) und (26) Gleichungen vor, welche bei unserer jetzigen Bezeichnungsweise so zu schreiben sind:

$$\frac{d_T Q}{dv} = T\frac{d_v p}{dT}; \quad \frac{d_T Q}{dp} = -T\frac{d_p v}{dT}.$$

Hiernach kann man folgende vollständige Differentialgleichungen bilden:

$$dQ = C_v dT + T\frac{d_v p}{dT} dv. \tag{3}$$

$$dQ = C_p dT - T\frac{d_p v}{dT} dp. \tag{4}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich leicht auch eine dritte vollständige Differentialgleichung für Q, welche sich auf v und p als unabhängige Veränderliche bezieht, wenn man die erste Gleichung mit C_p und die zweite mit C_v multiplicirt, dann beide von einander abzieht, und die dadurch entstehende Gleichung durch $C_p - C_v$ dividirt, nämlich:

$$(5)\qquad dQ = \frac{T}{C_p - C_v}\left(C_p \frac{d_v p}{dT} dv + C_v \frac{d_p v}{dT} dp\right).$$

Diese drei vollständigen Differentialgleichungen entsprechen ganz den in Abschnitt II. für vollkommene Gase aufgestellten, nur dass die letzteren durch Anwendung des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes vereinfacht sind. Aus der diese Gesetze ausdrückenden Gleichung

$$pv = RT$$

ergiebt sich nämlich:

$$\frac{d_v p}{dT} = \frac{R}{v}; \quad \frac{d_p v}{dT} = \frac{R}{p}.$$

Wenn man diese Werthe der Differentialcoefficienten in die obigen Gleichungen einsetzt und ausserdem in der letzten für T den Ausdruck $\frac{pv}{R}$ substituirt, so erhält man:

$$dQ = C_v dT + \frac{RT}{v} dv$$

$$dQ = C_p dT - \frac{RT}{p} dp$$

$$dQ = \frac{C_p}{C_p - C_v} p\,dv + \frac{C_v}{C_p - C_v} v\,dp,$$

welche Gleichungen in Abschnitt II. unter (11), (15) und (16) gegeben sind.

Die drei vollständigen Differentialgleichungen (3), (4) und (5) sind, wie wir es bei den speciell für Gase geltenden Gleichungen schon gesehen haben, nicht unmittelbar integrabel. Für die Gleichungen (3) und (4) ergiebt sich dieses sofort aus schon früher aufgestellten Gleichungen. Die im Abschnitt V. in den Systemen (25) und (26) zu unterst stehenden Gleichungen lauten nämlich unter Anwendung der Zeichen C_v und C_p und der für die Differentialcoefficienten jetzt angenommenen Schreibweise:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d_T C_v}{dv} = T \dfrac{d_v^2 p}{dT^2} \\[2ex] \dfrac{d_T C_p}{dp} = - T \dfrac{d_p^2 v}{dT^2}, \end{cases}$$

während die Bedingungsgleichungen, welche erfüllt sein müssten, wenn (3) und (4) integrabel sein sollten, lauten:

$$\frac{d_T C_v}{dv} = T\frac{d_v^2 p}{dT^2} + \frac{d_v p}{dT}$$

$$\frac{d_T C_p}{dp} = -\,T\frac{d_p^2 v}{dT^2} - \frac{d_p v}{dT}.$$

Aehnlich, nur etwas weitläufiger, ist der Nachweis zu führen, dass die Gleichung (5) nicht integrabel ist, was sich übrigens dem Vorigen nach auch von selbst versteht, da sie aus den Gleichungen (3) und (4) abgeleitet ist.

Die drei Gleichungen gehören also zu denjenigen vollständigen Differentialgleichungen, welche in der Einleitung besprochen sind, und welche sich erst dann integriren lassen, wenn zwischen den Veränderlichen noch eine andere Relation gegeben und dadurch der Weg der Veränderungen vorgeschrieben ist.

§. 5. Specifische Wärme bei constantem Volumen und bei constantem Drucke.

cf. a note by Kun[illegible] in Schlömilch's Zs., Vol. 39, p. 174-8

Wenn man in der Gleichung (4) statt des unbestimmten Differentials dp den Ausdruck $\frac{d_v p}{dT} dT$ setzt, so bezieht sie sich auf den speciellen Fall, wo der Körper bei constantem Volumen seine Temperatur um dT ändert. Dividirt man dann noch die Gleichung durch dT, so erhält man an der linken Seite den Differentialcoefficienten $\frac{d_v Q}{dT}$, welchen wir, da er die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet, mit C_v bezeichnet haben, und es entsteht daher folgende die Beziehung zwischen C_v und C_p ausdrückende Gleichung:

$$C_v = C_p - T\frac{d_p v}{dT} \cdot \frac{d_v p}{dT}. \tag{7}$$

Wenn man den aus dieser Gleichung hervorgehenden Werth der Differenz $C_p - C_v$ in die Gleichung (5) einsetzt, so nimmt dieselbe folgende noch einfachere Form an:

$$dQ = C_p \frac{d_p T}{dv} dv + C_v \frac{d_v T}{dp} dp. \tag{8}$$

Will man mit Hülfe der Gleichung (7) die specifische Wärme bei constantem Volumen aus derjenigen bei constantem Drucke

unter Anwendung der vorhandenen Data bestimmen, so ist es zweckmässig, noch eine kleine Aenderung mit der Gleichung vorzunehmen. Der in ihr vorkommende Differentialcoefficient $\frac{d_p v}{dT}$ stellt die Ausdehnung des Körpers durch Temperaturerhöhung dar, und ist der Regel nach als bekannt anzunehmen; der andere Differentialcoefficient $\frac{d_v p}{dT}$ dagegen pflegt bei festen und tropfbar flüssigen Körpern nicht unmittelbar durch Beobachtung bekannt zu sein. Man kann aber nach (2) setzen:

$$\frac{d_v p}{dT} = -\frac{\frac{d_p v}{dT}}{\frac{d_T v}{dp}},$$

und in diesem Bruche ist der im Zähler stehende Differentialcoefficient wieder der vorher besprochene, und der im Nenner stehende Differentialcoefficient stellt, wenn er mit dem negativen Vorzeichen genommen wird, die Volumenverringerung durch Druckvermehrung oder die Zusammendrückbarkeit dar, welche man bei einer Anzahl von Flüssigkeiten direct gemessen hat, und bei festen Körpern aus dem Elasticitätscoefficienten näherungsweise berechnen kann. Durch Einführung dieses Bruches geht die Gleichung (7) über in:

$$(7a) \qquad C_v = C_p + T\frac{\left(\frac{d_p v}{dT}\right)^2}{\frac{d_T v}{dp}}.$$

Sollen die specifischen Wärmen nicht in mechanischem Maasse, sondern in gewöhnlichem Wärmemaasse ausgedrückt werden, und bezeichnet man sie in diesem Falle mit c_v und c_p, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(7b) \qquad c_v = c_p + \frac{T}{E}\cdot\frac{\left(\frac{d_p v}{dT}\right)^2}{\frac{d_T v}{dp}}.$$

Bei der Anwendung dieser Gleichung zu numerischen Rechnungen ist noch zu beachten, dass man in den Differentialcoefficienten als Volumeneinheit den Cubus derjenigen Längeneinheit, welche bei der Bestimmung der Grösse E angewandt ist, und als

Druckeinheit den Druck, welchen eine über eine Flächeneinheit verbreitete Gewichtseinheit ausübt, anwenden muss. Auf diese Einheiten hat man daher den Ausdehnungscoefficienten und den Zusammendrückungscoefficienten, wenn sie sich, wie es gewöhnlich der Fall ist, auf andere Einheiten beziehen, zu reduciren.

Da der Differentialcoefficient $\frac{d_T v}{dp}$ immer negativ ist, so folgt daraus, dass die specifische Wärme bei constantem Volumen immer kleiner sein muss als diejenige bei constantem Drucke. Der andere Differentialcoefficient $\frac{d_p v}{dT}$ ist im Allgemeinen eine positive Grösse. Beim Wasser ist er bei der Temperatur des Maximums der Dichte gleich Null, und demnach sind bei dieser Temperatur die beiden specifischen Wärmen gleich. Bei allen anderen Temperaturen, sowohl unter als über der Temperatur des Maximums der Dichte, ist die specifische Wärme bei constantem Volumen kleiner als die bei constantem Drucke, denn, wenn auch der Differentialcoefficient $\frac{d_p v}{dT}$ unter dieser Temperatur einen negativen Werth hat, so hat das doch auf den Werth der Formel keinen Einfluss, weil dieser Differentialcoefficient in ihr quadratisch vorkommt.

Um ein Beispiel von der Anwendung der Gleichung (9) zu erhalten, wollen wir das Wasser bei einigen bestimmten Temperaturen betrachten, und die Differenz zwischen den beiden specifischen Wärmen berechnen.

Nach den Beobachtungen von Kopp, deren Resultate in dem Lehrbuche der phys. und theor. Chemie S. 204 in einigen Zahlenreihen zusammengestellt sind, hat man für Wasser, wenn sein Volumen bei 4° als Einheit genommen wird, folgende Ausdehnungscoefficienten:

bei	0°	— 0·000061
„	25°	+ 0·00025
„	50°	+ 0·00045.

Nach den Beobachtungen von Grassi[1]) hat man für die Zusammendrückbarkeit des Wassers folgende Zahlen, welche die durch eine Druckzunahme um eine Atmosphäre verursachte Volumenvermin-

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys. 3. sér. t. XXXI, p. 437*, und Krönig's Journ. für Physik des Auslandes Bd. II, S. 129.

derung als Bruchtheil des beim ursprünglichen Drucke stattfindenden Volumens angeben:

bei	0^0	0·000050
„	25^0	0·000046
„	50^0	0·000044.

Wir wollen nun beispielsweise für die Temperatur von 25^0 die Rechnung durchführen.

Als Längeneinheit wählen wir das Meter und als Gewichtseinheit das Kilogramm. Dann haben wir als Volumeneinheit ein Cubikmeter anzunehmen, und da ein Kilogramm Wasser bei 4^0 den Raum von 0·001 Cubikmeter einnimmt, so müssen wir, um $\frac{d_p v}{dT}$ zu erhalten, den oben angeführten Ausdehnungscoefficienten mit 0·001 multipliciren, also:

$$\frac{d_p v}{dT} = 0{\cdot}00000025 = 25 \,.\, 10^{-8}.$$

Bei der Zusammendrückbarkeit ist dem Vorigen nach das Volumen, welches das Wasser bei der betreffenden Temperatur und beim ursprünglichen Drucke (den wir als den gewöhnlichen Druck einer Atmosphäre voraussetzen können) einnahm, als Einheit genommen. Dieses Volumen ist bei 25^0 gleich 0·001003 Cubikmeter. Ferner ist eine Atmosphäre Druck als Druckeinheit genommen, während wir den Druck eines Kilogramm auf ein Quadratmeter als Druckeinheit nehmen müssen, wonach eine Atmosphäre Druck durch 10333 dargestellt wird. Demgemäss haben wir zu setzen:

$$\frac{d_T v}{dp} = -\frac{0{\cdot}000046 \,.\, 0{\cdot}001003}{10333} = -\,45 \,.\, 10^{-13}.$$

Ausserdem haben wir bei 25^0 zu setzen: $T = 273 + 25 = 298$, und für E wollen wir nach Joule 424 annehmen. Diese Zahlenwerthe in die Gleichung (7b) eingesetzt, giebt:

$$c_p - c_v = \frac{298}{424} \cdot \frac{25^2 \,.\, 10^{-16}}{45 \,.\, 10^{-13}} = 0{\cdot}0098.$$

In derselben Weise ergeben sich aus den obigen Werthen des Ausdehnungscoefficienten und der Zusammendrückbarkeit bei 0^0 und 50^0 folgende Zahlen:

bei	0^0	$c_p - c_v = 0{\cdot}0005$
„	50^0	$c_p - c_v = 0{\cdot}0358.$

Wenden wir nun für c_p, die specifische Wärme bei constantem

Drucke, die von Regnault experimentell gefundenen Werthe an, so erhalten wir für die beiden specifischen Wärmen folgende Paare von Zahlen:

$$\text{bei } 0^0 \begin{cases} c_p = 1 \\ c_v = 0{\cdot}9995 \end{cases}$$

$$\text{„ } 25^0 \begin{cases} c_p = 1{\cdot}0016 \\ c_v = 0{\cdot}9918 \end{cases}$$

$$\text{„ } 50^0 \begin{cases} c_p = 1{\cdot}0042 \\ c_v = 0{\cdot}9684 \end{cases}$$

§. 6. Specifische Wärmen unter anderen Umständen.

In gleicher Weise, wie wir im vorigen Paragraphen die specifische Wärme bei constantem Volumen bestimmt haben, können wir auch die irgend welchen anderen Umständen entsprechende specifische Wärme bestimmen, indem wir ihre Beziehung zur specifischen Wärme bei constantem Drucke aus der Gleichung (4) ableiten.

Wenn nämlich die Umstände, unter welchen die Erwärmung stattfinden soll, gegeben sind, so sind die beiden Differentiale dT und dp nicht mehr von einander unabhängig, sondern das eine ist durch das andere mitbestimmt, und wir können daher für dp das Product $\frac{dp}{dT}dT$ schreiben, worin der Differentialcoefficient $\frac{dp}{dT}$ eine bestimmte Function derjenigen Veränderlichen ist, von welchen der Zustand des Körpers abhängt. Wenn man dieses Product in (4) an die Stelle von dp setzt, dann die Gleichung durch dT dividirt, und den dadurch an der linken Seite entstehenden Bruch $\frac{dQ}{dT}$, welcher die specifische Wärme unter den gegebenen Umständen ausdrückt, mit C bezeichnet, so kommt:

$$C = C_p - T\frac{d_p v}{dT}\cdot\frac{dp}{dT}. \tag{9}$$

Will man die specifischen Wärmen nicht in mechanischen Einheiten, sondern in gewöhnlichen Wärmeeinheiten ausdrücken und für diesen Fall wieder das kleine c statt des grossen zur Bezeichnung anwenden, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(9a)\qquad c = c_p - \frac{T}{E} \cdot \frac{d_p v}{dT} \cdot \frac{dp}{dT}.$$

Diese Gleichung wollen wir beispielsweise dazu benutzen, diejenigen specifischen Wärmen zu bestimmen, welche in den beiden vorigen Abschnitten in den Rechnungen vorkamen, nämlich 1) die specifische Wärme des flüssigen Wassers, wenn es mit Dampf vom Maximum der Spannkraft in Berührung ist, und 2) die specifische Wärme des Wassers und des Eises für den Fall, wo der Druck sich mit der Temperatur so ändert, dass die dem Drucke entsprechende Schmelztemperatur immer gleich der gerade stattfindenden Temperatur ist.

Im ersten Falle haben wir dem Differentialcoefficienten $\frac{dp}{dT}$ einfach den Werth zu geben, welcher der Spannungsreihe des Wasserdampfes entspricht. Für die Temperatur 100° wird dieser Werth, wenn als Druckeinheit ein Kilogramm auf ein Quadratmeter gilt, durch die Zahl 370 dargestellt. Was den anderen Differentialcoefficienten $\frac{d_p v}{dT}$ anbetrifft, so ist nach den Versuchen von Kopp der Ausdehnungscoefficient des Wassers bei 100°, wenn man das Volumen des Wassers bei 4° als Einheit nimmt, 0·00080. Diese Zahl hat man, um den Werth von $\frac{d_p v}{dT}$ für den Fall zu erhalten, wo ein Cubikmeter als Volumeneinheit und ein Kilogramm als Gewichtseinheit gilt, mit 0·001 zu multipliciren, wodurch entsteht 0·00000080. Endlich ist noch die absolute Temperatur T für 100° gleich 373 und E, wie gewöhnlich, gleich 424 zu setzen. Dadurch geht (9a) über in:

$$\begin{aligned} c &= c_p - \frac{373}{424} \times 0{\cdot}00000080 \times 370 \\ &= c_p - 0{\cdot}00026. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun für die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke bei 100° den aus der Regnault'schen empirischen Formel hervorgehenden Werth an, so erhalten wir für die beiden zu vergleichenden specifischen Wärmen folgende zusammengehörige Zahlen:

$$\begin{aligned} c_p &= 1{\cdot}013 \\ c &= 1{\cdot}01274. \end{aligned}$$

Wir sehen hieraus, dass diese beiden Grössen so nahe gleich sind,

dass es keinen Nutzen gehabt haben würde, die zwischen ihnen bestehende Differenz in unseren auf die gesättigten Dämpfe bezüglichen Rechnungen zu berücksichtigen.

Bei den Betrachtungen über den Einfluss des Druckes auf das Gefrieren der Flüssigkeiten verhält es sich insofern anders, als eine bedeutende Aenderung des Druckes den Gefrierpunkt nur sehr wenig ändert, und daher der Differentialcoefficient $\frac{dp}{dT}$ für diesen Fall einen sehr grossen Werth hat. Nimmt man beim Wasser gemäss der im vorigen Abschnitte ausgeführten Rechnung an, dass für eine Druckzunahme um eine Atmosphäre der Gefrierpunkt um 0·00733° C. sinkt, so hat man zu setzen:

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{10\,333}{0{\cdot}00733},$$

und die Gleichung (9a) geht daher, wenn wir noch für T die für den Gefrierpunkt geltende Zahl 273 und für E die Zahl 424 einsetzen, über in:

$$c = c_p + \frac{273}{424} \cdot \frac{10\,333}{0{\cdot}00733} \cdot \frac{d_p v}{dT}$$
$$= c_p + 908\,000\,\frac{d_p v}{dT}.$$

Um diese Gleichung zunächst auf flüssiges Wasser anzuwenden, nehmen wir nach Kopp den Ausdehnungscoefficienten des Wassers bei 0° zu — 0·000061 an, in Folge dessen wir, unter Anwendung des Kilogramm als Gewichtseinheit und des Cubikmeter als Raumeinheit, zu setzen haben:

$$\frac{d_p v}{dT} = -\,0{\cdot}000000061,$$

und demnach aus der vorigen Gleichung erhalten:

$$c = c_p - 0{\cdot}055.$$

Da nun $c_p = 1$ ist, so kommt:

$$c = 0{\cdot}945.$$

Um ferner die obige Gleichung auf Eis anzuwenden, nehmen wir nach den Versuchen von Schumacher, Pohrt und Moritz den linearen Ausdehnungscoefficienten des Eises zu 0·000051 an, woraus sich der cubische Ausdehnungscoefficient zu 0·000153 ergiebt. Diese Zahl haben wir, um sie auf die erforderlichen Maasseinheiten zu reduciren, mit 0·001087, dem in Cubikmetern gemesse-

nen Volumen eines Kilogramm Eis, zu multipliciren, wodurch wir erhalten:

$$\frac{d_p v}{dT} = 0{\cdot}000000166.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes geht die obige Gleichung über in:

$$c = c_p + 0{\cdot}151.$$

Da nun nach Person[1]) $c_p = 0{\cdot}48$ zu setzen ist, so kommt:

$$c = 0{\cdot}631.$$

Die Werthe 0·945 und 0·631 sind es, die im vorigen Abschnitte bei der Rechnung, durch welche die Abhängigkeit der Werkwärme des Schmelzens von der Schmelztemperatur bestimmt wurde, in Anwendung kamen.

§. 7. Isentropische Aenderungen eines Körpers.

Anstatt die Art der Zustandsänderung eines Körpers durch eine solche Bedingungsgleichung zu bestimmen, die eine oder mehrere der Grössen T, v und p enthält, wollen wir jetzt die Bedingung stellen, dass dem Körper während seiner Veränderung keine Wärme mitgetheilt oder entzogen werde, was durch die Gleichung

$$dQ = 0$$

ausgedrückt wird. Da in Folge dieser Gleichung auch gesetzt werden kann:

$$dS = \frac{dQ}{T} = 0,$$

woraus folgt, dass die Entropie S des Körpers unverändert bleibt, so wollen wir diese Art von Zustandsänderungen, wie schon früher die darauf bezüglichen Druckcurven, *isentropische* nennen, und die bei ihrer Behandlung gebildeten Differentialcoefficienten durch den Index S charakterisiren.

Indem wir in der Gleichung (3) dQ gleich Null setzen, erhalten wir:

$$0 = C_v dT + T\frac{d_v p}{dT}dv.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch dv, so ist der dadurch ent-

---

[1]) *Comptes rendus t.* XXX, *p.* 526.

stehende Differentialcoefficient $\frac{dT}{dv}$ ein solcher, der sich auf eine isentropische Aenderung bezieht, und es entsteht daher die Gleichung:

$$\frac{d_S T}{dv} = -\frac{T}{C_v} \cdot \frac{d_v p}{dT}. \tag{10}$$

Ebenso folgt aus der Gleichung (4):

$$\frac{d_S T}{dp} = \frac{T}{C_p} \cdot \frac{d_p v}{dT}. \tag{11}$$

Die Gleichung (5), statt deren man auch (7) anwenden kann, giebt zunächst:

$$0 = C_p \frac{d_v p}{dT} dv + C_v \frac{d_p v}{dT} dp,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{d_S v}{dp} = -\frac{C_v}{C_p} \cdot \frac{\frac{d_p v}{dT}}{\frac{d_v p}{dT}},$$

welche Gleichung sich mit Hülfe von (1) und (2) in folgende umwandeln lässt:

$$\frac{d_S v}{dp} = \frac{C_v}{C_p} \cdot \frac{d_T v}{dp}. \tag{12}$$

Wenn man hierin für C_v den in (7a) gegebenen Werth setzt, so kommt:

$$\frac{d_S v}{dp} = \frac{d_T v}{dp} + \frac{T}{C_p} \left(\frac{d_p v}{dT}\right)^2 \tag{13}$$

Schreibt man statt (12), indem man die reciproken Werthe bildet:

$$\frac{d_S p}{dv} = \frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{d_T p}{dv}, \tag{14}$$

so kann man diese Gleichung in entsprechender Weise, wie (12), umformen und erhält dadurch:

$$\frac{d_S p}{dv} = \frac{d_T p}{dv} - \frac{T}{C_v} \left(\frac{d_v p}{dT}\right)^2 \tag{15}$$

Diese hier bestimmten, auf constante Entropie bezüglichen Differentialcoefficienten zwischen Volumen und Druck hat man bei der Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen und Flüssigkeiten anzuwenden, was für die vollkommenen Gase schon in Abschnitt II. des Näheren besprochen ist.

§. 8. Specielle Form der Hauptgleichungen für einen gedehnten Stab.

Um nun, nachdem wir bisher als äussere Kraft immer einen gleichmässigen Oberflächendruck vorausgesetzt haben, auch von einer anderen äusseren Kraft ein Beispiel zu geben, wollen wir einen elastischen Stab (oder Faden) betrachten, welcher seiner Länge nach durch eine spannende Kraft, z. B. durch ein angehängtes Gewicht, gedehnt wird, während nach den Seitenrichtungen keine Kraft auf ihn wirkt. Statt einer den Stab in der Längenrichtung dehnenden Kraft kann auch eine ihn in der Längenrichtung zusammendrückende Kraft stattfinden, sofern der Stab dadurch nicht gebogen wird. Eine solche zusammendrückende Kraft behandeln wir in den Formeln einfach als *negative* spannende Kraft. Die Bedingung, dass nach den Seitenrichtungen keine Kraft auf den Stab wirke, würde eigentlich nur dann vollständig erfüllt werden, wenn der Stab dem Luftdrucke entzogen und also in einen luftleeren Raum gebracht würde; wenn indessen die spannende Kraft, welche nach der Längenrichtung auf die Querschnittsfläche des Stabes wirkt, gegen den auf eine ebenso grosse Fläche wirkenden Luftdruck sehr gross ist, so kann man den letzteren dagegen vernachlässigen.

Die spannende Kraft möge mit P und die Länge, welche der Stab unter ihrem Einflusse und bei der Temperatur T hat, mit l bezeichnet werden. Die Länge des Stabes und überhaupt sein ganzer Zustand ist unter den gegebenen Umständen durch die Grössen P und T bestimmt, und wir können diese daher als unabhängige Veränderliche wählen.

Wenn nun durch eine unendlich kleine Aenderung der spannenden Kraft, oder der Temperatur, oder auch beider, die Länge l sich um dl vermehrt, so wird dabei von der spannenden Kraft P die Arbeit Pdl gethan. Da wir aber in unseren Formeln nicht die von einer Kraft gethane sondern die von ihr *erlittene* Arbeit als positiv rechnen, so lautet die zur Bestimmung der äusseren Arbeit dienende Gleichung:

$$dW = -Pdl. \tag{16}$$

Betrachten wir l als Function von P und T, so können wir diese Gleichung so schreiben:

$$dW = -P\left(\frac{dl}{dP}dP + \frac{dl}{dT}dT\right),$$

woraus weiter folgt:

$$\frac{dW}{dP} = -P\frac{dl}{dP}$$
$$\frac{dW}{dT} = -P\frac{dl}{dT}.$$

Indem wir die erste dieser Gleichungen nach T und die zweite nach P differentiiren und dabei berücksichtigen, dass, da P und T die beiden unabhängigen Veränderlichen sind, der Differentialcoefficient $\frac{dP}{dT}$ gleich Null zu setzen ist, erhalten wir:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dW}{dP}\right) = -P\frac{d^2l}{dP\,dT}$$
$$\frac{d}{dP}\left(\frac{dW}{dT}\right) = -\frac{dl}{dT} - P\frac{d^2l}{dT\,dP}.$$

Subtrahiren wir die letztere dieser Gleichungen von der ersteren und setzen für die dadurch an der linken Seite entstehende Differenz das früher eingeführte Zeichen D_{PT} ein, so kommt:

$$D_{PT} = \frac{dl}{dT}. \tag{17}$$

Diesen Werth von D_{PT} wenden wir auf die Gleichungen (12), (13), (14) und (15) des Abschnittes V. an, nachdem wir in denselben P an die Stelle von x gesetzt haben, dann erhalten wir die auf unseren Fall bezügliche Form der Hauptgleichungen, nämlich

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dP}\right) - \frac{d}{dP}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{dl}{dT}, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dQ}{dP}\right) - \frac{d}{dP}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dP}, \tag{19}$$

$$\frac{dQ}{dP} = T\frac{dl}{dT}, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dP}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = T\frac{d^2l}{dT^2}. \tag{21}$$

§. 9. Temperaturänderung bei der Verlängerung des Stabes.

Die Gleichung (20) lässt sofort durch ihre Form eine eigenthümliche Beziehung zwischen zwei Vorgängen erkennen, nämlich zwischen der durch Temperaturänderung bewirkten Längenänderung und der durch Längenänderung bewirkten Temperaturänderung. Wenn nämlich, wie es der Regel nach der Fall ist, der Stab bei constant bleibender Spannung durch Erwärmung länger wird, und somit $\frac{dl}{dT}$ positiv ist, so ist der Gleichung nach auch $\frac{dQ}{dP}$ positiv, woraus folgt, dass der Stab, wenn er durch Vermehrung der spannenden Kraft verlängert wird, dabei Wärme von Aussen empfangen muss, um seine Temperatur unverändert beizubehalten, und dass er sich daher, falls ihm keine Wärme zugeführt wird, bei der Verlängerung abkühlt. Wenn dagegen, was ausnahmsweise vorkommen kann, die Erwärmung bei constanter Spannung eine Verkürzung zur Folge hat, und somit $\frac{dl}{dT}$ negativ ist, so ist der Gleichung nach auch $\frac{dQ}{dP}$ negativ. In diesem Falle muss der Stab also bei der durch vermehrte Spannung bewirkten Verlängerung Wärme nach Aussen abgeben, um eine constante Temperatur zu behalten, und wenn keine Wärmeabgabe stattfindet, muss er sich bei der Verlängerung erwärmen.

Die Grösse der betreffenden Temperaturänderung, welche eintritt, wenn die spannende Kraft sich ändert, ohne dass dem Stabe Wärme mitgetheilt oder entzogen wird, ergiebt sich leicht, wenn man in ähnlicher Weise, wie es früher bei Körpern, die unter einem gleichmässigen Oberflächendruck stehen, geschehen ist, die vollständige Differentialgleichung erster Ordnung für Q bildet. Der Differentialcoefficient $\frac{d_T Q}{dP}$ ist durch die Gleichung (20) bestimmt, in welcher wir statt $\frac{dl}{dT}$ jetzt vollständiger $\frac{d_P l}{dT}$ schreiben wollen. Um den anderen Differentialcoefficienten $\frac{d_P Q}{dT}$ in einer für unseren Zweck bequemen Weise ausdrücken zu können, möge diejenige

specifische Wärme des Stabes, welche sich auf constante Spannung bezieht, mit C_P, und das Gewicht des Stabes mit M bezeichnet werden. Dann ist:

$$\frac{d_P Q}{dT} = MC_P,$$

und die vollständige Differentialgleichung lautet daher:

$$dQ = MC_P dT + T\frac{d_P l}{dT}dP. \tag{22}$$

Macht man nun die Voraussetzung, dass dem Stabe keine Wärme mitgetheilt oder entzogen werde, so hat man $dQ = 0$ zu setzen, und erhält:

$$0 = MC_P dT + T\frac{d_P l}{dT}dP.$$

Wenn man diese Gleichung durch dP dividirt, so stellt der Bruch $\frac{dT}{dP}$ denjenigen Differentialcoefficienten von T nach P dar, bei dessen Bildung die Entropie als constant vorausgesetzt ist, und er ist daher vollständiger $\frac{d_S T}{dP}$ zu schreiben. Man erhält auf diese Weise die Gleichung:

$$\frac{d_S T}{dP} = -\frac{T}{MC_P}\cdot\frac{d_P l}{dT}. \tag{23}$$

Diese Gleichung ist, wenn auch nicht gerade in derselben Form, zuerst von W. Thomson entwickelt, und ihre Richtigkeit ist durch Versuche von Joule[1]) bestätigt. Besonders auffällig zeigte sich die Uebereinstimmung der Beobachtungsresultate mit der Theorie in einer beim Kautschuk vorkommenden Erscheinung, welche schon früher von Gough wahrgenommen war, und dann von Joule ebenfalls beobachtet und durch genauere Messungen festgestellt wurde. So lange der Kautschuk entweder gar nicht, oder nur durch eine geringe spannende Kraft gedehnt ist, verhält er sich in Bezug auf die durch Temperaturänderung bewirkte Längenänderung, wie die anderen Körper, nämlich dass er sich bei der Erwärmung verlängert, und bei der Abkühlung verkürzt. Wenn er aber durch eine grössere Kraft gedehnt ist, so zeigt er das umgekehrte Verhalten, dass er sich bei der Erwärmung verkürzt und bei der Abkühlung verlängert. Der Differentialcoeffi-

---

[1]) *Phil. Transact. for the year 1859.*

cient $\frac{d_P l}{dT}$ ist also im ersten Falle positiv und im zweiten Falle negativ. Dementsprechend zeigt er die Eigenschaft, dass er, so lange die Dehnung noch gering ist, durch Zunahme der Dehnung sich abkühlt, dagegen bei starker Dehnung durch Zunahme der Dehnung sich erwärmt, ganz so wie es die Gleichung (23) verlangt, nach welcher der Differentialcoefficient $\frac{d_S T}{dP}$ immer das entgegengesetzte Vorzeichen haben muss, wie $\frac{d_P l}{dT}$.

§. 10. Weitere Folgerungen aus den obigen Gleichungen.

Man kann die vollständige Differentialgleichung (22) auch so umformen, dass T und l oder l und P als unabhängige Veränderliche in ihr vorkommen.

Dazu möge zunächst die Beziehung vorausgeschickt werden, in welcher die Differentialcoefficienten zwischen den Grössen T, l und P unter einander stehen, und welche durch eine Gleichung von derselben Form, wie (2), ausgedrückt wird, nämlich:

$$\frac{d_T P}{dl} \cdot \frac{d_P l}{dT} \cdot \frac{d_l T}{dP} = -1. \tag{24}$$

Um nun die vollständige Differentialgleichung zu bilden, welche T und l als unabhängige Veränderliche enthält, betrachten wir P als Function von T und l und schreiben demgemäss (22) in der Form:

$$dQ = MC_P dT + T\frac{d_P l}{dT}\left(\frac{d_l P}{dT}dT + \frac{d_T P}{dl}dl\right)$$

oder:

$$dQ = \left(MC_P + T\frac{d_P l}{dT} \cdot \frac{d_l P}{dT}\right)dT + T\frac{d_P l}{dT} \cdot \frac{d_T P}{dl}dl.$$

Das im letzten Gliede stehende Product aus zwei Differentialcoefficienten kann man gemäss (24) durch einen einzelnen Differentialcoefficienten ersetzen, und erhält dadurch:

$$dQ = \left(MC_P + T\frac{d_P l}{dT} \cdot \frac{d_l P}{dT}\right)dT - T\frac{d_l P}{dT}dl. \tag{25}$$

Will man für die specifische Wärme bei constanter Länge ein besonderes Zeichen C_l einführen, so hat man den in Klammer

stehenden Factor von dT gleich MC_l zu setzen, woraus sich ergiebt:

$$C_l = C_P + \frac{T}{M} \cdot \frac{d_P l}{dT} \cdot \frac{d_l P}{dT}, \tag{26}$$

oder nach einer mit Hülfe von (24) vorgenommenen Umformung:

$$C_l = C_P - \frac{T}{M} \cdot \frac{\left(\frac{d_P l}{dT}\right)^2}{\frac{d_T l}{dP}}. \tag{27}$$

Die Gleichung (25) nimmt dann folgende vereinfachte Form an:

$$dQ = MC_l dT - T\frac{d_l P}{dT} dl. \tag{28}$$

Um die vollständige Differentialgleichung zu bilden, welche l und P als unabhängige Veränderliche enthält, betrachten wir T als Function von l und P, wodurch die Gleichung (22) sich so gestaltet:

$$dQ = MC_P\left(\frac{d_P T}{dl} dl + \frac{d_l T}{dP} dP\right) + T\frac{d_P l}{dT} dP$$

$$= MC_P \frac{d_P T}{dl} dl + \left(MC_P \frac{d_l T}{dP} + T\frac{d_P l}{dT}\right) dP.$$

Wenn man hierin den Factor von dP folgendermaassen umändert:

$$dQ = MC_P \frac{d_P T}{dl} dl + \left(MC_P + T\frac{d_P l}{dT} \cdot \frac{d_l P}{dT}\right)\frac{d_l T}{dP} dP,$$

so kann man den in Klammer stehenden Ausdruck nach (26) durch MC_l ersetzen und erhält somit:

$$dQ = MC_P \frac{d_P T}{dl} dl + MC_l \frac{d_l T}{dP} dP. \tag{29}$$

Die Gleichungen (28) und (29) wollen wir wieder auf den speciellen Fall anwenden, wo dem Stabe von Aussen keine Wärme mitgetheilt oder entzogen wird, und somit $dQ = 0$ zu setzen ist. Dann giebt die erstere:

$$\frac{d_S T}{dl} = \frac{T}{MC_l} \cdot \frac{d_l P}{dT}, \tag{30}$$

und die letztere giebt zunächst:

$$\frac{d_S l}{dP} = -\frac{C_l}{C_P} \cdot \frac{\frac{d_l T}{dP}}{\frac{d_P T}{dl}},$$

wofür in Folge von (24) geschrieben werden kann:

$$\frac{d_S l}{dP} = \frac{C_l}{C_P} \cdot \frac{d_T l}{dP}. \tag{31}$$

Setzt man hierin noch für C_l seinen Werth aus (27), so kommt:

$$\frac{d_S l}{dP} = \frac{d_T l}{dP} - \frac{T}{MC_P}\left(\frac{d_P l}{dT}\right)^2 \tag{32}$$

Die durch den hier bestimmten Differentialcoefficienten $\frac{d_S l}{dP}$ ausgedrückte Beziehung zwischen Länge und spannender Kraft ist es, welche man bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit in einem elastischen Stabe in Anwendung zu bringen hat, an Stelle der gewöhnlich angewandten durch den Differentialcoefficienten $\frac{d_T l}{dP}$ ausgedrückten Beziehung, welche durch den Elasticitätscoefficienten bestimmt wird, ebenso, wie man bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit in luftförmigen und flüssigen Körpern die durch den Differentialcoefficienten $\frac{d_S v}{dp}$ ausgedrückte Beziehung zwischen Volumen und Druck, statt der durch den Differentialcoefficienten $\frac{d_T v}{dp}$ ausgedrückten Beziehung, in Anwendung zu bringen hat.

Dabei ist noch zu bemerken, dass bei der Betrachtung der Schallfortpflanzung, wo es sich nicht um grosse Werthe der Spannung P handelt, in der Gleichung (32), welche zur Bestimmung des Differentialcoefficienten $\frac{d_S l}{dP}$ dient, an die Stelle der durch C_P bezeichneten specifischen Wärme bei constanter Spannung ohne Bedenken die in gewöhnlicher Weise unter dem Drucke der Atmosphäre gemessene specifische Wärme bei constantem Drucke gesetzt werden kann.

ABSCHNITT IX.

Bestimmung der Energie und Entropie.

§. 1. Allgemeine Gleichungen.

In den früheren Abschnitten ist vielfach von der *Energie* und der *Entropie* eines Körpers die Rede gewesen, als von zwei für die Wärmelehre wichtigen Grössen, welche durch den gerade stattfindenden Zustand des Körpers bestimmt sind, ohne dass man die Art, wie der Körper in diesen Zustand gelangt ist, zu kennen braucht. Wenn diese Grössen für einen Körper bekannt sind, so lassen sich mit Hülfe derselben viele Rechnungen, welche sich auf die Zustandsänderungen des Körpers und die dabei in Betracht kommenden Wärmemengen beziehen, in sehr einfacher Weise ausführen. Die Eine der beiden Grössen, die Energie, ist schon mehrfach, besonders von Kirchhoff[1]), zum Gegenstande werthvoller Untersuchungen gemacht, und es ist dabei auch die Art ihrer Bestimmung näher besprochen. Wir wollen hier die Energie und Entropie gemeinsam behandeln, und die Gleichungen, welche zu ihrer Bestimmung dienen, zusammenstellen.

Im ersten und dritten Abschnitte sind folgende Gleichungen als Hauptgleichungen aufgestellt, welche dort mit (III.) und (VI.) bezeichnet wurden:

---

[1]) Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben. Pogg. Ann. Bd. 103, S. 177.

$$\text{(III.)} \qquad dQ = dU + dW,$$

$$\text{(VI.)} \qquad dQ = TdS.$$

Hierin bedeuten U und S die Energie und Entropie des Körpers, und dU und dS die Veränderungen, welche dieselben bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung des Körpers erleiden. dQ ist die Wärmemenge, welche der Körper bei der Zustandsänderung aufnimmt, dW die dabei geleistete äussere Arbeit und T die absolute Temperatur, bei welcher die Aenderung geschieht. Die erstere dieser beiden Gleichungen ist auf jede, in beliebiger Weise vor sich gehende unendlich kleine Zustandsänderung anwendbar, die letztere dagegen darf nur auf solche Zustandsänderungen angewandt werden, die in umkehrbarer Weise stattfinden. Diese beiden Gleichungen schreiben wir nun in der Form:

$$\text{(1)} \qquad dU = dQ - dW,$$

$$\text{(2)} \qquad dS = \frac{dQ}{T},$$

um aus ihnen durch Integration die Grössen U und S zu bestimmen.

Dabei ist zunächst ein Punkt zu erwähnen, der in Bezug auf die Energie schon in §. 8 des ersten Abschnittes besprochen wurde. Man kann nämlich nicht die ganze Energie eines Körpers bestimmen, sondern nur den Zuwachs, welchen die Energie erfahren hat, während der Körper aus irgend einem als Anfangszustand gewählten Zustande in seinen gegenwärtigen Zustand übergegangen ist, und dasselbe gilt auch von der Entropie.

Um nun die Gleichung (1) in Anwendung zu bringen, denken wir uns, dass der Körper aus dem gegebenen Anfangszustande, in welchem wir die Energie mit U_0 bezeichnen, auf irgend einem für unsere Betrachtung bequemen Wege und in irgend einer (umkehrbaren oder nicht umkehrbaren) Weise in seinen gegenwärtigen Zustand gebracht werde, und für den Verlauf dieser Zustandsänderung denken wir uns die Integration ausgeführt. Das Integral von dU stellt sich einfach durch die Differenz $U - U_0$ dar. Die Integrale von dQ und dW, d. h. die ganze Wärmemenge, welche der Körper während der Zustandsänderung aufgenommen, und die ganze äussere Arbeit, welche er dabei geleistet hat, wollen wir mit Q und W bezeichnen. Dann erhalten wir die Gleichung:

$$\text{(3)} \qquad U = U_0 + Q - W.$$

Hieraus folgt, dass, wenn wir für irgend eine Art des Ueberganges

aus einem gegebenen Anfangszustande des Körpers in seinen gegenwärtigen Zustand die dabei aufgenommene Wärme und geleistete äussere Arbeit bestimmen können, wir dadurch auch die Energie des Körpers bis auf eine auf den Anfangszustand bezügliche Constante kennen lernen.

Um ferner die Gleichung (2) anzuwenden, denken wir uns, dass der Körper aus dem gegebenen Anfangszustande, in welchem wir die Entropie mit S_0 bezeichnen, wiederum auf einem beliebig gewählten Wege, aber in umkehrbarer Weise in seinen gegenwärtigen Zustand gebracht werde, und für diese Zustandsänderung denken wir uns die Gleichung integrirt. Das Integral von dS stellt sich wieder durch die Differenz $S - S_0$ dar, und, indem wir das andere Integral nur andeuten, erhalten wir die Gleichung:

$$S = S_0 + \int \frac{dQ}{T}. \tag{4}$$

Hieraus folgt, dass, wenn wir für einen in umkehrbarer Weise aber auf beliebigem Wege geschehenen Uebergang des Körpers aus einem gegebenen Anfangszustande in seinen gegenwärtigen Zustand das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ bestimmen können, wir dadurch den Werth der Entropie bis auf eine auf den Anfangszustand bezügliche Constante erhalten.

§. 2. Differentialgleichungen für den Fall, wo nur umkehrbare Veränderungen vorkommen, und der Zustand des Körpers durch zwei unabhängige Veränderliche bestimmt wird.

Wenn wir die Gleichungen (III.) und (VI.) beide auf eine und dieselbe, in umkehrbarer Weise vor sich gehende unendlich kleine Zustandsänderung eines Körpers anwenden, so ist das Wärmeelement dQ in beiden Gleichungen dasselbe, und wir können es daher aus den Gleichungen eliminiren, wodurch wir erhalten:

$$TdS = dU + dW. \tag{5}$$

Nun wollen wir annehmen, der Zustand des Körpers sei durch irgend zwei Veränderliche bestimmt, welche wir, wie in Abschnitt V., vorläufig allgemein mit x und y bezeichnen, indem wir uns vorbehalten, später bestimmte Grössen, wie z. B. Temperatur, Volumen

und Druck dafür einzusetzen. Wenn der Zustand des Körpers durch die Veränderlichen x und y bestimmt wird, so müssen sich alle Grössen, welche durch den augenblicklich stattfindenden Zustand des Körpers bestimmt sind, ohne dass man die Art, wie der Körper in diesen Zustand gelangt ist, zu kennen braucht, durch Functionen dieser Veränderlichen darstellen lassen, in denen die Veränderlichen als von einander unabhängig betrachtet werden können. Demnach sind auch die Entropie S und die Energie U als Functionen der unabhängigen Veränderlichen x und y anzusehen. Die äussere Arbeit W dagegen verhält sich in dieser Beziehung, wie schon mehrfach besprochen wurde, wesentlich anders. Die *Differentialcoefficienten* von W können zwar, sofern es sich nur um umkehrbare Veränderungen handelt, als bestimmte Functionen von x und y betrachtet werden, W selbst aber lässt sich nicht durch eine solche Function darstellen, sondern kann erst dann bestimmt werden, wenn nicht nur der Anfangs- und Endzustand des Körpers, sondern auch der Weg, auf welchem der Körper aus dem einen in den anderen gelangte, gegeben ist.

Wenn man nun in der Gleichung (5) setzt:

$$dS = \frac{dS}{dx}dx + \frac{dS}{dy}dy$$

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy$$

$$dW = \frac{dW}{dx}dx + \frac{dW}{dy}dy$$

so geht sie über in:

$$T\frac{dS}{dx}dx + T\frac{dS}{dy}dy = \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dW}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy} + \frac{dW}{dy}\right)dy.$$

Da diese Gleichung für beliebige Werthe der Differentiale dx und dy richtig sein muss, also unter anderen auch für die Fälle, wo das eine oder das andere der Differentiale gleich Null gesetzt wird, so zerfällt sie sofort in folgende zwei Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} T\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{dU}{dx} + \dfrac{dW}{dx} \\[2ex] T\dfrac{dS}{dy} = \dfrac{dU}{dy} + \dfrac{dW}{dy}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man durch zweite Differentiation eine der Grössen S oder U eliminiren.

Wir wollen zuerst die Grösse U eliminiren, weil die dadurch entstehende Gleichung die einfachere ist.

Wir differentiiren dazu die erste der Gleichungen (6) nach y und die zweite nach x. Dabei wollen wir die Differentialcoefficienten zweiter Ordnung von S und U ganz so, wie gewöhnlich, schreiben. Die Differentialcoefficienten von $\frac{dW}{dx}$ und $\frac{dW}{dy}$ dagegen wollen wir, wie es schon in Abschnitt V. geschehen ist, um äusserlich anzudeuten, dass es nicht Differentialcoefficienten zweiter Ordnung einer Function von x und y sind, so schreiben: $\frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right)$ und $\frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right)$. Endlich ist noch zu beachten, dass die in den Gleichungen vorkommende Grösse T, nämlich die absolute Temperatur des Körpers, von welcher wir in dieser Entwickelung annehmen, dass sie in allen Theilen des Körpers gleich sei, ebenfalls als Function von x und y anzusehen ist. Wir erhalten also:

$$\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dS}{dx} + T\frac{d^2S}{dxdy} = \frac{d^2U}{dxdy} + \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right)$$
$$\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dS}{dy} + T\frac{d^2S}{dydx} = \frac{d^2U}{dydx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right).$$

Wenn wir die zweite dieser Gleichungen von der ersten abziehen, und dabei bedenken, dass

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \frac{d^2S}{dydx} \text{ und } \frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}$$

ist, so erhalten wir:

$$\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dS}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right).$$

Die hierin an der rechten Seite stehende Differenz haben wir in Abschnitt V. *die auf xy bezügliche Arbeitsdifferenz* genannt, und mit D_{xy} bezeichnet, so dass zu setzen ist:

$$D_{xy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right). \tag{7}$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dS}{dy} = D_{xy}. \tag{8}$$

Dieses ist die aus der Gleichung (5) hervorgehende, zur Bestimmung von S dienende Differentialgleichung.

Um ferner aus den beiden Gleichungen (6) die Grösse S zu eliminiren, schreiben wir sie in folgender Form:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{T}\cdot\frac{dU}{dx} + \frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dx}$$

$$\frac{dS}{dy} = \frac{1}{T}\cdot\frac{dU}{dy} + \frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dy}.$$

Von diesen Gleichungen differentiiren wir wieder die erste nach y und die zweite nach x, wodurch kommt:

$$\frac{d^2S}{dxdy} = \frac{1}{T}\cdot\frac{d^2U}{dxdy} - \frac{1}{T^2}\cdot\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dU}{dx} + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2S}{dydx} = \frac{1}{T}\cdot\frac{d^2U}{dydx} - \frac{1}{T^2}\cdot\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dU}{dy} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dy}\right).$$

Subtrahirt man die zweite dieser Gleichungen von der ersten und bringt in der dadurch entstehenden Gleichung die Glieder, welche U enthalten, auf die linke Seite, und multiplicirt dann noch die ganze Gleichung mit T^2, so kommt:

$$\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dU}{dx} - \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dU}{dy} = T^2\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dy}\right)\right]$$

Für die hierin an der rechten Seite stehende Grösse wollen wir ebenfalls ein besonderes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(9) \qquad \varDelta_{xy} = T^2\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dy}\right)\right],$$

wobei zu bemerken ist, dass zwischen D_{xy} und $\varDelta_{xy}$ folgende Beziehung stattfindet:

$$(10) \qquad \varDelta_{xy} = TD_{xy} - \frac{dT}{dy}\cdot\frac{dW}{dx} + \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dW}{dy}.$$

Nach Einführung dieses Zeichens lautet die obige Gleichung:

$$(11) \qquad \frac{dT}{dy}\cdot\frac{dU}{dx} - \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dU}{dy} = \varDelta_{xy}.$$

Dieses ist die aus der Gleichung (5) hervorgehende, zur Bestimmung von U dienende Differentialgleichung.

§. 3. Einführung der Temperatur als eine der unabhängigen Veränderlichen.

Die vorstehenden Gleichungen nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn man darin als eine der unabhängigen Veränderlichen die Temperatur T wählt. Setzt man $T = y$, so folgt daraus:

$$\frac{dT}{dy} = 1 \text{ und } \frac{dT}{dx} = 0.$$

Man erhält daher aus (10) folgende, die Beziehung zwischen D_{xT} und Δ_{xT} ausdrückende Gleichung:

$$\Delta_{xT} = TD_{xT} - \frac{dW}{dx}, \tag{12}$$

und die Gleichungen (8) und (11) gehen über in:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dx} = D_{xT} \\ \frac{dU}{dx} = \Delta_{xT}. \end{cases} \tag{13}$$

Hierdurch sind die auf x bezüglichen Differentialcoefficienten der beiden Functionen S und U bestimmt. Für die auf T bezüglichen Differentialcoefficienten wollen wir die Ausdrücke beibehalten, welche sich unter der Voraussetzung, dass der Zustand des Körpers durch die Veränderlichen T und x bestimmt wird, unmittelbar aus den Gleichungen (2) und (1) ergeben, nämlich:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT} \\ \frac{dU}{dT} = \frac{dQ}{dT} - \frac{dW}{dT}. \end{cases} \tag{14}$$

Durch Anwendung der Gleichungen (13) und (14) kann man folgende vollständige Differentialgleichungen bilden:

$$\begin{cases} dS = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT} dT + D_{xT} dx \\ dU = \left(\frac{dQ}{dT} - \frac{dW}{dT}\right) dT + \Delta_{xT} dx. \end{cases} \tag{15}$$

Da die Grössen S und U sich durch Functionen von T und x darstellen lassen müssen, in welchen die beiden Veränderlichen T und x als von einander unabhängig angesehen werden können, so muss für die beiden vorstehenden Gleichungen die bekannte Bedingungsgleichung der Integrabilität gelten. Für die erste Gleichung lautet diese:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT}\right) = \frac{dD_{xT}}{dT},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = T \frac{dD_{xT}}{dT}, \tag{16}$$

welches die Gleichung (15) des Abschnittes V. ist. Für die zweite Gleichung lautet die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dT}\right)=\frac{d\varDelta_{xT}}{dT}, \tag{17}$$

welche Gleichung leicht auf die vorige zurückgeführt werden kann. Nach (12) ist nämlich:

$$\varDelta_{xT}=TD_{xT}-\frac{dW}{dx}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach T, so kommt:

$$\frac{d\varDelta_{xT}}{dT}=T\frac{dD_{xT}}{dT}+D_{xT}-\frac{d}{dT}\left(\frac{dW}{dx}\right).$$

Bedenkt man nun, dass:

$$D_{xT}=\frac{d}{dT}\left(\frac{dW}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dT}\right),$$

so geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{d\varDelta_{xT}}{dT}=T\frac{dD_{xT}}{dT}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dT}\right).$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von $\frac{d\varDelta_{xT}}{dT}$ in die Gleichung (17) gelangt man wieder zu der Gleichung (16).

Um nun durch Integration der Gleichungen (15) die Grössen S und U selbst zu bestimmen, denken wir uns wieder, dass der Körper aus einem gegebenen Anfangszustande, in welchem die Grössen T, x, S und U die Werthe T_0, x_0, S_0 und U_0 haben, auf irgend einem Wege in seinen gegenwärtigen Zustand gebracht werde, und für den Verlauf dieser Zustandsänderung führen wir die Integration aus.

Nehmen wir beispielsweise an, der Körper werde zuerst von der Temperatur T_0 bis zur Temperatur T erwärmt, während die andere Veränderliche ihren anfänglichen Werth x_0 behält, und bei der Temperatur T gehe dann die andere Veränderliche vom Anfangswerthe x_0 zu dem Werthe x über, so erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} S &= S_0+\int_{T_0}^{T}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dT}\right)_{x=x_0}dT+\int_{x_0}^{x}D_{xT}dx \\ U &= U_0+\int_{T_0}^{T}\left(\frac{dQ}{dT}-\frac{dW}{dT}\right)_{x=x_0}dT+\int_{x_0}^{x}\varDelta_{xT}dx. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

In beiden Gleichungen ist das erste Integral an der rechten Seite

eine blosse Function von T, während das zweite Integral eine Function von T und x ist.

Nehmen wir umgekehrt an, es finde zuerst beim Anfangswerthe von T die Veränderung von x und dann beim Endwerthe von x die Veränderung von T statt, so erhalten wir:

$$(19)\quad \begin{cases} S = S_0 + \int_{x_0}^{x} (D_{xT})_{T=T_0}\, dx + \int_{T_0}^{T} \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT}\, dT \\ U = U_0 + \int_{x_0}^{x} (\varDelta_{xT})_{T=T_0}\, dx + \int_{T_0}^{T} \left(\frac{dQ}{dT} - \frac{dW}{dT}\right) dT, \end{cases}$$

in welchen beiden Gleichungen das erste Integral an der rechten Seite eine blosse Function von x und das zweite eine Function von T und x ist.

Statt dieser beiden beispielsweise angeführten Wege kann man dem Obigen nach auch einen beliebigen anderen Weg des Ueberganges wählen, auf welchem die Veränderungen von T und x irgend wie wechseln oder auch nach irgend einem Gesetze beide gleichzeitig stattfinden, und man wird natürlich in jedem besonderen Falle denjenigen Weg wählen, für welchen die zur Ausführung der Rechnung erforderlichen Data am besten bekannt sind.

§. 4. Specialisirung der Differentialgleichungen durch Annahme eines gleichmässigen Oberflächendruckes als einzige äussere Kraft.

Wird als äussere Kraft nur ein gleichmässiger und normaler Oberflächendruck angenommen, so dass zu setzen ist:

$$dW = p\,dv,$$

und daher:

$$\frac{dW}{dx} = p\frac{dv}{dx} \text{ und } \frac{dW}{dy} = p\frac{dv}{dy},$$

so nehmen die Ausdrücke von D_{xy} und $\varDelta_{xy}$ besondere Formen an, von denen die für D_{xy} geltende schon im Abschnitt V. angeführt wurde. Man erhält zunächst:

$$D_{xy} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dv}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dy}\right)$$

$$\varDelta_{xy} = T^2\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{p}{T}\cdot\frac{dv}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{T}\cdot\frac{dv}{dy}\right)\right].$$

In der letzteren dieser Gleichungen wollen wir zur Abkürzung setzen:

$$(20)\qquad \pi = \frac{p}{T},$$

wodurch sie übergeht in:

$$\varDelta_{xy} = T^2\left[\frac{d}{dy}\left(\pi\frac{dv}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\pi\frac{dv}{dy}\right)\right].$$

Führt man nun in diesen Gleichungen die Differentiation der Producte aus, und bedenkt dabei, dass $\frac{d^2v}{dx\,dy} = \frac{d^2v}{dy\,dx}$ ist, so erhält man:

$$(21)\qquad D_{xy} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dy},$$

$$(22)\qquad \varDelta_{xy} = T^2\left(\frac{d\pi}{dy}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{d\pi}{dx}\cdot\frac{dv}{dy}\right).$$

Wird als eine der unabhängigen Veränderlichen die Temperatur T gewählt, während die andere x bleibt, so lauten die Ausdrücke:

$$(23)\qquad D_{xT} = \frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT},$$

$$(24)\qquad \varDelta_{xT} = T^2\left(\frac{d\pi}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{d\pi}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right),$$

oder auch, wenn man für π wieder seinen Werth $\frac{p}{T}$ setzt:

$$(24\text{a})\qquad \varDelta_{xT} = T\left(\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right) - p\frac{dv}{dx}.$$

Hierdurch gestalten sich die Gleichungen (15) folgendermaassen:

$$(25)\qquad dS = \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dT}dT + \left(\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right)dx,$$

$$(26)\qquad dU = \left(\frac{dQ}{dT} - p\frac{dv}{dT}\right)dT + T^2\left(\frac{d\pi}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{d\pi}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right)dx,$$

oder anders geschrieben:

$$(26\text{a})\qquad dU = \left(\frac{dQ}{dT} - p\frac{dv}{dT}\right)dT + \left[T\left(\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right) - p\frac{dv}{dx}\right]dx.$$

Wird nun weiter als zweite bis jetzt unbestimmt gelassene Veränderliche das Volumen v gewählt, und somit $x = v$ gesetzt, so hat man:

$$\frac{dv}{dx} = 1 \text{ und } \frac{dv}{dT} = 0,$$

und die vorigen Gleichungen gehen dadurch über in:

$$(27) \qquad \begin{cases} dS = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT} dT + \frac{dp}{dT} dv \\ dU = \frac{dQ}{dT} dT + \left(T \frac{dp}{dT} - p\right) dv. \end{cases}$$

Wird als zweite unabhängige Veränderliche neben T der Druck p gewählt, und somit $x = p$ gesetzt, so ist:

$$\frac{dp}{dx} = 1 \text{ und } \frac{dp}{dT} = 0,$$

und es kommt somit:

$$(28) \qquad \begin{cases} dS = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT} dT - \frac{dv}{dT} dp \\ dU = \left(\frac{dQ}{dT} - p \frac{dv}{dT}\right) dT - \left(T \frac{dv}{dT} + p \frac{dv}{dp}\right) dp. \end{cases}$$

§. 5. Anwendung der vorigen Gleichungen auf homogene Körper und speciell auf vollkommene Gase.

Bei homogenen Körpern, auf welche als äussere Kraft nur ein gleichmässiger und normaler Oberflächendruck wirkt, pflegt man, wie es am Schlusse des vorigen Paragraphen geschehen ist, zwei der Grössen T, v und p als unabhängige Veränderliche zu wählen, und der Differentialcoefficient $\frac{dQ}{dT}$ nimmt die schon mehrfach erwähnte einfache Bedeutung an. Wenn nämlich T und v die unabhängigen Veränderlichen sind, so bedeutet $\frac{dQ}{dT}$, falls das Gewicht des Körpers eine Gewichtseinheit ist, die specifische Wärme bei constantem Volumen, und wenn T und p die unabhängigen Veränderlichen sind, so bedeutet $\frac{dQ}{dT}$ für denselben Fall die specifische Wärme bei constantem Drucke. Die Gleichungen (27) und (28) gehen daher über in:

$$(29) \qquad \begin{cases} dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{dp}{dT} dv \\ dU = C_v dT + \left(T \frac{dp}{dT} - p\right) dv \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} dS = \frac{C_p}{T}dT - \frac{dv}{dT}dp \\ dU = \left(C_p - p\frac{dv}{dT}\right)dT - \left(T\frac{dv}{dT} + p\frac{dv}{dp}\right)dp. \end{cases}$$

Wollen wir diese Gleichungen auf ein *vollkommenes Gas* anwenden, so kommt die bekannte Gleichung:

$$pv = RT$$

zur Geltung. Aus dieser folgt, wenn T und v als unabhängige Veränderliche gewählt werden:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{R}{v},$$

und die Gleichungen (29) gehen daher über in:

$$(31)\quad \begin{cases} dS = C_v\frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v} \\ dU = C_v dT. \end{cases}$$

Da in diesem Falle C_v als constant zu betrachten ist, so lassen sich diese Gleichungen sofort integriren und geben:

$$(32)\quad \begin{cases} S = S_0 + C_v \log\frac{T}{T_0} + R\log\frac{v}{v_0} \\ U = U_0 + C_v(T - T_0). \end{cases}$$

Wählt man T und p als unabhängige Veränderliche, so hat man zu setzen:

$$\frac{dv}{dT} = \frac{R}{p} \text{ und } \frac{dv}{dp} = -\frac{RT}{p^2}.$$

Demnach gehen die Gleichungen (30) über in:

$$(33)\quad \begin{cases} dS = C_p\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p} \\ dU = (C_p - R)\,dT, \end{cases}$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$(34)\quad \begin{cases} S = S_0 + C_p \log\frac{T}{T_0} - R\log\frac{p}{p_0} \\ U = U_0 + (C_p - R)(T - T_0). \end{cases}$$

Die Integration der allgemeineren Gleichungen (29) und (30) lässt sich natürlich erst dann ausführen, wenn in (29) p und C_v als Functionen von T und v und in (30) v und C_p als Functionen von T und p bekannt sind.

§. 6. Anwendung der Gleichungen auf einen Körper, welcher sich in zwei verschiedenen Aggregatzuständen befindet.

Als weiteren speciellen Fall wollen wir noch den zur Betrachtung auswählen, auf welchen sich die Abschnitte VI. und VII. beziehen, nämlich den Fall, wo der betrachtete Körper sich theils in einem, theils in einem anderen Aggregatzustande befindet, und wo die Aenderung, welche der Körper bei constanter Temperatur erleiden kann, darin besteht, dass die Grössen der in den beiden Aggregatzuständen befindlichen Theile sich ändern, womit eine Veränderung des Volumens, aber keine Veränderung des Druckes verbunden ist. Da in diesem Falle der Druck p nur von der Temperatur abhängt, so haben wir zu setzen:

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

wodurch die Gleichungen (25) und (26a) in folgende übergehen:

$$(35)\quad \begin{cases} dS = \dfrac{1}{T} \cdot \dfrac{dQ}{dT} dT + \dfrac{dp}{dT} \cdot \dfrac{dv}{dx} dx \\ dU = \left(\dfrac{dQ}{dT} - p\dfrac{dv}{dT}\right) dT + \left(T\dfrac{dp}{dT} - p\right) \dfrac{dv}{dx} dx. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun, wie es in den Abschnitten VI. und VII. geschehen ist, das Gewicht der ganzen Masse mit M und das Gewicht des Theiles, welcher sich im zweiten Aggregatzustande befindet, mit m, und nehmen m statt x als zweite unabhängige Veränderliche, so gilt die in Abschnitt VI. unter (6) gegebene Gleichung:

$$\frac{dv}{dm} = u,$$

wofür wir nach Gleichung (12) desselben Abschnittes auch setzen können:

$$\frac{dv}{dm} = \frac{\varrho}{T\dfrac{dp}{dT}}.$$

Dadurch gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$(36)\quad \begin{cases} dS = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT} dT + \frac{\varrho}{T} dm \\ dU = \left(\frac{dQ}{dT} - p\frac{dv}{dT}\right) dT + \varrho\left(1 - \frac{p}{T\frac{dp}{dT}}\right) dm. \end{cases}$$

Für die Integration dieser Gleichungen diene als Ausgangspunkt derjenige Zustand, wo die ganze Masse M sich im ersten Aggregatzustande befindet, die Temperatur T_0 hat und unter demjenigen Drucke steht, welcher dieser Temperatur entspricht. Den Uebergang von diesem Zustande zu dem gegenwärtigen, wo die Temperatur T ist, und wo von der Masse M der Theil m sich im zweiten und der Theil $M - m$ im ersten Aggregatzustande befindet, denke man sich auf folgendem Wege bewirkt. Zuerst werde die Masse, während sie immer ganz im ersten Aggregatzustande bleibt, von der Temperatur T_0 bis zur Temperatur T erwärmt, und der Druck ändere sich dabei in der Weise, dass er immer der gerade stattfindenden Temperatur entspreche. Dann gehe bei der Temperatur T der Theil m der Masse aus dem ersten in den zweiten Aggregatzustand über. Für diese beiden nach einander stattfindenden Veränderungen möge die Integration ausgeführt werden.

Während der ersten Veränderung ist $dm = 0$, und es ist also nur das erste Glied an der rechten Seite der vorigen Gleichungen zu integriren. Darin hat $\frac{dQ}{dT}$ den Werth MC, wenn C die specifische Wärme des Körpers im ersten Aggregatzustande bedeutet, und zwar die specifische Wärme für den Fall, wo bei der Erwärmung der Druck sich in der oben erwähnten Weise ändert. Von dieser specifischen Wärme ist schon mehrfach die Rede gewesen und nach den im §. 6 des vorigen Abschnittes ausgeführten Bestimmungen kann sie für den Fall, wo der erste Aggregatzustand der feste oder flüssige und der zweite der luftförmige ist, in numerischen Rechnungen ohne Bedenken der specifischen Wärme bei constantem Drucke gleich gesetzt werden. Nur bei sehr hohen Temperaturen, bei denen das Wachsen der Dampfspannung mit der Temperatur sehr schnell stattfindet, kann der Unterschied zwischen der specifischen Wärme C und der specifischen Wärme bei constantem Drucke so erheblich werden, dass er berücksichtigt werden muss. Ferner hat während der ersten Veränderung das mit v bezeichnete Volumen den Werth $M\sigma$, worin σ das specifische

Volumen des Stoffes im ersten Aggregatzustande bedeutet. Während der zweiten Veränderung ist $dT = 0$, und es ist daher nur das zweite Glied an der rechten Seite der obigen Gleichungen zu integriren. Diese Integration lässt sich in beiden Gleichungen sofort ausführen, da die Factoren, mit denen das Differential dm multiplicirt ist, von m unabhängig sind, und daher nur dm selbst integrirt zu werden braucht, wodurch m entsteht. Es kommt somit:

$$(37)\quad \begin{cases} S = S_0 + M \int_{T_0}^{T} \frac{C}{T} dT + \frac{m\varrho}{T} \\ U = U_0 + M \int_{T_0}^{T} \left(C - p\frac{d\sigma}{dT}\right) dT + m\varrho\left(1 - \frac{p}{T\frac{dp}{dT}}\right). \end{cases}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $m = o$ oder $m = M$, so erhält man die Entropie und Energie für die beiden Fälle, wo die Masse sich entweder ganz im ersten oder ganz im zweiten Aggregatzustande befindet, und dabei die Temperatur T hat, und unter dem dieser Temperatur entsprechenden Drucke steht. Ist z. B. der erste Aggregatzustand der flüssige und der zweite der luftförmige, so beziehen sich die Ausdrücke, wenn in ihnen $m = o$ gesetzt wird, auf Flüssigkeit von der Temperatur T und unter einem Drucke, welcher gleich dem Maximum der Spannkraft des Dampfes für diese Temperatur ist, und wenn $m = M$ gesetzt wird, auf gesättigten Dampf von der Temperatur T.

§. 7. Verhalten der Grössen D_{xy} und $\varDelta_{xy}$.

Zum Schlusse dieses Abschnittes wird es zweckmässig sein, die Aufmerksamkeit noch auf die Grössen D_{xy} und $\varDelta_{xy}$ zu lenken, welche gemäss den Gleichungen (7) und (9) folgende Bedeutungen haben:

$$D_{xy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right)$$

$$\varDelta_{xy} = T^2\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dW}{dy}\right)\right].$$

Diese beiden Grössen sind Functionen von x und y. Wählt man zur Bestimmung des Zustandes des Körpers statt der Veränder-

lichen x und y irgend zwei andere Veränderliche, welche ξ und η heissen mögen, und bildet mit diesen die entsprechenden Grössen $D_{\xi\eta}$ und $\Delta_{\xi\eta}$, nämlich:

$$(38)\quad \begin{cases} D_{\xi\eta} = \dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{dW}{d\xi}\right) - \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{dW}{d\eta}\right), \\ \Delta_{\xi\eta} = T^2\left[\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{dW}{d\xi}\right) - \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{dW}{d\eta}\right)\right], \end{cases}$$

so sind diese Grössen natürlich Functionen von ξ und η, ebenso wie die vorigen Grössen Functionen von x und y. Vergleicht man nun aber einen dieser beiden letzten Ausdrücke, z. B. denjenigen von $D_{\xi\eta}$ mit dem Ausdrucke der entsprechenden Grösse D_{xy}, so findet man, dass sie nicht bloss zwei auf verschiedene Veränderliche bezogene Ausdrücke einer und derselben Grösse sind, sondern dass sie wirklich verschiedene Grössen darstellen. Aus diesem Grunde habe ich D_{xy} nicht kurzweg die Arbeitsdifferenz, sondern die auf xy bezügliche Arbeitsdifferenz genannt, wodurch sie sofort von $D_{\xi\eta}$, nämlich von der auf $\xi\eta$ bezüglichen Arbeitsdifferenz, unterschieden wird. Ebenso verhält es sich mit Δ_{xy} und $\Delta_{\xi\eta}$, welche gleichfalls als zwei verschiedene Grössen anzusehen sind.

Die Beziehung, welche zwischen den Grössen D_{xy} und $D_{\xi\eta}$ besteht, findet man folgendermaassen. Die Differentialcoefficienten, welche in dem in (38) gegebenen Ausdrucke von $D_{\xi\eta}$ vorkommen, können in der Weise abgeleitet werden, dass man zuerst die Differentialcoefficienten nach den Veränderlichen x und y bildet, und dann jede dieser beiden Veränderlichen als eine Function von ξ und η behandelt. Auf diese Art erhält man:

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{dW}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi} + \frac{dW}{dy}\cdot\frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{dW}{d\eta} = \frac{dW}{dx}\cdot\frac{dx}{d\eta} + \frac{dW}{dy}\cdot\frac{dy}{d\eta}.$$

Von diesen beiden Ausdrücken soll der erste nach η und der zweite nach ξ differentiirt werden, wodurch man unter Anwendung desselben Verfahrens erhält:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dW}{d\xi}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\eta} + \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} \\ + \frac{dW}{dx}\cdot\frac{d^2x}{d\xi d\eta} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right)\cdot\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi} \\ + \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} + \frac{dW}{dy}\cdot\frac{d^2y}{d\xi d\eta} \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\eta} + \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi} \\ + \frac{dW}{dx}\cdot\frac{d^2x}{d\xi d\eta} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} \\ + \frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} + \frac{dW}{dy}\cdot\frac{d^2y}{d\xi d\eta}. \end{array} \right.$$

Wenn man die zweite dieser Gleichungen von der ersten abzieht, so heben sich an der rechten Seite die meisten Glieder auf, und es bleiben nur vier Glieder übrig, welche sich in der folgenden Weise in ein Product aus zwei zweigliedrigen Ausdrücken zusammenziehen lassen:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dW}{d\xi}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = \left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}\right)\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{dW}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dW}{dy}\right)\right].$$

Der in dieser Gleichung an der linken Seite stehende Ausdruck ist $D_{\xi\eta}$, und der an der rechten Seite in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist D_{xy}. Man erhält also schliesslich:

$$(39) \qquad D_{\xi\eta} = \left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}\right)D_{xy}.$$

Auf gleiche Art findet man auch:

$$(39\text{a}) \qquad \Delta_{\xi\eta} = \left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}\right)\Delta_{xy}.$$

Wenn man nur Eine der Veränderlichen durch eine neue ersetzt, wenn man z. B. die Veränderliche x beibehält, während man statt y die neue Veränderliche η einführt, so hat man in den beiden vorigen Gleichungen $x = \xi$, und somit $\frac{dx}{d\xi} = 1$ und $\frac{dx}{d\eta} = 0$ zu setzen, wodurch sie übergehen in:

$$(40) \qquad D_{x\eta} = \frac{dy}{d\eta}D_{xy} \text{ und } \Delta_{x\eta} = \frac{dy}{d\eta}\Delta_{xy}.$$

Will man zwar die ursprünglichen Veränderlichen beibehalten, aber ihre Reihenfolge ändern, so nehmen dadurch die in Rede stehenden Grössen, wie man sofort aus dem blossen Anblicke der Ausdrücke (7) und (9) erkennt, das entgegengesetzte Vorzeichen an, also:

$$D_{yx} = -D_{xy} \text{ und } \Delta_{yx} = -\Delta_{xy}. \tag{41}$$

ABSCHNITT X.

Vorgänge, welche nicht umkehrbar sind.

§. 1. Vervollständigung der mathematischen Ausdrücke des zweiten Hauptsatzes.

Bei dem Beweise des zweiten Hauptsatzes und den sich daran knüpfenden Betrachtungen wurde bisher immer angenommen, dass alle vorkommenden Veränderungen in umkehrbarer Weise vor sich gingen. Wir müssen nun noch untersuchen, inwiefern die Resultate sich ändern, wenn diese Voraussetzung aufgegeben wird, und auch solche Vorgänge, die *nicht umkehrbar* sind, in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden.

Solche Vorgänge kommen, wenn sie auch ihrem Wesen nach unter einander verwandt sind, doch in sehr verschiedenen Formen vor. Ein Fall der Art wurde schon im ersten Abschnitte angeführt, nämlich der, wo die Kraft, mit welcher ein Körper seinen Zustand ändert, z. B. die Kraft, mit der ein Gas sich ausdehnt, nicht einen ihr gleichen Widerstand findet, und daher nicht die ganze Arbeit leistet, welche sie bei der Zustandsänderung leisten könnte. Ferner gehört dahin die Wärmeerzeugung durch Reibung und Luftwiderstand und die Wärmeerzeugung durch einen galvanischen Strom bei der Ueberwindung des Leitungswiderstandes.

Endlich sind die unmittelbaren Wärmeübergänge von warmen zu kalten Körpern, welche durch Leitung oder Strahlung stattfinden, dahin zu rechnen.

Wir wollen nun zu den Betrachtungen zurückkehren, durch welche im vierten Abschnitte bewiesen wurde, dass in einem umkehrbaren Kreisprocesse die Summe aller Verwandlungen gleich Null sein müsse. Für Eine Verwandlungsart, nämlich den Wärmeübergang zwischen Körpern von verschiedenen Temperaturen, wurde es als ein auf dem Wesen der Wärme beruhender Grundsatz angenommen, dass der Uebergang von niederer zu höherer Temperatur, welcher eine negative Verwandlung repräsentirt, nicht ohne Compensation stattfinden könne. Darauf gestützt wurde der Beweis geführt, dass die Summe aller in einem Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen nicht negativ sein könne, weil jede übrig bleibende negative Verwandlung auf einen Wärmeübergang von niederer zu höherer Temperatur zurückgeführt werden könnte. Endlich wurde hinzugefügt, die Summe der Verwandlungen könne auch nicht positiv sein, weil man sonst den Kreisprocess nur umgekehrt auszuführen brauchte, um sie negativ zu machen.

Der erste Theil des Beweises, aus welchem hervorgeht, dass die Summe aller in einem Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen nicht *negativ* sein kann, bleibt unverändert auch dann gültig, wenn nicht-umkehrbare Veränderungen in dem betrachteten Kreisprocesse vorkommen. Der hinzugefügte Schluss aber, durch welchen die Unmöglichkeit einer *positiven* Summe bewiesen wurde, kann selbstverständlich auf einen solchen Kreisprocess, der sich nicht umgekehrt ausführen lässt, nicht angewandt werden. Vielmehr ergiebt sich aus unmittelbarer Betrachtung der Sache sofort, dass die positiven Verwandlungen sehr wohl im Ueberschusse vorhanden sein können, da bei manchen Vorgängen, wie bei der Wärmeerzeugung durch Reibung und dem durch Leitung stattfindenden Wärmeübergange von einem warmen zu einem kalten Körper nur eine positive Verwandlung ohne sonstige Veränderung vorkommt.

Statt des früher ausgesprochenen Satzes, dass die Summe aller Verwandlungen Null sein müsse, hat man also, wenn nicht-umkehrbare Veränderungen mit einbegriffen werden, folgenden Satz auszusprechen:

> *Die algebraische Summe aller in einem Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen kann nur positiv oder als Grenzfall Null sein.*

Wir wollen eine solche Verwandlung, welche am Schlusse eines Kreisprocesses ohne eine andere entgegengesetzte übrig bleibt, eine *uncompensirte* Verwandlung nennen, und können dann den vorigen Satz noch kürzer so aussprechen:

Uncompensirte Verwandlungen können nur positiv sein.

Um den mathematischen Ausdruck dieses erweiterten Satzes zu erhalten, brauchen wir uns nur zu erinnern, dass die Summe aller in einem Kreisprocesse vorkommenden Verwandlungen durch $-\int \frac{dQ}{T}$ dargestellt wird. Wir haben also, um den allgemeinen Satz auszudrücken, statt der früher unter (V.) gegebenen Gleichung zu setzen:

$$\int \frac{dQ}{T} \leqq 0, \tag{IX.}$$

und die früher unter (VI.) gegebene Gleichung geht dann über in:

$$dQ \leqq T dS. \tag{X.}$$

§. 2. Grösse der uncompensirten Verwandlung.

Die Grösse der uncompensirten Verwandlung ergiebt sich in manchen Fällen unmittelbar aus den im vierten Abschnitte enthaltenen Bestimmungen der Aequivalenzwerthe der Verwandlungen. Wenn z. B. durch einen Process wie die Reibung eine Wärmemenge Q erzeugt ist, und diese sich schliesslich in einem Körper von der Temperatur T befindet, so hat die dabei eingetretene uncompensirte Verwandlung den Werth:

$$\frac{Q}{T}.$$

Wenn ferner eine Wärmemenge Q durch Leitung aus einem Körper von der Temperatur T_1 in einen Körper von der Temperatur T_2 übergegangen ist, so ist die uncompensirte Verwandlung:

$$Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Hat irgend ein Körper einen nicht umkehrbaren Kreisprocess durchgemacht, so haben wir zur Bestimmung der dabei eingetretenen uncompensirten Verwandlung, welche mit N bezeichnet werden möge, nach den Auseinandersetzungen des Abschnittes (IV.) die Gleichung:

$$(1) \qquad N = -\int \frac{dQ}{T}.$$

Da aber ein Kreisprocess aus vielen einzelnen Zustandsänderungen eines gegebenen Körpers gebildet sein kann, von denen einige in umkehrbarer Weise, andere in nicht umkehrbarer Weise geschehen sind, so ist es in manchen Fällen von Interesse, zu wissen, wieviel jede einzelne der letzteren zur Entstehung der ganzen Summe von uncompensirten Verwandlungen beigetragen hat. Dazu denke man sich nach der Zustandsänderung, welche man in dieser Weise untersuchen will, den veränderlichen Körper durch irgend ein umkehrbares Verfahren in den vorigen Zustand zurückgeführt. Dadurch erhält man einen kleineren Kreisprocess, auf welchen sich die Gleichung (1) ebenso gut anwenden lässt, wie auf den ganzen. Kennt man also die Wärmemengen, welche der Körper während desselben aufgenommen hat, und die dazu gehörigen Temperaturen, so giebt das negative Integral $-\int \frac{dQ}{T}$ die in ihm entstandene uncompensirte Verwandlung. Da nun die Zurückführung, welche in umkehrbarer Weise stattgefunden hat, zur Vermehrung derselben nichts beigetragen haben kann, so stellt jener Ausdruck die gesuchte, durch die gegebene Zustandsänderung veranlasste uncompensirte Verwandlung dar.

Hat man auf diese Weise alle die Theile des ganzen Kreisprocesses, welche nicht umkehrbar sind, untersucht, und dabei die Werthe N_1, N_2 etc. gefunden, welche alle einzeln positiv sein müssen, so giebt ihre Summe die auf den ganzen Kreisprocess bezügliche Grösse N, ohne dass man die Theile, von welchen man weiss, dass sie umkehrbar sind, mit in die Untersuchung zu ziehen braucht.

§. 3. Ausdehnung eines Gases ohne äussere Arbeit.

Es wird vielleicht zweckmässig sein, die im vorigen Paragraphen erwähnten Zustandsänderungen der Körper, welche in nicht umkehrbarer Weise vor sich gehen, indem die zu überwindenden Widerstände geringer sind, als die wirkenden Kräfte, nun etwas näher zu betrachten, um die dabei stattfindende Wärmeaufnahme zu bestimmen. Da es aber sehr viele und in sehr mannichfaltiger Weise verschiedene Zustandsänderungen der Art giebt, so

müssen wir uns hier darauf beschränken, einige Fälle, die entweder ihrer Einfachheit wegen besonders anschaulich sind, oder aus anderen Gründen ein specielles Interesse darbieten, als Beispiele zu behandeln.

Die allgemeine Gleichung zur Bestimmung der Wärmemenge, welche ein Körper aufnimmt, während er irgend eine in umkehrbarer oder nicht umkehrbarer Weise vor sich gehende Zustandsänderung erleidet, ist:

$$Q = U_2 - U_1 + W, \tag{2}$$

worin U_1 und U_2 die Energie im Anfangs- und Endzustande und W die während der Veränderung geleistete äussere Arbeit bedeutet.

Zur Bestimmung der Energie gelten die im vorigen Abschnitte aufgestellten Gleichungen. Wirkt als äussere Kraft nur ein gleichmässiger und normaler Oberflächendruck, und ist der Zustand des Körpers durch seine Temperatur und sein Volumen bestimmt, so kann man die dort unter (29) gegebene Gleichung:

$$dU = C_v dT + \left(T\frac{dp}{dT} - p\right)dv \tag{3}$$

anwenden, und hat sie für den auf irgend einem Wege in umkehrbarer Weise stattfindenden Uebergang aus dem Anfangszustande in den Endzustand zu integriren. Ist in diesen beiden Zuständen die Temperatur gleich, wie wir es in den zunächst folgenden Beispielen voraussetzen wollen, so kann die Integration bei constanter Temperatur geschehen, und giebt, wenn das Anfangs- und Endvolumen mit v_1 und v_2 bezeichnet werden:

$$U_2 - U_1 = \int_{v_1}^{v_2}\left(T\frac{dp}{dT} - p\right)dv, \tag{4}$$

wodurch die Gleichung (2) in folgende übergeht:

$$Q = \int_{v_1}^{v_2}\left(T\frac{dp}{dT} - p\right)dv + W. \tag{5}$$

Als erster und einfachster Fall möge nun der behandelt werden, wo ein Gas sich *ohne* äussere Arbeit ausdehnt. Man denke sich dazu eine Quantität des Gases in einem Gefässe befindlich und nehme an, dass dieses Gefäss mit einem leeren Gefässe in Verbindung gesetzt werde, so dass ein Theil des Gases überströmen könne, ohne dabei einen äusseren Widerstand zu überwinden. Die

Wärmemenge, welche das Gas in diesem Falle aufnehmen muss, um seine Temperatur unverändert zu behalten, bestimmt sich durch die vorige Gleichung, wenn darin $W = 0$ gesetzt wird, also durch die Gleichung:

$$(6) \qquad Q = \int_{v_1}^{v_2} \left(T \frac{dp}{dT} - p \right) dv.$$

Macht man die specielle Voraussetzung, dass das Gas ein vollkommenes sei, und daher der Gleichung

$$pv = RT$$

genüge, so erhält man:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{R}{v},$$

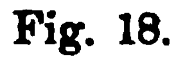
und daher:

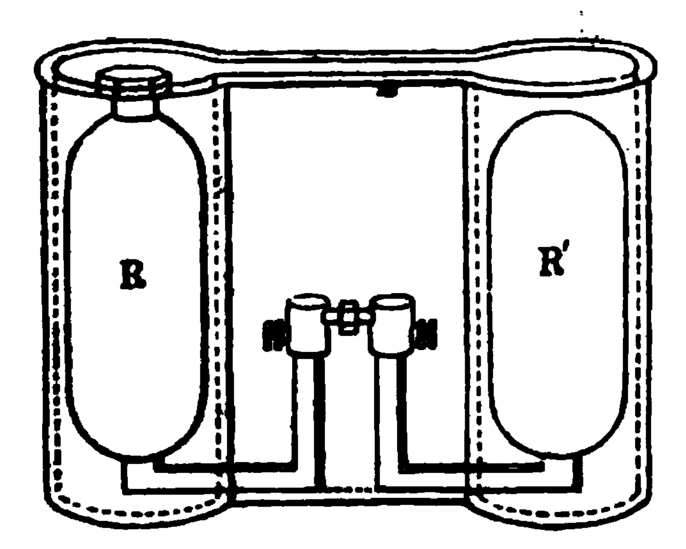
$$T\frac{dp}{dT} = T\frac{R}{v} = \frac{pv}{R} \cdot \frac{R}{v} = p,$$

wodurch (6) übergeht in:

$$(7) \qquad Q = 0.$$

Experimentell ist die Ausdehnung ohne äussere Arbeit, wie schon früher erwähnt, von Gay-Lussac, Joule und Regnault untersucht. Joule hat seine auf die Ausdehnung der Luft bezüglichen Versuche an die schon in Abschnitt II. beschriebenen Versuche, durch welche er die bei der Zusammendrückung der Luft erzeugte Wärme bestimmte, angeschlossen. Der in Fig. 6 (S. 69) abgebildete Recipient R wurde, nachdem er mit verdichteter Luft von 22 Atm. Druck gefüllt war, so wie es in Fig. 18 angedeutet ist, mit einem leeren Recipienten R' in Verbindung gesetzt, so dass nur noch die Hähne die Communication zwischen ihnen abschlossen. Beide Recipienten wurden zusammen in ein Wassercalorimeter gesetzt, und dann die Hähne geöffnet, worauf die Luft durch theilweises Ueberströmen in den Recipienten R' sich bis ungefähr zum doppelten Volumen ausdehnte. Dabei zeigte das Calorimeter keinen Wärmeverlust, und die Ausdehnung der Luft hatte also, so weit es sich in diesem Apparate messen liess, ohne Verbrauch von Wärme stattgefunden.

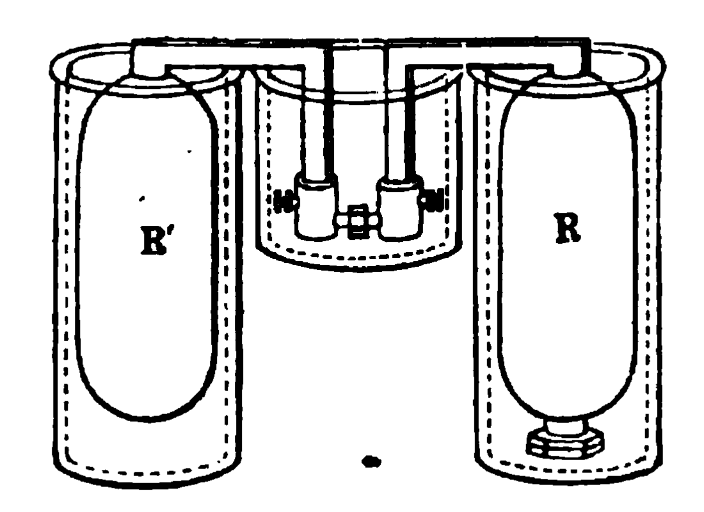

Fig. 18.



Das eben ausgesprochene Resultat, dass bei der Ausdehnung keine Wärme verbraucht sei, gilt jedoch nur für den Process *im Ganzen*, aber nicht für die einzelnen Theile desselben. Im ersten Recipienten, wo die Ausdehnung der Luft stattfindet, und die Strömungsbewegung entsteht, wird Wärme verbraucht, im zweiten Recipienten dagegen, wo die Strömungsbewegung wieder aufhört, und die zuerst eingeströmte Luft von der nachfolgenden zusammengedrückt wird, und ebenso an den Stellen, wo beim Strömen Reibungswiderstände zu überwinden sind, wird Wärme erzeugt. Da aber die Wärmeerzeugung und der Wärmeverbrauch einander gleich sind, so heben sie sich gegenseitig auf, und man kann daher, sofern man nur das Gesammtresultat des ganzen Vorganges im Auge hat, sagen, es habe kein Wärmeverbrauch stattgefunden.

Um die einzelnen Theile des Vorganges besonders beobachten zu können, hat Joule seinen Versuch noch in der Weise abgeändert, dass er die beiden Recipienten und das Hahnstück in drei verschiedene Calorimeter setzte, wie es in Fig. 19 angedeutet ist. Da zeigte das Calorimeter, in welchem der Recipient, aus dem die Luft ausströmte, sich befand, Wärmeverlust, und die beiden anderen Calorimeter zeigten Wärmegewinn. Der ganze Wärmegewinn war dem Wärmeverluste so nahe gleich, dass Joule glaubt, die noch vorhandene Differenz aus den Fehlerquellen des Versuches erklären zu können.

Fig. 19.



§. 4. Ausdehnung eines Gases mit unvollständiger Arbeit.

Wenn bei der Ausdehnung eines Gases zwar ein Gegendruck zu überwinden ist, dieser aber der Expansivkraft des Gases an Grösse nicht gleichkommt, so wird eine Arbeit geleistet, welche kleiner ist als die, welche das Gas bei der Ausdehnung leisten könnte. Dieses ist z. B. der Fall, wenn ein Gas aus einem Gefässe, in welchem es einen höheren, als den atmosphärischen Druck hat, in die Atmosphäre ausströmt.

Auch in diesem Falle ist der Vorgang ein sehr complicirter. Es findet nicht bloss die für die Ausdehnung nöthige Arbeit und der ihr entsprechende Wärmeverbrauch statt, sondern auch zur Hervorbringung der Ausströmungsgeschwindigkeit wird Wärme verbraucht und bei der nachherigen Abnahme dieser Geschwindigkeit wieder Wärme erzeugt. Ebenso wird zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes Wärme verbraucht und durch die Reibung selbst Wärme erzeugt. Wollte man alle diese einzelnen Theile des Vorganges näher bestimmen, so würde das grosse Schwierigkeiten machen. Wenn es sich aber nur darum handelt die Wärmemenge zu bestimmen, welche man im Ganzen von Aussen her zuführen muss, damit die Temperatur des Gases constant bleibe, so ist die Sache einfacher. Dann kann man die Theile des Vorganges, deren Wirkungen sich gegenseitig aufheben, ausser Acht lassen, und braucht nur das Anfangs- und Endvolumen des Gases und diejenige Arbeit, welche nicht wieder in Wärme verwandelt wird, zu berücksichtigen. Dabei ist die innere Arbeit dieselbe, wie bei jeder anderen bei derselben Temperatur zwischen demselben Anfangs- und Endvolumen stattfindenden Ausdehnung des Gases, und die äussere Arbeit wird einfach durch das Product aus der Volumenzunahme und dem atmosphärischen Drucke dargestellt.

Um nun die gesuchte Wärmemenge zu erhalten, gehen wir wieder von der Gleichung (5) aus, und setzen darin für W den Ausdruck der in unserem jetzigen Falle geleisteten äusseren Arbeit, nämlich, wenn p_2 den atmosphärischen Druck bedeutet, das Product $p_2(v_2 - v_1)$, wodurch die Gleichung übergeht in:

$$(8) \qquad Q = \int_{v_1}^{v_2} \left(T\frac{dp}{dT} - p\right) dv + p_2(v_2 - v_1).$$

Wenn das Gas ein vollkommenes wäre, so würde das an der rechten Seite stehende Integral, wie schon im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, gleich Null werden, und die vorstehende Gleichung daher in folgende einfachere übergehen:

$$(9) \qquad Q = p_2(v_2 - v_1),$$

welche ausdrückt, dass in diesem Falle die zugeführte Wärme nur der zur Ueberwindung des äusseren Luftdruckes nöthigen Arbeit entspräche.

Will man die Wärme nicht nach mechanischen Einheiten, sondern nach gewöhnlichen Wärmeeinheiten messen, so hat man die

Ausdrücke an der rechten Seite von (8) und (9) durch das mechanische Aequivalent der Wärme zu dividiren, und erhält dann:

$$Q = \frac{1}{E}\int_{v_1}^{v_2}\left(T\frac{dp}{dT} - p\right)dv + \frac{p_2}{E}(v_2 - v_1), \tag{8a}$$

$$Q = \frac{p_2}{E}(v_2 - v_1). \tag{9a}$$

Joule hat auch diese Art von Ausdehnung experimentell untersucht. Nachdem er, wie in den früher erwähnten Versuchen, Luft in einem Recipienten bis zu hohem Drucke comprimirt hatte, liess er sie unter atmosphärischem Gegendrucke ausströmen. Um dabei die ausströmende Luft wieder auf die ursprüngliche Temperatur zu bringen, liess er sie nach dem Austritte aus dem Recipienten noch durch ein langes Schlangenrohr strömen, welches sich, wie es in Fig. 20 angedeutet ist, mit dem Recipienten zusammen in einem Wassercalorimeter befand. Dann blieb für die Luft nur die kleine Temperaturerniedrigung übrig, welche sie mit der ganzen Wassermasse des Calorimeters gemein hatte. Aus der Abkühlung des Calorimeters ergab sich die an die Luft während ihrer Ausdehnung abgegebene Wärmemenge. Indem Joule auf diese Wärmemenge die Gleichung (9a) anwandte, konnte er auch die Ergebnisse dieser Versuche dazu benutzen, das mechanische Aequivalent der Wärme zu berechnen. Er erhielt dabei aus drei Versuchsreihen Zahlen, deren Mittelwerth 438 (nach englischen Maassen 798) ist, ein Werth, welcher mit dem durch Compression der Luft gefundenen Werthe 444 nahe übereinstimmt, und auch von dem durch Reibung von Wasser gefundenen Werthe 424 nicht weiter abweicht, als aus den bei diesen Versuchen vorkommenden Fehlerquellen erklärlich ist.

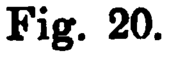
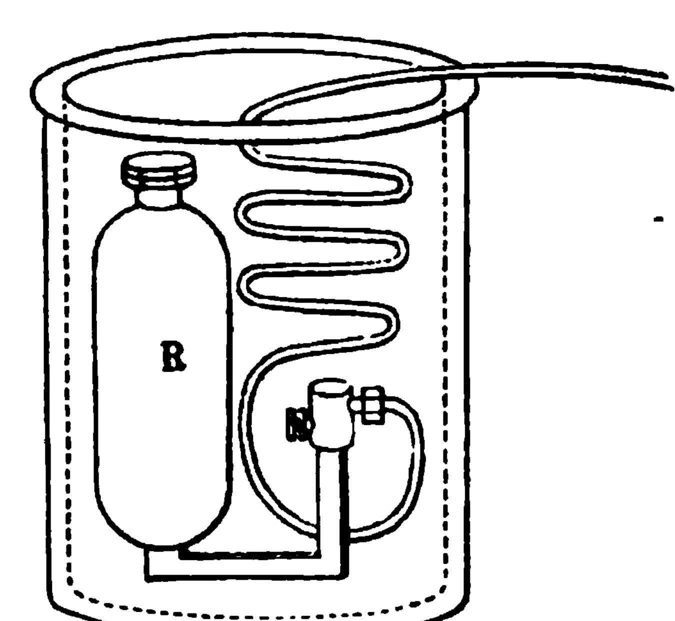


Fig. 20.

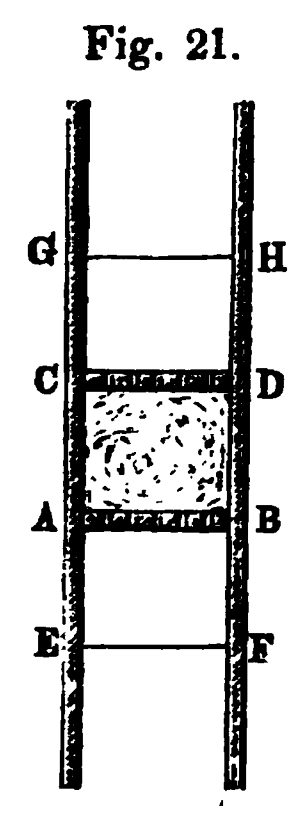


§. 5. Versuchsmethode von Thomson und Joule.

Die vorstehend erwähnten Versuche von Joule, bei denen eine in einem Recipienten enthaltene Luftmenge sich durch theilweises Ueberströmen in einen anderen Recipienten, oder durch Ausströmen in die Atmosphäre ausdehnte, haben gezeigt, dass die Schlüsse, welche man unter der Voraussetzung, dass die Luft ein vollkommenes Gas sei, ziehen kann, angenähert mit der Erfahrung übereinstimmen. Will man aber untersuchen, bis zu welchem Grade der Annäherung das Verhalten der Luft oder eines anderen Gases den Gesetzen der vollkommenen Gase entspricht, und unter welchen Gesetzen die etwa noch vorkommenden Abweichungen stehen, so ist dazu jene Versuchsweise nicht genau genug, indem die Masse des betrachteten Gases im Verhältnisse zur Masse der Gefässe und der anderen Körper, welche an der Wärmeveränderung theilnehmen, zu gering ist, und daher die vorkommenden Fehlerquellen einen zu grossen Einfluss auf das Resultat gewinnen. Zu diesen feineren Versuchen ist von Thomson ein sehr zweckmässiges Verfahren ersonnen, welches dann von ihm und Joule in eben so sorgfältiger als geschickter Weise zur Ausführung gebracht ist.

Man denke sich ein Rohr, durch welches ein continuirlicher Gasstrom getrieben wird, in welchem aber an einer Stelle durch Einfügung eines porösen Pfropfes der Durchgang des Gases so erschwert ist, dass selbst dann, wenn zwischen dem vor und hinter dem Pfropfe herrschenden Drucke ein beträchtlicher Unterschied obwaltet, doch nur eine mässige, für den Versuch geeignete Menge des Gases während der Zeiteinheit hindurchströmen kann. Thomson und Joule wandten als porösen Pfropf eine Quantität Baumwolle oder Seidenabfall an, welche, wie es in Fig. 21 angedeutet ist, zwischen zwei durchlöcherten Platten AB und CD zusammengepresst war. Betrachtet man nun vor und hinter dem Pfropf in solcher Entfernung, wo die Ungleichheiten der Bewegung, welche sich in der Nähe des Pfropfes zeigen können, nicht mehr merkbar sind, sondern nur ein gleichmässiges Strömen des Gases stattfindet, zwei Querschnitte EF und GH, so geht der

Fig. 21.



ganze Ausdehnungsprocess, welcher der Differenz des Druckes vor und hinter dem Pfropfe entspricht, in dem kleinen zwischen den beiden Querschnitten gelegenen Raume vor sich. Es kann daher, wenn der Gasstrom längere Zeit gleichmässig stattfindet, ein stationärer Zustand eintreten, in welchem alle festen Theile des Apparates ihre Temperatur unverändert beibehalten, und somit weder Wärme aufnehmen noch abgeben. Wenn dann noch, wie es in den Versuchen von Thomson und Joule der Fall war, durch Umhüllung des betreffenden Raumes mit schlechten Wärmeleitern dafür gesorgt ist, dass keine Wärme von Aussen her zugeleitet oder nach Aussen hin abgeleitet wird, so muss das Gas allein die bei dem Vorgange etwa verbrauchte oder erzeugte Wärme hergeben oder aufnehmen, und es kann daher, selbst wenn die betreffende Wärmemenge nur klein ist, eine deutlich erkennbare und gut messbare Temperaturdifferenz entstehen.

§. 6. Ableitung der auf den Fall bezüglichen Gleichungen.

Zur theoretischen Bestimmung der Temperaturdifferenz wollen wir zunächst die allgemeinere Gleichung bilden, mittelst deren die Wärmemenge bestimmt wird, welche dem Gase mitgetheilt werden müsste, damit die Temperatur im zweiten Querschnitte irgend einen verlangten Werth annähme. Daraus wird sich dann leicht ergeben, welche Temperatur entsteht, wenn die mitgetheilte Wärme Null ist.

Die einzelnen Theile des in Rede stehenden Vorganges sind wieder theils mit Wärmeverbrauch, theils mit Wärmeerzeugung verbunden. Zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes beim Durchdringen des porösen Pfropfes wird Wärme verbraucht, durch die Reibung selbst aber eben so viel Wärme erzeugt. Zu der an gewissen Stellen eintretenden Vermehrung der Strömungsgeschwindigkeit wird Wärme verbraucht, bei der an anderen Stellen wieder eintretenden Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit dagegen Wärme erzeugt. Bei der Bestimmung der Wärmemenge, welche dem Gase im Ganzen mitgetheilt werden muss, bleiben aber die sich gegenseitig compensirenden Theile des Vorganges ausser Betracht, indem es genügt, diejenige Arbeit, welche als geleistete oder verbrauchte äussere Arbeit übrig bleibt, und ebenso die wirklich bleibende Aenderung der lebendigen Kraft der Strömungsgeschwin-

digkeit zu kennen. Dazu brauchen wir nur die Arbeit, welche beim Eintritt des Gases in unseren Raum, also im Querschnitt EF, und beim Austritt des Gases, also im Querschnitt GH, geleistet wird, und die in diesen Querschnitten stattfindenden Strömungsgeschwindigkeiten zu berücksichtigen.

Was zunächst die Strömungsgeschwindigkeiten anbetrifft, so würde man die Differenz ihrer lebendigen Kräfte leicht in Rechnung bringen können. Wenn aber nur so geringe Strömungsgeschwindigkeiten in jenen Querschnitten vorkommen, wie bei den Versuchen von Thomson und Joule, so kann man ihre lebendigen Kräfte ganz vernachlässigen. Es bleibt dann also nur die in den beiden Querschnitten gethane Arbeit zu bestimmen.

Die absoluten Werthe dieser Arbeitsgrössen erhält man folgendermaassen. Wenn der im Querschnitte EF herrschende Druck mit p_1 bezeichnet wird, und wenn das Gas in diesem Querschnitte eine solche Dichtigkeit hat, dass eine Gewichtseinheit des Gases bei dieser Dichtigkeit das Volumen v_1 einnimmt, so ist die Arbeit, welche geleistet wird, während eine Gewichtseinheit des Gases durch den Querschnitt strömt, gleich dem Producte $p_1 v_1$. Ebenso erhält man für den Querschnitt GH, wenn der hier herrschende Druck mit p_2 und das specifische Volumen des Gases mit v_2 bezeichnet wird, die Arbeit $p_2 v_2$. Diese beiden Arbeitsgrössen sind aber mit verschiedenen Vorzeichen in Rechnung zu bringen. Im Querschnitt GH, wo das Gas aus dem betreffenden Raume ausströmt, wird der äussere Druck überwunden, in welchem Falle wir die geleistete Arbeit als eine positive betrachten; im Querschnitt EF dagegen, wo das Gas einströmt und sich also im Sinne des äusseren Druckes bewegt, haben wir die Arbeit als negativ zu rechnen. Die im Ganzen geleistete äussere Arbeit wird also durch die Differenz

$$p_2 v_2 - p_1 v_1$$

dargestellt.

Um nun weiter die Wärmemenge zu bestimmen, welche eine Gewichtseinheit des Gases aufnehmen muss, während sie den Raum zwischen den beiden Querschnitten durchströmt, wenn das Gas im ersten Querschnitt, wo der Druck p_1 herrscht, die Temperatur T_1 hat, und im zweiten, wo der Druck p_2 herrscht, die Temperatur T_2 haben soll, müssen wir die Gleichung anwenden, welche für den Fall gilt, wo eine Gewichtseinheit des Gases aus dem durch die Grössen p_1 und T_1 bestimmten Zustande in den durch die Grössen

p_2 und T_2 bestimmten Zustand übergeht und dabei die äussere Arbeit $p_2 v_2 - p_1 v_1$ leistet. Wir gehen dazu zu der Gleichung (2) zurück, in welcher wir das die äussere Arbeit darstellende Zeichen W durch die vorstehende Differenz ersetzen, wodurch sie übergeht in:

$$Q = U_2 - U_1 + p_2 v_2 - p_1 v_1. \tag{10}$$

Hierin brauchen wir nur noch die Differenz $U_2 - U_1$ zu bestimmen, wozu wir wieder eine der im vorigen Abschnitte aufgestellten Differentialgleichungen von U anwenden können. Im vorliegenden Falle ist es zweckmässig, diejenige Differentialgleichung auszuwählen, in welcher T und p als unabhängige Veränderliche vorkommen, nämlich die unter (30) gegebene Gleichung:

$$dU = \left(C_p - p\frac{dv}{dT}\right)dT - \left(T\frac{dv}{dT} + p\frac{dv}{dp}\right)dp,$$

welcher wir dadurch, dass wir setzen:

$$\begin{aligned} p\frac{dv}{dT}dT + p\frac{dv}{dp}dp &= pdv \\ &= d(pv) - vdp, \end{aligned}$$

folgende Form geben können:

$$dU = C_p dT - \left(T\frac{dv}{dT} - v\right)dp - d(pv). \tag{11}$$

Diese Gleichung muss von den Anfangswerthen T_1, p_1 bis zu den Endwerthen T_2, p_2 integrirt werden. Die Integration der beiden ersten Glieder an der rechten Seite wollen wir nur andeuten, die Integration des letzten Gliedes aber können wir sofort ausführen, und erhalten dadurch:

$$U_2 - U_1 = \int\left[C_p dT - \left(T\frac{dv}{dT} - v\right)dp\right] - p_2 v_2 + p_1 v_1. \tag{12}$$

Bei der Einsetzung dieses Werthes von $U_2 - U_1$ in die Gleichung (10) heben sich mehrere Glieder auf, und es entsteht folgende Gleichung:

$$Q = \int\left[C_p dT - \left(T\frac{dv}{dT} - v\right)dp\right]. \tag{13}$$

Der hierin unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist das Differential einer Function von T und p, da C_p der in Abschnitt VIII. unter (6) gegebenen Gleichung

$$\frac{dC_p}{dp} = -T\frac{d^2 v}{dT^2}$$

genügt, und somit ist die Wärmemenge Q durch die Anfangs- und Endwerthe von T und p vollständig bestimmt.

Wird nun die den Versuchen von Thomson und Joule entsprechende Bedingung gestellt, dass $Q = 0$ sei, so ist die Differenz zwischen der Anfangs- und Endtemperatur nicht mehr von der Differenz zwischen dem Anfangs- und Enddruck unabhängig, sondern aus der einen lässt sich die andere bestimmen. Denken wir uns diese beiden Differenzen unendlich klein, so können wir statt der Gleichung (13) die Differentialgleichung

$$dQ = C_p dT - \left(T\frac{dv}{dT} - v\right)dp$$

anwenden, und indem wir hierin $dQ = 0$ setzen, erhalten wir die Gleichung, welche die Beziehung zwischen dT und dp ausdrückt, und sich so schreiben lässt:

$$(14) \qquad \frac{dT}{dp} = \frac{1}{C_p}\left(T\frac{dv}{dT} - v\right).$$

Wenn das Gas ein vollkommenes wäre, und somit der Gleichung

$$pv = RT$$

genügte, so würde man haben:

$$\frac{dv}{dT} = \frac{R}{p} = \frac{v}{T},$$

und dadurch würde aus der vorigen Gleichung werden:

$$\frac{dT}{dp} = 0.$$

In diesem Falle würde also eine unendlich kleine Druckdifferenz keine Temperaturdifferenz veranlassen, und dasselbe würde dann auch von einer endlichen Druckdifferenz gelten. Es müsste also vor und hinter dem porösen Pfropfe eine und dieselbe Temperatur stattfinden. Beobachtet man dagegen eine Temperaturdifferenz, so folgt daraus, dass das Gas dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze nicht genügt, und aus den Werthen der unter verschiedenen Umständen eintretenden Temperaturdifferenzen kann man bestimmte Schlüsse über die Art der Abweichung des Gases von jenen Gesetzen ziehen.

§. 7. Ergebnisse der Versuche und daraus abgeleitete Elasticitätsgleichung der Gase.

Bei den von Thomson und Joule im Jahre 1854 ausgeführten Versuchen[1]) stellte sich in der That heraus, dass die Temperaturen vor und hinter dem Pfropfe nicht ganz gleich waren, sondern einen kleinen Unterschied zeigten, welcher dem angewandten Druckunterschiede proportional war. Bei der atmosphärischen Luft fanden sie bei einer anfänglichen Temperatur von etwa 15° Abkühlungen, welche sich, wenn der Druck in Atmosphären gemessen wurde, durch die Gleichung

$$T_1 - T_2 = 0{\cdot}26^0\,(p_1 - p_2)$$

darstellen liess. Bei der Kohlensäure fanden sie etwas grössere Abkühlungen, welche bei einer Anfangstemperatur von etwa 19° der Gleichung

$$T_1 - T_2 = 1{\cdot}15^0\,(p_1 - p_2)$$

genügten. Die diesen beiden Gleichungen entsprechenden Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{dT}{dp} = 0{\cdot}26 \text{ und } \frac{dT}{dp} = 1{\cdot}15. \tag{15}$$

In einer späteren, im Jahre 1862 veröffentlichten Untersuchung[2]) haben Thomson und Joule ihr Augenmerk noch besonders darauf gerichtet, wie die Abkühlung sich ändert, wenn die anfängliche Temperatur anders gewählt wird. Sie liessen daher das Gas, bevor es den porösen Pfropf erreichte, durch eine lange Röhre strömen, welche von Wasser umgeben war, dessen Temperatur beliebig bis zum Siedepunkte gesteigert werden konnte. Dabei ergab sich, dass die Abkühlung bei hohen Temperaturen geringer ist, als bei niederen Temperaturen, und zwar fanden sie dieselbe umgekehrt proportional dem Quadrate der absoluten Temperatur. Sie gelangten für atmosphärische Luft und Kohlensäure zu nachstehenden vervollständigten Formeln, in welchen a die absolute Temperatur des Gefrierpunktes bedeutet, und als Druckeinheit das Gewicht einer Quecksilbersäule von 100 englischen Zoll Höhe gewählt ist:

---

[1]) *Phil. Transact. for 1854, p. 321.*

[2]) *Phil. Transact. for 1862, p. 579.*

$$\frac{dT}{dp} = 0{\cdot}92 \left(\frac{a}{T}\right)^2 \text{ und } \frac{dT}{dp} = 4{\cdot}64 \left(\frac{a}{T}\right)^2$$

Führt man in diese Formeln wieder eine Atmosphäre als Druckeinheit ein, so lauten sie:

$$\frac{dT}{dp} = 0{\cdot}28 \left(\frac{a}{T}\right)^2 \text{ und } \frac{dT}{dp} = 1{\cdot}39 \left(\frac{a}{T}\right)^2 \tag{16}$$

Beim Wasserstoff haben Thomson und Joule in ihrer späteren Untersuchung statt der Abkühlung eine geringe Erwärmung beobachtet, indessen haben sie für dieses Gas keine bestimmte Formel aus den Beobachtungswerthen abgeleitet, weil diese dazu nicht genau genug waren.

Wenn man in den beiden unter (16) gegebenen Formeln von $\frac{dT}{dp}$ für den Zahlenfactor ein allgemeines Zeichen A setzt, so fallen sie in Eine Formel zusammen, nämlich:

$$\frac{dT}{dp} = A \left(\frac{a}{T}\right)^2 \tag{17}$$

und wenn man diese in die Gleichung (14) einsetzt, so erhält man:

$$T\frac{dv}{dT} - v = A\,C_p \left(\frac{a}{T}\right)^2 \tag{18}$$

Diese Gleichung ist nach Thomson und Joule für die wirklich vorhandenen Gase an die Stelle der auf vollkommene Gase bezüglichen Gleichung

$$T\frac{dv}{dT} - v = 0$$

zu setzen, um die bei constantem Drucke stattfindende Beziehung zwischen Volumen- und Temperaturänderung auszudrücken.

Wenn die Grösse C_p als constant angenommen wird, so kann man die Gleichung (18) sofort integriren. Nun ist freilich nur für vollkommene Gase erwiesen, dass die specifische Wärme C_p vom Drucke unabhängig ist, und ebenso können wir die in Folge der Regnault'schen experimentellen Bestimmungen hinzugefügte Annahme, dass C_p auch von der Temperatur unabhängig sei, streng genommen, nur auf vollkommene Gase beziehen. Wenn aber ein Gas nur wenig vom vollkommenen Gaszustande abweicht, so wird auch C_p nur wenig von einem constanten Werthe abweichen, und beide Abweichungen können als Grössen derselben Ordnung angesehen werden. Da ferner in der Gleichung (18) das ganze Glied, welches C_p enthält, nur eine kleine Grösse von eben jener Ordnung

ist, so können durch die Veränderlichkeit von C_p in der Gleichung nur Aenderungen entstehen, welche kleine Grössen von höherer Ordnung sind, und diese mögen im Folgenden vernachlässigt werden, indem C_p als constant gelte. Dann erhalten wir, nachdem wir die Gleichung mit $\frac{dT}{T^2}$ multiplicirt haben, durch Integration:

$$\frac{v}{T} = -\frac{1}{3} A C_p \frac{a^2}{T^3} + P,$$

oder umgeschrieben:

$$v = PT - \frac{1}{3} A C_p \left(\frac{a}{T}\right)^2 \tag{19}$$

worin P die Integrationsconstante bedeutet, welche im vorliegenden Falle als Function des Druckes p anzusehen ist.

Nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze würde sein:

$$v = \frac{R}{p} T, \tag{20}$$

und es ist daher zweckmässig, der Function P die Form

$$P = \frac{R}{p} + \varkappa$$

zu geben, worin $\varkappa$ wiederum eine Function von p bedeutet, welche aber nur sehr klein sein kann. Dadurch geht die Gleichung (19) über in:

$$v = R\frac{T}{p} + \varkappa T - \frac{1}{3} A C_p \left(\frac{a}{T}\right)^2 \tag{21}$$

Diese Gleichung vereinfachen Thomson und Joule noch durch folgende Betrachtung. Die Art, wie der Druck und das Volumen eines Gases von einander abhängen, weicht um so weniger vom Mariotte'schen Gesetze ab, je höher die Temperatur ist. Diejenigen Glieder der vorstehenden Gleichung, welche diese Abweichung ausdrücken, müssen also mit wachsender Temperatur immer kleiner werden. Das letzte Glied erfüllt nun in der That diese Bedingung, das vorletzte Glied $\varkappa T$ erfüllt sie aber nicht. Demnach darf dieses Glied in der Gleichung nicht vorkommen, und man hat daher $\varkappa = 0$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$v = R\frac{T}{p} - \frac{1}{3} A C_p \left(\frac{a}{T}\right)^2 \tag{22}$$

Dieses ist die Gleichung, welche nach Thomson und Joule bei den wirklich vorhandenen Gasen an die Stelle der für vollkommene Gase geltenden Gleichung (20) treten muss.

Eine ganz ähnliche Gleichung hatte schon früher Rankine[1]) aufgestellt, um die von Regnault gefundenen Abweichungen der Kohlensäure vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze darzustellen. Diese Gleichung lässt sich in ihrer einfachsten Form so schreiben:

$$pv = RT - \frac{\alpha}{Tv}, \tag{23}$$

worin α ebenso, wie R, eine Constante ist. Dividirt man diese Gleichung durch p, setzt darauf im letzten Gliede, welches sehr klein ist, für das Product pv das ihm sehr nahe gleiche Product RT, und führt dann endlich für den constanten Bruch $\frac{\alpha}{R}$ den Buchstaben β ein, so erhält man:

$$v = R\frac{T}{p} - \frac{\beta}{T^2},$$

welche Gleichung von derselben Form ist, wie (22).

§. 8. Verhalten des Dampfes bei der Ausdehnung unter verschiedenen Umständen.

Als ein ferneres Beispiel für die Unterschiede, welche bei der Ausdehnung stattfinden können, möge das Verhalten des gesättigten Dampfes betrachtet werden. Wir wollen nämlich die beiden Bedingungen stellen, dass der Dampf entweder bei seiner Ausdehnung einen seiner ganzen Expansivkraft entsprechenden Widerstand zu überwinden hat, oder dass er in die Atmosphäre ausströmt, wobei ihm nur der atmosphärische Druck entgegensteht; und bei der letzten Bedingung machen wir noch den Unterschied, dass entweder der Dampf in dem Gefässe, aus welchem er ausströmt, getrennt von Flüssigkeit, nur sich selbst überlassen ist, oder dass sich in dem Gefässe auch Flüssigkeit befindet, welche den entweichenden Dampf immer wieder durch neuen ersetzt. In allen drei Fällen wollen wir *die Wärmemenge bestimmen, welche dem Dampfe während der Ausdehnung mitgetheilt oder entzogen werden muss, damit er immer gerade Dampf vom Maximum der Dichtigkeit bleibe.*

---

[1]) S. *Phil. Transact. for 1854, p. 336.*

Es sei also *erstens* eine Gewichtseinheit gesättigten Dampfes ohne Flüssigkeit in einem Gefässe gegeben, und dieser Dampf dehne sich nun aus, indem er z. B. einen Stempel zurückschiebe. Er soll dabei gegen den Stempel die *ganze* Expansivkraft, welche er in jedem Stadium seiner Ausdehnung noch besitzt, entwickeln, wozu nur nöthig ist, dass der Stempel so langsam zurückweicht, dass der ihm folgende Dampf seine Expansivkraft stets mit dem im übrigen Gefässe befindlichen vollständig ausgleichen kann. Die Wärmemenge Q, welche diesem Dampfe mitgetheilt werden muss, wenn er sich so weit ausdehnt, dass seine Temperatur dabei von einem gegebenen Anfangswerthe T_1 bis zu einem Werthe T_2 sinkt, wird einfach durch die Gleichung:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} h\,d\,T \tag{24}$$

bestimmt, worin h die in Abschnitt VI. eingeführte Grösse ist, welche wir *die specifische Wärme des gesättigten Dampfes* genannt haben. Wenn, wie es bei den meisten Dämpfen der Fall ist, h einen negativen Werth hat, so stellt das vorige Integral, in welchem die obere Grenze kleiner ist, als die untere, eine positive Grösse dar.

Beim Wasser gilt für h die in jenem Abschnitte unter (31) angeführte Formel:

$$h = 1{\cdot}013 - \frac{800{\cdot}3}{T}.$$

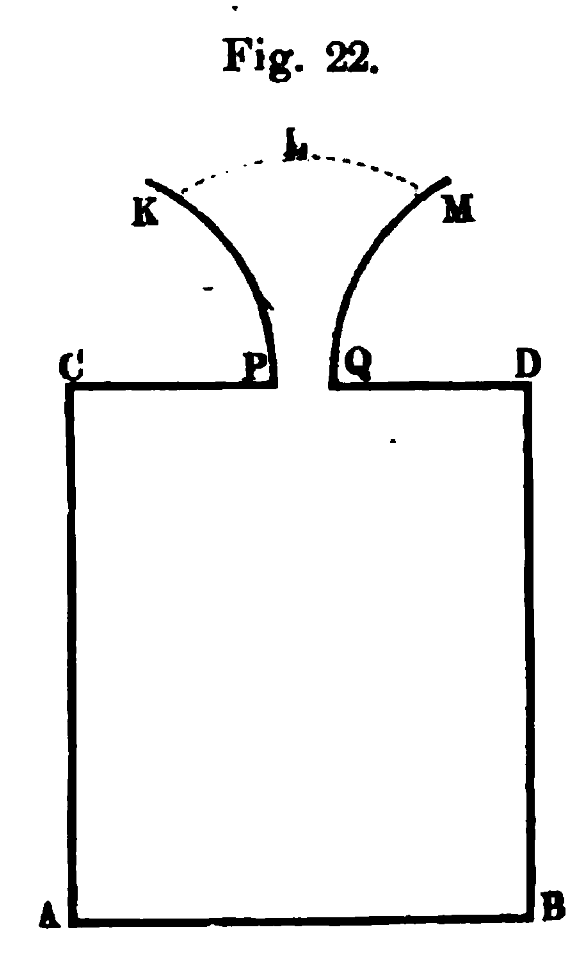
Unter Anwendung dieser Formel kann man für jede zwei Temperaturen T_1 und T_2 den Werth von Q leicht berechnen. Sei z. B. angenommen, der Dampf habe anfangs eine Spannkraft von 5 oder 10 Atmosphären, und dehne sich dann aus, bis seine Spannkraft auf Eine Atmosphäre herabgesunken sei, so muss man nach Regnault's Bestimmungen T_1 resp. $= a + 152{\cdot}2$ oder $= a + 180{\cdot}3$ und $T_2 = a + 100$ setzen, und erhält dadurch die Werthe:

$$Q \text{ resp.} = 52{\cdot}1 \text{ oder } = 74{\cdot}9 \text{ Wärmeeinh.}$$

Als *zweiten* Fall nehmen wir an, es sei wiederum eine Gewichtseinheit gesättigten Dampfes ohne Flüssigkeit bei einer über dem Siedepunkte der betreffenden Flüssigkeit liegenden Temperatur T_1 in einem Gefässe eingeschlossen, und es werde nun in dem Gefässe eine Oeffnung gemacht, so dass er in die Atmosphäre ausströmen könne. Wir verfolgen ihn dabei jenseit der Oeffnung bis zu einer Entfernung, wo seine Spannkraft nur noch gleich dem Drucke der

Atmosphäre ist. Um die Ausbreitung des Dampfstromes regelmässiger zu machen, sei das Gefäss an der Ausströmungsöffnung mit einem allmählich erweiterten Halse $PQKM$, Fig. 22, versehen, was aber kein nothwendiges Erforderniss für die Gültigkeit der nachstehenden Gleichungen ist, sondern nur zur Erleichterung der Anschauung dienen soll. In diesem Halse sei KLM eine Fläche, in welcher der Dampf nur noch eine dem Drucke der Atmosphäre gleiche Spannkraft besitzt, und seine Strömungsgeschwindigkeit schon so gering ist, dass man die lebendige Kraft derselben vernachlässigen kann. Ferner wollen wir noch annehmen, dass die durch die Reibung des Dampfes am Rande der Oeffnung und an der Wand des Halses erzeugte Wärme nicht abgeleitet werde, sondern dem Dampfe wieder zu Gute komme.

Fig. 22.



Um dann die Wärmemenge zu bestimmen, welche dem Dampfe während der Ausdehnung mitgetheilt werden muss, um ihn gerade im gesättigten Zustande zu erhalten, wenden wir wieder die unter (2) angeführte allgemeine Gleichung an, welche, wenn die Wärmemenge in diesem Falle mit Q' bezeichnet wird, lautet:

$$Q' = U_2 - U_1 + W, \tag{25}$$

worin U_1 die Energie im Anfangszustande des Dampfes im Gefässe und U_2 die Energie im Endzustande des Dampfes in der Fläche KLM bedeutet, und W die bei der Ueberwindung des atmosphärischen Druckes geleistete äussere Arbeit darstellt.

Die Energie einer Gewichtseinheit gesättigten Dampfes bei der Temperatur T ergiebt sich aus der im vorigen Abschnitte unter (37) angeführten Gleichung für U, wenn wir darin $m = M = 1$ setzen, nämlich:

$$U = U_0 + \int_{T_0}^{T} \left(C - p\frac{d\sigma}{dT}\right) dT + \varrho \left(1 - \frac{p}{T\frac{dp}{dT}}\right).$$

Wenn wir hierin für T zuerst den Anfangswerth T_1 und zugleich für p, $\frac{dp}{dT}$ und ϱ die zu dieser Temperatur gehörigen Werthe setzen, welche letzteren wir damit bezeichnen wollen, dass wir die allgemeinen Symbole mit dem Index 1 versehen, und wenn wir darauf ebenso mit dem Endwerthe T_2 der Temperatur verfahren, und dann die so gewonnenen beiden Gleichungen von einander abziehen, so erhalten wir:

$$(26)\qquad U_2 - U_1 = \int_{T_1}^{T_2}\left(C - p\frac{d\sigma}{dT}\right)dT + \varrho_2\left[1 - \frac{p_2}{T_2\left(\frac{dp}{dT}\right)_2}\right] - \varrho_1\left[1 - \frac{p_1}{T_1\left(\frac{dp}{dT}\right)_1}\right].$$

Die äussere Arbeit, welche darin besteht, dass bei der Ausdehnung von dem Volumen s_1 bis zum Volumen s_2 der atmosphärische Druck p_2 überwunden wird, bestimmt sich durch die Gleichung:

$$W = p_2(s_2 - s_1).$$

Dem hierin befindlichen Ausdrucke wollen wir noch eine andere Form geben. Wir bezeichnen, wie in Abschnitt VI., die Differenz $s - \sigma$, worin σ das specifische Volumen der Flüssigkeit bedeutet, mit u und setzen daher: $s = u + \sigma$. Dadurch erhalten wir:

$$W = p_2(u_2 - u_1) + p_2(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Hierin führen wir ferner für u den Ausdruck ein, welcher sich aus der Gleichung (13) des Abschnittes VI. ergiebt, wodurch wir erhalten:

$$(27)\qquad W = p_2\left[\frac{\varrho_2}{T_2\left(\frac{dp}{dT}\right)_2} - \frac{\varrho_1}{T_1\left(\frac{dp}{dT}\right)_1}\right] + p_2(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Indem wir die in (26) und (27) gegebenen Werthe von $U_2 - U_1$ und W in (25) einsetzen, gelangen wir zu der Gleichung:

$$(28)\qquad Q' = \int_{T_1}^{T_2}\left(C - p\frac{d\sigma}{dT}\right)dT + \varrho_2 - \varrho_1 + \frac{\varrho_1}{T_1\left(\frac{dp}{dT}\right)_1}(p_1 - p_2) + p_2(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Hierin ist die Wärme in mechanischem Maasse ausgedrückt. Um sie in gewöhnlichem Wärmemaasse auszudrücken, haben wir die

rechte Seite durch E zu dividiren, wobei wir, wie früher, setzen wollen:

$$\frac{C}{E} = c; \quad \frac{\varrho}{E} = r.$$

Zugleich wollen wir, da σ eine kleine Grösse ist und sich sehr wenig ändert, die Grössen $\frac{d\sigma}{dT}$ und $\sigma_2 - \sigma_1$ vernachlässigen. Dann erhalten wir:

$$(29) \qquad Q' = \int_{T_1}^{T_2} c\,dT + r_2 - r_1 + \frac{r_1}{T_1\left(\frac{dp}{dT}\right)_1}(p_1 - p_2),$$

welche Gleichung zur numerischen Berechnung von Q' geeignet ist, da in ihr nur Grössen vorkommen, welche für eine beträchtliche Anzahl von Flüssigkeiten experimentell bestimmt sind.

Für Wasser ist nach Regnault:

$$c + \frac{dr}{dT} = 0{\cdot}305,$$

und somit:

$$\int_{T_1}^{T_2} c\,dT + r_2 - r_1 = -\,0{\cdot}305\,(T_1 - T_2),$$

und auch die im letzten Gliede der Gleichung (29) vorkommenden Grössen sind hinlänglich bekannt, so dass die ganze Rechnung leicht ausgeführt werden kann. Nimmt man z. B. den anfänglichen Druck wieder zu 5 oder 10 Atmosphären an, so kommt:

$$Q' \text{ resp.} = 19{\cdot}5 \text{ oder} = 17{\cdot}0 \text{ Wärmeeinh.}$$

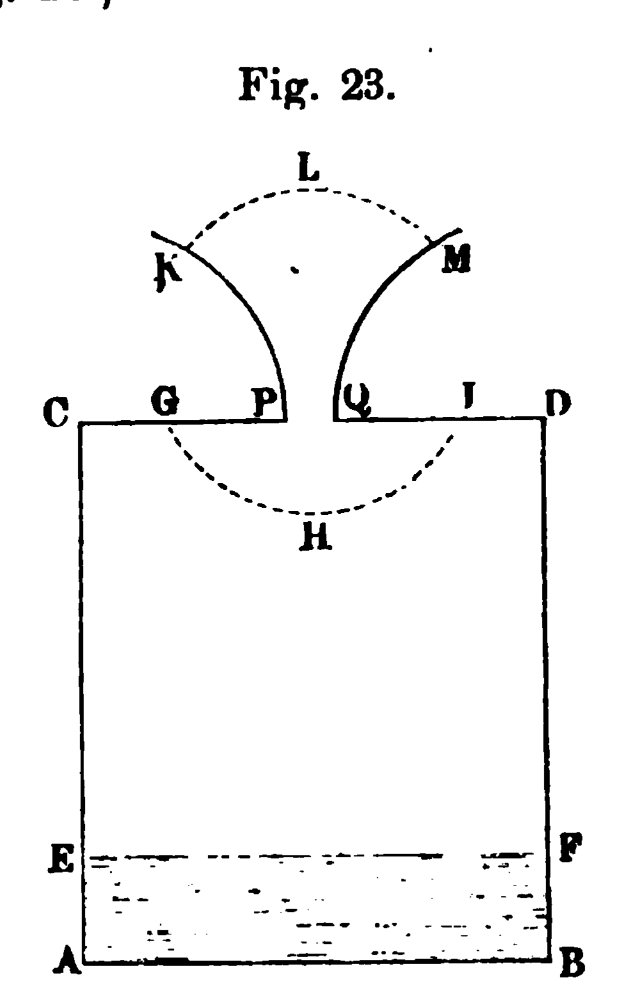
Da Q' eine positive Grösse ist, so folgt, dass auch in diesem Falle dem Dampfe Wärme nicht entzogen, sondern *mitgetheilt* werden muss, wenn sich nicht ein Theil desselben niederschlagen soll, was dann nicht bloss an der Ausströmungsöffnung, sondern eben so gut auch im Innern des Gefässes geschehen würde. Die Quantität dieses niedergeschlagenen Dampfes würde aber geringer sein, als im ersten Falle, weil Q' geringer ist als Q.

Es kann vielleicht auffallen, dass die vorstehenden Gleichungen für den anfänglichen Druck von 5 Atmosphären eine grössere Wärmemenge angeben, als für den von 10 Atmosphären. Das kommt aber daher, dass bei 5 Atmosphären Druck das Volumen des Dampfes schon so gering ist, und bei einer Druckvermehrung bis zu 10 Atmosphären nur noch um einen so kleinen Raum ab-

nimmt, dass die dadurch bedingte Vermehrung der Arbeit beim Ausströmen überwogen wird von dem Ueberschusse der freien Wärme des 180·3° warmen Dampfes über die des 152·2° warmen.

Wir wenden uns nun endlich zu dem *dritten* im Eingange dieses Paragraphen erwähnten Falle, wo ausser dem Dampfe auch Flüssigkeit in dem Gefässe enthalten ist. Das Gefäss $ABCD$, Fig. 23, sei bis EF mit Flüssigkeit und von da ab mit Dampf gefüllt. PQ sei die Ausströmungsöffnung, und diese sei, wie schon im vorigen Falle angenommen wurde, mit einem erweiterten Halse $PQKM$ versehen, um die Ausbreitung des Dampfstromes regelmässiger zu machen. Die Flüssigkeit werde durch irgend eine Wärmequelle constant auf der Temperatur T_1 erhalten, so dass sie fortwährend den ausströmenden Dampf durch neu entwickelten ersetze, und der ganze Ausströmungszustand stationär sei.

Fig. 23.



Der zuletzt erwähnte Umstand bildet einen wesentlichen Unterschied dieses Falles von dem vorigen. Der Druck, welchen der neu entstehende Dampf auf den schon vorhandenen ausübt, thut während des Ausströmens eine Arbeit, welche als negative äussere Arbeit mit in Rechnung gebracht werden muss.

Es stelle GHJ eine Fläche dar, in welcher der hindurchgehende Dampf noch durchweg die Expansivkraft p_1, die Temperatur T_1 und das specifische Volumen s_1 hat, welche im Inneren des Gefässes stattfinden, und mit welchen auch der neue Dampf sich entwickelt. KLM dagegen stelle eine Fläche dar, in welcher der hindurchgehende Dampf schon durchweg die dem atmosphärischen Drucke gleiche Expansivkraft p_2 hat. Die Strömungsgeschwindigkeit nehmen wir in den beiden Flächen als so klein an, dass ihre lebendige Kraft vernachlässigt werden kann. Auf dem Wege von der einen Fläche zur anderen soll dem Dampfe fortwährend so viel Wärme mitgetheilt oder entzogen werden, wie nöthig ist, damit er vollständig dampfförmig und gerade gesättigt bleibe, und

also in der Fläche KLM die dem Drucke p_2 entsprechende Temperatur T_2 (nämlich die Siedetemperatur der Flüssigkeit) und das dazu gehörige specifische Volumen s_2 habe. Es fragt sich nun, wie gross die zu diesem Zwecke erforderliche Wärmemenge Q' für die Gewichtseinheit des ausströmenden Dampfes ist.

Zur Bestimmung derselben können wir so verfahren, wie im vorigen Falle, nur dass wir für die äussere Arbeit einen anderen Werth zu setzen haben. Dieser Werth ist die Differenz zwischen der Arbeit, welche in der Fläche GHJ geschieht, durch welche unter dem Drucke p_1 das Dampfvolumen s_1 strömt, und der, welche in der Fläche KLM geschieht, durch welche unter dem Drucke p_2 das Dampfvolumen s_2 strömt. Er wird also durch die Gleichung

$$W = p_2 s_2 - p_1 s_1$$

bestimmt. Setzen wir hierin wieder:

$$s = u + \sigma = \frac{\varrho}{T\frac{dp}{dT}} + \sigma,$$

so kommt:

$$W = \frac{p_2 \varrho_2}{T_2\left(\frac{dp}{dT}\right)_2} - \frac{p_1 \varrho_1}{T_1\left(\frac{dp}{dT}\right)_1} + p_2\sigma_2 - p_1\sigma_1. \tag{30}$$

Bilden wir nun für Q' wieder eine Gleichung von der Form (25) und setzen darin für $U_2 - U_1$ den unter (26) gegebenen Ausdruck und für W den eben gefundenen Ausdruck, so heben sich die Hauptglieder des letzteren gegen entsprechende im ersteren vorkommende Glieder auf, und es bleibt:

$$Q' = \int_{T_1}^{T_2}\left(C - p\frac{d\sigma}{dT}\right)dT + \varrho_2 - \varrho_1 + p_2\sigma_2 - p_1\sigma_1. \tag{31}$$

Aendern wir diese Gleichung noch in der Weise um, dass sie sich nicht auf mechanisches, sondern auf gewöhnliches Wärmemaass bezieht, und vernachlässigen dabei die Glieder, welche σ enthalten, so gelangen wir zu der einfachen Gleichung:

$$Q' = \int_{T_1}^{T_2} c\,dT + r_2 - r_1. \tag{32}$$

Für Wasser nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$Q' = -0{\cdot}305\,(T_1 - T_2),$$

und wenn man hieraus wieder die Zahlenwerthe von Q'' für einen anfänglichen Druck von 5 oder 10 Atmosphären berechnet, so erhält man:

$$Q'' \text{ resp.} = -15{\cdot}9 \text{ oder } = -24{\cdot}5 \text{ Wärmeeinh.}$$

Aus dem Umstande, dass die Werthe von Q'' negativ sind, folgt, dass in diesem Falle dem Dampfe nicht Wärme mitgetheilt, sondern *entzogen* werden muss. Wenn diese Wärmeentziehung bis zu der betrachteten Stelle nicht hinlänglich stattfindet, so ist der Dampf dort wärmer als 100° und somit überhitzt. Dabei ist aber natürlich vorausgesetzt, dass durch die erste Fläche GHJ nur Dampf geht, dass also nicht, wie es bei starker Dampfentwickelung vorkommen kann, mechanisch mit fortgerissene Flüssigkeitstheilchen den Dampf begleiten.

ABSCHNITT XI.

Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine.

§. 1. Nothwendigkeit einer neuen Behandlung der Dampfmaschine.

Da die veränderten Ansichten über das Wesen und das Verhalten der Wärme, welche unter dem Namen der „mechanischen Wärmetheorie“ zusammengefasst werden, in der bekannten Thatsache, dass sich die Wärme zur Hervorbringung von mechanischer Arbeit anwenden lässt, ihre erste Anregung gefunden haben, so durfte man im Voraus erwarten, dass die so entstandene Theorie auch umgekehrt wieder dazu beitragen müsse, diese Anwendung der Wärme in ein helleres Licht zu stellen. Besonders mussten die durch sie gewonnenen allgemeineren Gesichtspunkte es möglich machen, ein sicheres Urtheil über die einzelnen zu dieser Anwendung dienenden Maschinen zu fällen, ob sie schon vollkommen ihren Zweck erfüllen, oder ob und inwiefern sie noch der Vervollkommnung fähig sind.

Zu diesen für alle thermodynamischen Maschinen geltenden Gründen kommen für die wichtigste unter ihnen, die *Dampfmaschine*, noch einige besondere Gründe hinzu, welche dazu auffor-

dern, sie einer erneuerten, von der mechanischen Wärmetheorie geleiteten Untersuchung zu unterwerfen. Es haben sich nämlich gerade für den Dampf im Maximum der Dichte aus dieser Theorie einige wesentliche Abweichungen von den früher als richtig angenommenen oder wenigstens in den Rechnungen angewandten Gesetzen ergeben.

Ich brauche in dieser Beziehung nur an zwei in Abschnitt VI. abgeleitete Resultate zu erinnern.

Während in den meisten früheren Schriften über die Dampfmaschinentheorie, unter anderen in dem vortrefflichen Werke von de Pambour, der Watt'sche Satz zu Grunde gelegt ist, dass gesättigter Dampf, welcher sich in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle befindet, bei Volumenänderungen immer gerade Dampf vom Maximum der Dichte bleibe, und in einigen späteren, (nach Veröffentlichung der Regnault'schen Versuche über die Verdampfungswärme des Wassers bei verschiedenen Temperaturen erschienenen) Schriften sogar die Annahme gemacht ist, dass der Dampf bei der Zusammendrückung sich theilweise niederschlage und bei der Ausdehnung sich weniger abkühle, als der Dichtigkeitsabnahme entspreche, und daher in den überhitzten Zustand übergehe, ist in Abschnitt VI. nachgewiesen, dass der Dampf ein von der ersten Annahme abweichendes und der zweiten Annahme sogar gerade entgegengesetztes Verhalten zeigen muss, dass er nämlich bei der Zusammendrückung überhitzt werden und bei der Ausdehnung sich theilweise niederschlagen muss.

Während ferner in jenen Schriften zur Bestimmung des Volumens einer Gewichtseinheit gesättigten Dampfes bei verschiedenen Temperaturen in Ermangelung genauerer Kenntnisse die Annahme gemacht wurde, dass der Dampf selbst im Maximum der Dichte noch dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folge, ist in Abschnitt VI. gezeigt, dass er von diesen Gesetzen beträchtlich abweicht.

Diese beiden Umstände sind natürlich von wesentlichem Einflusse auf die Dampfmenge, welche während jedes Hubes aus dem Kessel in den Cylinder strömt, und auf das Verhalten dieses Dampfes während der Expansion, und man sieht leicht, dass schon sie allein es nöthig machen, die Arbeit, welche eine gegebene Dampfmenge in der Maschine leistet, in anderer Weise, als bisher, zu berechnen.

§. 2. Gang der Dampfmaschine.

Um die Reihe von Vorgängen, welche zum Gange einer Dampfmaschine mit Condensator gehören, in übersichtlicher Weise darzustellen, und recht augenfällig zu zeigen, dass sie einen Kreisprocess bilden, welcher sich in gleicher Weise fortwährend wiederholt, habe ich die nebenstehende schematische Fig. 24. entworfen. *A* stellt den Dampfkessel vor, dessen Inhalt durch die Wärmequelle auf der constanten Temperatur T_1 erhalten wird. Aus diesem tritt ein Theil des Dampfes in den Cylinder *B*, und treibt den Stempel ein gewisses Stück in die Höhe. Dann wird der Cylinder vom Dampfkessel abgeschlossen, und der in ihm enthaltene Dampf treibt den Stempel durch Expansion noch höher. Darauf wird der Cylinder mit dem Raume *C* in Verbindung gesetzt, welcher den Condensator vorstellen soll. Von diesem soll angenommen werden, dass er nicht durch eingespritztes Wasser, sondern durch Abkühlung von aussen kalt erhalten werde, was keinen wesentlichen Unterschied in den Resultaten hervorbringt, aber die Betrachtung vereinfacht. Die constante Temperatur des Condensators möge T_0 heissen. Während der Verbindung des Cylinders mit dem Condensator geht der Stempel den ganzen vorher durchlaufenen Weg wieder zurück, und dadurch wird aller Dampf, welcher nicht gleich von selbst in den Condensator strömte, in diesen hineingetrieben, und schlägt sich hier nieder. Es kommt nun noch, um den Cyclus von Operationen zu vollenden, darauf an, die durch den Dampfniederschlag entstandene Flüssigkeit in den Kessel zurückzuschaffen. Dazu dient die kleine Pumpe *D*, deren Gang so regulirt wird, dass sie

Fig. 24.

beim Aufgange des Stempels gerade so viel Flüssigkeit aus dem Condensator aufsaugt, wie durch den oben erwähnten Dampfniederschlag in ihn hineingekommen ist, und diese Flüssigkeitsmenge wird dann beim Niedergange des Stempels in den Kessel zurückgepresst. Wenn sie sich hier wieder bis zur Temperatur T_1 erwärmt hat, so befindet sich Alles wieder im Anfangszustande, und dieselbe Reihe von Vorgängen kann von Neuem beginnen. Wir haben es also hier mit einem vollständigen Kreisprocesse zu thun.

Bei den gewöhnlichen Dampfmaschinen tritt der Dampf nicht bloss von Einer, sondern abwechselnd von beiden Seiten in den Cylinder. Dadurch entsteht aber nur der Unterschied, dass während eines Auf- und Niederganges des Stempels statt Eines Kreisprocesses deren zwei stattfinden, und es genügt auch in diesem Falle, für Einen derselben die Arbeit zu bestimmen, um daraus die während irgend einer Zeit im Ganzen gethane Arbeit ableiten zu können.

Eine Dampfmaschine ohne Condensator kann man sich, wenn man nur annimmt, dass sie mit Wasser von 100° gespeist werde, durch eine Maschine mit einem Condensator, dessen Temperatur 100° ist, ersetzt denken.

§. 3. Vereinfachende Bedingungen.

Zur Ausführung der beabsichtigten Bestimmung wollen wir, wie es auch sonst zu geschehen pflegt, den Cylinder als eine für Wärme undurchdringliche Hülle betrachten, indem wir den während eines Hubes stattfindenden Wärmeaustausch zwischen den Cylinderwänden und dem Dampfe vernachlässigen.

Die im Cylinder befindliche Masse kann immer nur aus Dampf *im Maximum der Dichte* mit etwas beigemischter Flüssigkeit bestehen. Es ist nämlich aus den Entwickelungen des Abschnittes VI. ersichtlich, dass der Dampf bei der nach dem Abschlusse vom Kessel im Cylinder stattfindenden Ausdehnung, wenn ihm dabei von aussen keine Wärme zugeführt wird, nicht in den überhitzten Zustand übergehen kann, sondern sich vielmehr zum Theil niederschlagen muss, und bei anderen weiter unten zu erwähnenden Vorgängen, welche allerdings eine geringe Ueberhitzung zur Folge haben könnten, wird sie dadurch verhindert, dass der Dampf beim

Einströmen immer etwas tropfbare Flüssigkeit mit in den Cylinder reisst, und mit dieser in Berührung bleibt.

Die Menge dieser dem Dampfe beigemischten Flüssigkeit ist nicht bedeutend, und da sie grösstentheils in feinen Tröpfchen durch den Dampf verbreitet ist, und daher schnell an den Temperaturänderungen, welche der Dampf während der Ausdehnung erleidet, theilnehmen kann, so wird man keine erhebliche Ungenauigkeit begehen, wenn man in der Rechnung für jeden bestimmten Zeitpunkt die Temperatur der ganzen im Cylinder befindlichen Masse als gleich betrachtet.

Ferner wollen wir, um die Formeln nicht von vorn herein zu complicirt zu machen, zunächst die ganze Arbeit bestimmen, welche von dem Dampfdrucke gethan wird, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, wieviel von dieser Arbeit wirklich nutzbar wird, und wieviel dagegen in der Maschine selbst zur Ueberwindung der Reibungen, und zur Bewegung der Pumpen, welche ausser der in der Figur angedeuteten zum Betriebe der Maschine noch nöthig sind, wieder verbraucht wird. Dieser Theil der Arbeit lässt sich auch nachträglich noch bestimmen und in Abzug bringen, wie weiter unten gezeigt werden soll.

In Bezug auf die Reibung des Stempels im Cylinder ist übrigens zu bemerken, dass die zu ihrer Ueberwindung verbrauchte Arbeit nicht ganz als verloren zu betrachten ist. Durch diese Reibung wird nämlich Wärme erzeugt, und dadurch wird das Innere des Cylinders wärmer erhalten, als es sonst sein würde, und somit die Kraft des Dampfes vermehrt.

Endlich wollen wir, da es zweckmässig ist, zunächst die Wirkungen einer möglichst vollkommenen Maschine kennen zu lernen, bevor der Einfluss der einzelnen in der Wirklichkeit vorkommenden Unvollkommenheiten untersucht wird, bei dieser vorläufigen Betrachtung noch zwei Voraussetzungen hinzufügen, welche weiterhin wieder aufgegeben werden sollen. Nämlich *erstens*, dass der Zuleitungscanal vom Dampfkessel zum Cylinder und der Ableitungscanal vom Cylinder zum Condensator oder zur Atmosphäre so weit seien, oder der Gang der Dampfmaschine so langsam sei, dass der Druck in dem mit dem Kessel in Verbindung stehenden Theile des Cylinders gleich dem im Kessel selbst stattfindenden, und ebenso der Druck auf der anderen Seite des Stempels gleich dem Drucke im Condensator oder dem atmosphärischen Drucke zu setzen sei, und *zweitens*, dass kein schädlicher Raum vorhanden sei.

§. 4. Bestimmung der während eines Hubes gethanen Arbeit.

Unter den vorher genannten Umständen lassen sich die während eines einem Hube entsprechenden Kreisprocesses gethanen Arbeitsgrössen mit Hülfe der in Abschnitt VI. gewonnenen Resultate ohne weitere Rechnung hinschreiben, und geben als Summe einen einfachen Ausdruck.

Die ganze bei einem Aufgange des Stempels aus dem Kessel in den Cylinder tretende Masse heisse M, und davon sei der Theil m_1 dampfförmig und der Theil $M - m_1$ tropfbar flüssig. Der Raum, welchen diese Masse einnimmt, ist, wenn u_1 den zu T_1 gehörigen Werth von u bedeutet, σ dagegen als constant behandelt und daher ohne Index gelassen wird, gleich der Summe:

$$m_1 u_1 + M\sigma.$$

Der Stempel wird also so weit gehoben, dass dieser Raum unter ihm frei wird, und da dieses unter der Wirkung des zu T_1 gehörigen Druckes p_1 geschieht, so ist die während dieses ersten Vorganges gethane Arbeit, welche W_1 heisse:

$$W_1 = m_1 u_1 p_1 + M\sigma p_1. \tag{1}$$

Die nun folgende Expansion werde so weit fortgesetzt, bis die Temperatur der im Cylinder eingeschlossenen Masse von dem Werthe T_1 bis zu einem zweiten gegebenen Werthe T_2 herabgesunken ist. Die hierbei gethane Arbeit, welche W_2 heisse, ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung (62) des Abschnittes VI., wenn darin als Endtemperatur T_2 genommen, und auch für die anderen in der Gleichung vorkommenden Grössen die entsprechenden Werthe gesetzt werden, nämlich:

$$W_2 = m_1(\varrho_1 - u_1 p_1) - m_2(\varrho_2 - u_2 p_2) + MC(T_1 - T_2). \tag{2}$$

Bei der hierauf beginnenden Herabdrückung des Stempels wird die Masse, welche zu Ende der Ausdehnung den Raum

$$m_2 u_2 + M\sigma$$

einnahm, aus dem Cylinder in den Condensator getrieben, wobei der constante Gegendruck p_0 zu überwinden ist. Die dabei von diesem Drucke gethane negative Arbeit ist:

$$W_3 = - m_2 u_2 p_0 - M\sigma p_0. \tag{3}$$

Während nun der Stempel der kleinen Pumpe so weit in die Höhe geht, dass unter ihm der Raum $M\sigma$ frei wird, wirkt der im

Condensator stattfindende Druck p_0 fördernd, und thut die Arbeit:

$$(4) \qquad W_4 = M\sigma p_0.$$

Beim Heruntergange dieses Stempels endlich muss der im Kessel stattfindende Druck p_1 überwunden werden, und thut daher die negative Arbeit:

$$(5) \qquad W_5 = - M\sigma p_1.$$

Durch Addition dieser fünf Grössen erhält man für die ganze während des Kreisprocesses von dem Dampfdrucke, oder, wie man auch sagen kann, von der Wärme gethane Arbeit, welche W' heisse, den Ausdruck:

$$(6) \qquad W' = m_1 \varrho_1 - m_2 \varrho_2 + MC(T_1 - T_2) + m_2 u_2 (p_2 - p_0).$$

Aus dieser Gleichung muss noch die Grösse m_2 eliminirt werden. Diese Grösse kommt, wenn man für u_2 den aus Gleichung (13) Abschnitt VI. hervorgehenden Werth

$$\frac{\varrho_2}{T_2 \left(\frac{dp}{dT}\right)_2}$$

setzt, nur in der Verbindung $m_2 \varrho_2$ vor, und für dieses Product giebt die Gleichung (55) jenes Abschnittes, wenn man darin ϱ und C statt r und c einführt, den Ausdruck:

$$m_2 \varrho_2 = m_1 \varrho_1 \frac{T_2}{T_1} - MCT_2 \log \frac{T_2}{T_1}.$$

Durch Einsetzung dieses Ausdruckes erhält man eine Gleichung, in welcher auf der rechten Seite nur noch bekannte Grössen vorkommen, denn die Massen M und m_1 und die Temperaturen T_1, T_2 und T_0 werden als unmittelbar gegeben angenommen, und die Grössen ϱ, p und $\frac{dp}{dT}$ werden als Functionen der Temperatur als bekannt vorausgesetzt.

§. 5. Specielle Formen des vorigen Ausdruckes.

Wenn man in der Gleichung (6) $T_2 = T_1$ setzt, so erhält man die Arbeit für den Fall, dass die Maschine ohne Expansion arbeitet, nämlich:

$$(7) \qquad W' = m_1 u_1 (p_1 - p_0).$$

Will man dagegen die Annahme machen, dass die Expansion so weit getrieben werde, bis der Dampf sich durch die Ausdehnung von der Temperatur des Kessels bis zu der des Condensators abgekühlt habe, was freilich vollständig nicht ausführbar ist, aber doch den Grenzfall bildet, dem man sich so weit wie möglich nähern muss, so braucht man nur $T_2 = T_0$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$W' = m_1 \varrho_1 - m_0 \varrho_0 + MC(T_1 - T_0). \tag{8}$$

Wenn man hieraus noch $m_0 \varrho_0$ mittelst der vorher angeführten Gleichung, in welcher auch $T_2 = T_0$ zu setzen ist, eliminirt, so kommt:

$$W' = m_1 \varrho_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1} + MC\left(T_1 - T_0 + T_0 \log \frac{T_0}{T_1}\right). \tag{9}$$

§. 6. Unvollkommenheiten in der Ausführung der Dampfmaschinen.

Bei allen wirklich ausgeführten Dampfmaschinen bleibt die Expansion weit hinter dem im vorigen Paragraphen zuletzt besprochenen Maximum zurück. Nimmt man z. B. die Temperatur des Kessels zu 150° und die des Condensators zu 50° an, so müsste die Expansion, um die Temperatur des Dampfes im Cylinder bis zur Condensatortemperatur zu erniedrigen, gemäss der in Abschnitt VI. §. 13 gegebenen Tabelle bis zum 26-fachen des ursprünglichen Volumens fortschreiten. In der Wirklichkeit lässt man sie aber, wegen mancher bei grosser Expansion eintretender Uebelstände, gewöhnlich nur bis zum 3- oder 4-fachen und höchstens bis zum 10-fachen Volumen gehen, was bei einer Anfangstemperatur von 150°, nach der erwähnten Tabelle, einer Temperaturerniedrigung bis etwa 100° und höchstens bis 75°, statt bis 50°, entspricht.

Ausser dieser Unvollkommenheit, welche in den obigen Rechnungen schon mit berücksichtigt und in der Gleichung (6) mit einbegriffen ist, leidet die Dampfmaschine noch an anderen Unvollkommenheiten, von denen zwei oben ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossen wurden, nämlich erstens die, *dass der Druck des Dampfes im einen Theile des Cylinders geringer als im Kessel, und im anderen Theile grösser als im Condensator ist*, und zweitens *das Vorhandensein des schädlichen Raumes.*

Wir müssen daher die früheren Betrachtungen jetzt in der Weise erweitern, dass auch diese Unvollkommenheiten mit berücksichtigt werden.

Der Einfluss, welchen die Verschiedenheiten des Druckes im Kessel und im Cylinder auf die Arbeit ausübt, ist bisher wohl am vollständigsten in dem Werke von de Pambour *„Théorie des Machines à Vapeur“* behandelt, und es sei mir gestattet, bevor ich selbst auf diesen Gegenstand eingehe, das Wesentlichste jener Behandlungsweise, nur mit etwas anderer Bezeichnung und unter Fortlassung der Grössen, welche sich auf die Reibung beziehen, hier voraufzuschicken, um leichter nachweisen zu können, inwiefern sie den neueren Kenntnissen über die Wärme nicht mehr entspricht, und zugleich die neue Behandlungsweise, welche meiner Meinung nach an ihre Stelle treten muss, daran anzuknüpfen.

§. 7. Pambour's Formeln für die Beziehung zwischen Volumen und Druck.

Die Grundlage der Pambour'schen Theorie bilden die beiden schon eingangs erwähnten Gesetze, welche damals ziemlich allgemein auf den Wasserdampf angewandt wurden. Erstens das Watt'sche Gesetz, dass die Summe der latenten und freien Wärme constant sei. Aus diesem Gesetze zog man, wie schon gesagt, den Schluss, dass, wenn ein Quantum Wasserdampf im Maximum der Dichte in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle eingeschlossen sei, und der Rauminhalt dieser Hülle vergrössert oder verkleinert werde, dabei der Dampf weder überhitzt werde, noch sich theilweise niederschlage, sondern gerade im Maximum der Dichte bleibe; und dieses sollte stattfinden, ganz unabhängig davon, in welcher Weise die Volumenänderung geschehe, ob der Dampf dabei einen seiner Expansivkraft entsprechenden Druck zu überwinden habe, oder nicht. Dasselbe Verhalten des Dampfes setzte Pambour im Cylinder der Dampfmaschine voraus, indem er auch von den Wassertheilchen, welche in diesem Falle dem Dampfe beigemengt sind, nicht annahm, dass sie einen merklichen ändernden Einfluss ausüben könnten.

Um nun den Zusammenhang, welcher für Dampf im Maximum der Dichte zwischen Volumen und Temperatur oder Volumen und Druck besteht, näher angeben zu können, wandte Pambour zwei-

tens das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz auf den Dampf an.. Daraus erhält man, wenn man das Volumen eines Kilogramm Dampf bei 100° im Maximum der Dichte nach Gay-Lussac zu 1·696 Cubikmeter annimmt, und bedenkt, dass der dabei stattfindende Druck von einer Atmosphäre 10 333 Kilogramm auf ein Quadratmeter beträgt, und man für irgend eine andere Temperatur t das Volumen und den Druck unter Zugrundelegung derselben Einheiten mit v und p bezeichnet, die Gleichung:

$$v = 1{\cdot}696 \cdot \frac{10333}{p} \cdot \frac{273 + t}{273 + 100}. \tag{10}$$

Hierin braucht man nur noch für p die aus der Spannungsreihe bekannten Werthe zu setzen, um für jede Temperatur das unter jenen Voraussetzungen richtige Volumen berechnen zu können.

Da nun aber in den Formeln für die Arbeit der Dampfmaschine das Integral $\int p dv$ eine Hauptrolle spielt, so war es, um dieses auf bequeme Weise berechnen zu können, nothwendig, eine möglichst einfache Formel zwischen v und p allein zu haben.

Die Gleichungen, welche man erhalten würde, wenn man mittelst einer der gebräuchlichen empirischen Formeln von p die Temperatur t aus der vorigen Gleichung eliminiren wollte, würden zu complicirt ausfallen, und Pambour zog es daher vor, eine besondere empirische Formel für diesen Zweck zu bilden, welcher er nach dem Vorgange von Navier folgende allgemeine Gestalt gab:

$$v = \frac{B}{b + p}, \tag{11}$$

worin B und b Constante sind. Diese Constanten suchte er nun so zu bestimmen, dass die aus dieser Formel berechneten Volumina möglichst genau mit den aus der vorigen Formel berechneten übereinstimmten. Da dieses aber für alle bei den Dampfmaschinen vorkommenden Druckgrössen nicht mit hinlänglicher Genauigkeit möglich ist, so berechnete er zwei verschiedene Formeln, für Maschinen *mit* und *ohne* Condensator.

Die erstere lautet:

$$v = \frac{20\,000}{1200 + p}, \tag{11a}$$

und schliesst sich der obigen Formel (10) am besten zwischen $^2/_3$ und $3^1/_2$ Atmosphären an, ist aber auch noch in einem etwas weiteren Intervall, etwa zwischen $^1/_2$ und 5 Atmosphären anwendbar.

Die zweite, für Maschinen ohne Condensator bestimmte, dagegen lautet:

$$v = \frac{21232}{3020 + p}. \tag{11b}$$

Sie ist zwischen 2 und 5 Atmosphären am genauesten, und das ganze Intervall ihrer Anwendbarkeit reicht etwa von $1^1/_3$ bis 10 Atmosphären.

§. 8. Bestimmung der Arbeit während eines Hubes nach Pambour.

Die von den Dimensionen der Dampfmaschine abhängigen Grössen, welche bei der Bestimmung der Arbeit in Betracht kommen, sollen hier, etwas abweichend von Pambour, folgendermaassen bezeichnet werden. Der ganze Raum, welcher während eines Hubes im Cylinder für den Dampf frei wird, mit Einschluss des schädlichen Raumes, heisse v'. Der schädliche Raum soll von dem ganzen Raume den Bruchtheil ε bilden, so dass also der schädliche Raum durch $\varepsilon v'$ und der von der Stempelfläche beschriebene Raum durch $(1 - \varepsilon) v'$ dargestellt wird. Ferner sei der Theil des ganzen Raumes, welcher bis zum Momente des Abschlusses des Cylinders vom Dampfkessel für den Dampf frei geworden ist, ebenfalls mit Einschluss des schädlichen Raumes, mit ev' bezeichnet. Demnach wird der von der Stempelfläche während des Dampfzutrittes beschriebene Raum durch $(e - \varepsilon) v'$ und der während der Expansion beschriebene Raum durch $(1 - e) v'$ ausgedrückt.

Um nun zunächst die während des Dampfzutrittes gethane Arbeit zu bestimmen, muss der während dieser Zeit im Cylinder wirksame Druck bekannt sein. Dieser ist jedenfalls kleiner, als der Druck im Kessel, weil sonst kein Strömen des Dampfes stattfinden würde; wie gross aber diese Differenz ist, lässt sich nicht allgemein angeben, da sie nicht nur von der Einrichtung der Maschine abhängt, sondern auch davon, wie weit der Maschinist die im Dampfzuleitungsrohre befindliche Klappe geöffnet hat, und mit welcher Geschwindigkeit sich die Maschine bewegt. Durch Aenderung dieser Umstände kann jene Differenz innerhalb weiter Grenzen variiren. Auch braucht der Druck im Cylinder nicht während der ganzen Zeit des Zuströmens constant zu sein, weil

sowohl die Stempelgeschwindigkeit, als auch die von dem Ventil oder dem Schieber frei gelassene Zuströmungsöffnung veränderlich ist.

In Bezug auf den letzteren Umstand nimmt Pambour an, dass der mittlere Druck, welcher bei der Bestimmung der Arbeit in Rechnung zu bringen ist, mit hinlänglicher Genauigkeit gleich demjenigen Drucke gesetzt werden könne, welcher zu Ende des Einströmens im Momente des Abschlusses vom Kessel im Cylinder stattfindet. Obwohl ich es nicht für zweckmässig halte, eine solche Annahme, welche nur für die numerische Berechnung in Ermangelung sichrerer Data zu Hülfe genommen ist, gleich in die allgemeinen Formeln mit einzuführen, so muss ich doch hier bei der Auseinandersetzung seiner Theorie seinem Verfahren folgen.

Den im Momente des Abschlusses im Cylinder stattfindenden Druck bestimmt Pambour mittelst der von ihm festgestellten Beziehung zwischen Volumen und Druck, indem er dabei voraussetzt, dass die während der Zeiteinheit und somit auch die während eines Hubes aus dem Kessel in den Cylinder tretende Dampfmenge durch besondere Beobachtungen bekannt ist. Wir wollen dem Früheren entsprechend die ganze während eines Hubes in den Cylinder tretende Masse mit M, und den dampfförmigen Theil derselben mit m bezeichnen. Da diese Masse, von welcher Pambour nur den dampfförmigen Theil berücksichtigt, im Momente des Abschlusses den Raum ev' ausfüllt, so hat man, wenn man den in diesem Momente stattfindenden Druck mit p_2 bezeichnet, nach Gleichung (11):

$$ev' = \frac{m \cdot B}{b + p_2}, \tag{12}$$

woraus folgt:

$$p_2 = \frac{m \cdot B}{ev'} - b. \tag{12a}$$

Multiplicirt man diese Grösse mit dem bis zu demselben Momente von der Stempelfläche beschriebenen Raume $(e - \varepsilon)\, v'$, so erhält man für den ersten Theil der Arbeit den Ausdruck:

$$W_1 = mB \cdot \frac{e - \varepsilon}{e} - v'(e - \varepsilon)\, b. \tag{13}$$

Das Gesetz, nach welchem sich der Druck während der nun folgenden Expansion ändert, ergiebt sich ebenfalls aus der Gleichung (11). Sei das veränderliche Volumen in irgend einem

Momente mit v und der dazugehörige Druck mit p bezeichnet, so hat man:

$$p = \frac{m \,.\, B}{v} - b.$$

Diesen Ausdruck muss man in das Integral $\int p dv$ einsetzen, und dann die Integration von $v = ev'$ bis $v = v'$ ausführen, wodurch man als zweiten Theil der Arbeit erhält:

(14) $$W_2 = mB \,.\, log \frac{1}{e} - v' (1 - e) b.$$

Um die bei dem Rückgange des Stempels von dem Gegendrucke gethane negative Arbeit zu bestimmen, muss der Gegendruck selbst bekannt sein. Wir wollen, ohne für jetzt darauf einzugehen, wie sich dieser Gegendruck zu dem im Condensator stattfindenden Drucke verhält, den mittleren Gegendruck mit p_0 bezeichnen, so dass die von ihm gethane Arbeit durch

(15) $$W_3 = - v' (1 - \varepsilon) p_0$$

dargestellt wird.

Endlich bleibt noch die Arbeit übrig, welche dazu verwandt werden muss, um die Flüssigkeitsmenge M wieder in den Kessel zurückzupressen. Pambour hat diese Arbeit nicht besonders berücksichtigt, sondern hat sie in die Reibung der Maschine mit eingeschlossen. Da ich sie indessen in meine Formeln, um den Cyclus der Operationen vollständig zu haben, mit aufgenommen habe, so will ich sie zur leichteren Vergleichung auch hier hinzufügen. Wie sich aus den bei dem früher betrachteten Beispiele aufgestellten Gleichungen (4) und (5) ergiebt, wird diese Arbeit, wenn p_1 den Druck im Kessel und p_0 den im Condensator bedeutet, im Ganzen durch

(16) $$W_4 = - M\sigma (p_1 - p_0)$$

dargestellt. Für unseren jetzigen Fall, wo wir unter p_0 nicht den Druck im Condensator selbst, sondern in dem mit dem Condensator in Verbindung stehenden Theile des Cylinders verstehen, ist dieser Ausdruck freilich nicht ganz genau; da aber wegen der Kleinheit der Grösse σ der ganze Ausdruck einen so geringen Werth hat, dass er kaum Berücksichtigung verdient, so können wir eine im Verhältnisse zu dem schon kleinen Werthe wiederum kleine Ungenauigkeit um so mehr vernachlässigen, und wollen daher den Ausdruck in derselben Form auch hier beibehalten.

Durch Addition dieser vier einzelnen Arbeitsgrössen erhält man die ganze während des Kreisprocesses gethane Arbeit, nämlich:

$$(17)\quad W' = mB\left(\frac{e-\varepsilon}{e} + log\frac{1}{e}\right) - v'(1-\varepsilon)(b+p_0) - M\sigma(p_1-p_0).$$

§. 9. Arbeit für die Gewichtseinheit Dampf nach Pambour.

Will man die Arbeit endlich noch, statt auf einen einzelnen Hub, während dessen die Dampfmenge m wirksam ist, lieber auf die Gewichtseinheit Dampf beziehen, so braucht man den vorigen Werth nur durch m zu dividiren. Wir wollen dabei den Bruch $\frac{M}{m}$, welcher das Verhältniss der ganzen in den Cylinder tretenden Masse zu dem dampfförmigen Theile derselben darstellt, und somit etwas grösser als 1 ist, mit l, ferner den Bruch $\frac{v'}{m}$, d. h. den Raum, welcher der Gewichtseinheit Dampf im Cylinder im Ganzen geboten wird, mit V, und den Bruch $\frac{W'}{m}$, oder die der Gewichtseinheit Dampf entsprechende Arbeit, mit W bezeichnen. Dann kommt:

$$(18)\quad W = B\left(\frac{e-\varepsilon}{e} + log\frac{1}{e}\right) - V(1-\varepsilon)(b+p_0) - l\sigma(p_1-p_0).$$

In dieser Gleichung kommt nur ein Glied vor, welches von dem Volumen V abhängt, und zwar enthält es V als Factor. Da dieses Glied negativ ist, so folgt daraus, dass die Arbeit, welche man mittelst einer Gewichtseinheit Dampf erhalten kann, unter sonst gleichen Umständen am grössten ist, wenn das Volumen, welches dem Dampfe im Cylinder geboten wird, möglichst klein ist. Der kleinste Werth des Volumens, welchem man sich, wenn man ihn auch nie ganz erreicht, doch mehr und mehr nähern kann, ist derjenige, welchen man findet, wenn man annimmt, dass die Maschine so langsam gehe, oder der Zuströmungscanal so weit sei, dass im Cylinder derselbe Druck p_1 stattfinde, wie im Kessel. Dieser Fall giebt also das Maximum der Arbeit. Ist bei gleichem Dampfzustrome die Ganggeschwindigkeit grösser, oder bei gleicher Ganggeschwindigkeit der Dampfzustrom geringer, so erhält man in beiden Fällen mittelst derselben Dampfmenge eine kleinere Arbeit.

§. 10. Veränderung des Dampfes beim Einströmen aus dem Kessel in den Cylinder.

Bevor wir von hier aus dazu übergehen, nach der mechanischen Wärmetheorie dieselbe Reihe von Vorgängen in ihrem Zusammenhange zu betrachten, wird es zweckmässig sein, einen derselben, welcher noch einer speciellen Untersuchung bedarf, vorher einzeln zu behandeln, um die darauf bezüglichen Resultate im Voraus festzustellen, nämlich *das Einströmen des Dampfes in den schädlichen Raum und in den Cylinder, wenn er hier einen geringeren Druck zu überwinden hat, als den, mit welchem er aus dem Kessel getrieben wird.*

Der aus dem Kessel kommende Dampf tritt zuerst in den schädlichen Raum, comprimirt hier den vom vorigen Hube noch vorhandenen Dampf von geringer Dichte, und füllt den dadurch frei werdenden Raum aus, und wirkt dann drückend gegen den Stempel, welcher, der Annahme nach, wegen verhältnissmässig geringer Belastung so schnell zurückweicht, dass der Dampf nicht schnell genug folgen kann, um im Cylinder dieselbe Dichte zu erreichen, wie im Kessel.

Unter solchen Umständen müsste, wenn aus dem Kessel gerade nur gesättigter Dampf austräte, dieser im Cylinder überhitzt werden, indem die lebendige Kraft der Einströmungsbewegung sich hier in Wärme verwandelt; da aber der Dampf etwas fein vertheiltes Wasser mit sich führt, so wird von diesem ein Theil durch die überschüssige Wärme verdampfen, und dadurch der übrige Dampf im gesättigten Zustande erhalten werden.

Wir müssen uns nun die Aufgabe stellen: *wenn erstens der Anfangszustand der ganzen in Betracht kommenden Masse, sowohl der schon vorher im schädlichen Raume befindlichen, als auch der aus dem Kessel neu hinzukommenden, ferner die Grösse der Arbeit, welche während des Einströmens von dem auf den Stempel wirkenden Drucke gethan wird, und endlich der Druck, welcher im Momente des Abschlusses vom Kessel im Cylinder stattfindet, gegeben sind, dann zu bestimmen, wieviel von der im Cylinder befindlichen Masse in diesem Momente dampfförmig ist.*

Die vor dem Einströmen im schädlichen Raume befindliche Masse, von welcher der Allgemeinheit wegen angenommen werden

soll, dass sie theils flüssig, theils dampfförmig sei, heisse μ und der davon dampfförmige Theil μ_0. Der Druck dieses Dampfes und die dazugehörige absolute Temperatur mögen vorläufig mit p_0 und T_0 bezeichnet werden, ohne dass damit gesagt sein soll, dass dieses genau dieselben Werthe seien, welche auch für den Condensator gelten. Der Druck und die Temperatur im Kessel sollen wie früher p_1 und T_1, die aus dem Kessel in den Cylinder strömende Masse M und der davon dampfförmige Theil m_1 heissen. Der während des Einströmens auf den Stempel ausgeübte Druck braucht, wie schon erwähnt, nicht constant zu sein. Wir wollen denjenigen Druck den *mittleren* nennen und mit p'_1 bezeichnen, mit welchem der von der Stempelfläche während der Zeit des Einströmens beschriebene Raum multiplicirt werden muss, um dieselbe Arbeit zu erhalten, welche von dem veränderlichen Drucke gethan wird. Der im Momente des Abschlusses im Cylinder wirklich stattfindende Druck und die dazugehörige Temperatur seien durch p_2 und T_2 und endlich die Grösse, um deren Bestimmung es sich handelt, nämlich der von der ganzen jetzt im Cylinder vorhandenen Masse $M + \mu$ dampfförmige Theil durch m_2 dargestellt.

Zur Bestimmung dieser Grösse denken wir uns die Masse $M + \mu$ auf irgend einem Wege in ihren Anfangszustand zurückgeführt, z. B. folgendermaassen.

Der dampfförmige Theil m_2 wird im Cylinder durch Herabdrücken des Stempels condensirt, wobei vorausgesetzt wird, dass der Stempel auch in den schädlichen Raum eindringen könne. Zugleich wird der Masse in irgend einer Weise fortwährend soviel Wärme entzogen, dass ihre Temperatur constant T_2 bleibt.

Dann wird von der ganzen flüssigen Masse der Theil M in den Kessel zurückgepresst, wo er wieder die ursprüngliche Temperatur T_1 annimmt. Dadurch ist im Kessel derselbe Zustand wie vor dem Einströmen wieder hergestellt, indem am Schlusse der Operation im Kessel durchweg die anfängliche Temperatur herrscht und dabei ebenso viel flüssiges Wasser und ebenso viel Dampf, wie zu Anfange, vorhanden ist. Ob die einzelnen Molecüle, welche dem flüssigen und dem dampfförmigen Theile angehören, jetzt gerade dieselben sind, wie zu Anfange, ist für unsere Betrachtung gleichgültig, da wir zwischen den einzelnen Molecülen keinen Unterschied machen, und daher nicht fragen, *welche*

Molecüle, sondern nur *wie viele* Molecüle den beiden Theilen angehören [1]).

Die nicht in den Kessel zurückgepresste Masse μ wird zuerst im flüssigen Zustande von T_2 bis T_0 abgekühlt, und bei dieser Temperatur verwandelt sich der Theil μ_0 in Dampf, wobei der Stempel so weit zurückweicht, dass dieser Dampf wieder seinen ursprünglichen Raum einnehmen kann.

Hiermit hat die Masse $M + \mu$ einen vollständigen Kreisprocess durchgemacht, auf welchen wir nun den Satz anwenden können, dass die Summe aller während eines Kreisprocesses von der Masse aufgenommenen Wärmemengen der ganzen dabei gethanen äusseren Arbeit gleich sein muss.

Es sind nach einander folgende Wärmemengen aufgenommen:

1) Im Kessel, wo die Masse M von der Temperatur T_2 bis T_1 erwärmt und bei der letzteren Temperatur der Theil m_1 in Dampf verwandelt werden musste:

$$m_1 \varrho_1 + MC(T_1 - T_2).$$

2) Bei der Condensation des Theiles m_2 bei der Temperatur T_2:

$$- m_2 \varrho_2.$$

3) Bei der Abkühlung des Theiles μ von T_2 bis T_0:

$$- \mu C(T_2 - T_0).$$

4) Bei der Verdampfung des Theiles μ_0 bei der Temperatur T_0:

$$\mu_0 \varrho_0.$$

Die im Ganzen aufgenommene Wärmemenge, welche Q heisse, ist also:

$$(19) \qquad Q = m_1 \varrho_1 - m_2 \varrho_2 + MC(T_1 - T_2) + \mu_0 \varrho_0 - \mu C(T_2 - T_0).$$

Die Arbeitsgrössen ergeben sich folgendermaassen:

---

[1]) Wollte man, dass am Schlusse wieder genau dieselben Molecüle dem dampfförmigen Theile angehören, wie zu Anfang, so brauchte man nur anzunehmen, dass das in den Kessel zurückgepresste Wasser nicht nur seiner Menge nach, sondern auch seinen Molecülen nach, genau dasselbe sei, wie das, welches vorher aus dem Kessel heraustrat, und dass ferner von diesem Wasser, nachdem es die Temperatur T_1 angenommen hat, die früher dampfförmige Menge m_1 wieder verdampfe, und dafür eine eben so grosse Menge des vorhandenen Dampfes sich niederschlage, wobei natürlich der ganzen im Kessel befindlichen Masse keine Wärme mitgetheilt oder entzogen zu werden brauchte, weil die zur Verdampfung verbrauchte und die durch den Dampfniederschlag erzeugte Wärme sich compensiren würden.

1) Um den von der Stempelfläche während des Einströmens beschriebenen Raum zu bestimmen, weiss man, dass der ganze zu Ende dieser Zeit von der Masse $M + \mu$ eingenommene Raum

$$m_2 u_2 + (M + \mu)\sigma$$

ist. Hiervon muss der schädliche Raum abgezogen werden. Da dieser zu Anfange bei der Temperatur T_0 von der Masse μ ausgefüllt wurde, wovon der Theil μ_0 dampfförmig war, so lässt er sich durch

$$\mu_0 u_0 + \mu\sigma$$

darstellen. Zieht man diese Grösse von der vorigen ab, und multiplicirt den Rest mit dem mittleren Drucke p'_1, so erhält man als erste Arbeit:

$$(m_2 u_2 + M\sigma - \mu_0 u_0)p'_1.$$

2) Die Arbeit bei der Condensation der Masse m_2 ist:

$$-m_2 u_2 p_2.$$

3) Beim Zurückpressen der Masse M in den Kessel:

$$-M\sigma p_1.$$

4) Bei der Verdampfung des Theiles μ_0:

$$\mu_0 u_0 p_0.$$

Durch Addition dieser vier Grössen erhält man für die ganze Arbeit W den Ausdruck:

$$(20) \quad W = m_2 u_2 (p'_1 - p_2) - M\sigma(p_1 - p'_1) - \mu_0 u_0 (p'_1 - p_0).$$

Bildet man nun die Gleichung

$$Q = W,$$

setzt darin für Q und W die obigen Werthe ein, und bringt die mit m_2 behafteten Glieder auf Eine Seite zusammen, so kommt:

$$(21) \quad m_2\left[\varrho_2 + u_2(p'_1 - p_2)\right] = m_1\varrho_1 + MC(T_1 - T_2) + \mu_0\varrho_0 - \mu C(T_2 - T_0) + \mu_0 u_0 (p'_1 - p_0) + M\sigma(p_1 - p'_1).$$

Mittelst dieser Gleichung kann man aus den als bekannt vorausgesetzten Grössen die Grösse m_2 berechnen.

§. 11. Abweichung der gewonnenen Resultate von den Pambour'schen Annahmen.

In solchen Fällen, wo der mittlere Druck p'_1 beträchtlich grösser ist, als der Enddruck p_2, z. B. wenn man annimmt, dass während des grösseren Theiles der Einströmungszeit im Cylinder

nahe derselbe Druck stattgefunden habe, wie im Kessel, und erst zuletzt durch Ausdehnung des schon im Cylinder befindlichen Dampfes der Druck auf den geringeren Werth p_2 herabgesunken sei, kann es vorkommen, dass man für m_2 einen Werth findet, der kleiner als $m_1 + \mu_0$ ist, dass also ein Theil des ursprünglich vorhandenen Dampfes sich niedergeschlagen hat. Ist dagegen p'_1 nur wenig grösser oder gar kleiner als p_2, so findet man für m_2 einen Werth, der grösser als $m_1 + \mu_0$ ist. Dieses letztere ist bei der Dampfmaschine als Regel zu betrachten, und gilt insbesondere auch für den von Pambour angenommenen speciellen Fall, dass $p'_1 = p_2$ ist.

Wir sind somit auch hier, wie schon in Abschnitt VI. zu einem Resultate gelangt, welches von den Pambour'schen Ansichten wesentlich abweicht. Während dieser für die beiden verschiedenen Arten der Ausdehnung, welche in der Dampfmaschine nach einander vorkommen, ein und dasselbe Gesetz annimmt, nach welchem der ursprünglich vorhandene Dampf sich weder vermehren noch vermindern, sondern immer nur gerade im Maximum der Dichte bleiben soll, haben wir zwei verschiedene Gleichungen gefunden, welche ein entgegengesetztes Verhalten erkennen lassen. Bei der ersten Ausdehnung, während des Einströmens, muss nach der eben gefundenen Gleichung (21) noch neuer Dampf entstehen, und bei der weiteren Ausdehnung, nach dem Abschlusse vom Kessel, wobei der Dampf die volle seiner Expansivkraft entsprechende Arbeit thut, muss nach der in Abschnitt VI. entwickelten Gleichung (56) ein Theil des vorhandenen Dampfes sich niederschlagen.

Da diese beiden entgegengesetzten Wirkungen der Dampfvermehrung und Dampfverminderung, welche auch auf die Grösse der von der Maschine geleisteten Arbeit einen entgegengesetzten Einfluss ausüben müssen, zum Theil einander aufheben, so kann dadurch unter Umständen angenähert dasselbe Endresultat entstehen, wie nach der einfacheren Pambour'schen Annahme. Deshalb darf man jedoch nicht darauf verzichten, die einmal gefundene Verschiedenheit auch zu berücksichtigen, besonders wenn es sich darum handelt, zu bestimmen, in welcher Weise eine Aenderung in der Einrichtung oder im Gange der Dampfmaschine auf die Grösse ihrer Arbeit einwirkt.

§. 12. Bestimmung der Arbeit während eines Hubes unter Berücksichtigung der erwähnten Unvollkommenheiten.

Wir können uns nun wieder zu dem vollständigen beim Gange der Dampfmaschine stattfindenden Kreisprocesse wenden, und die einzelnen Theile desselben in ähnlicher Weise, wie früher, nach einander betrachten.

Aus dem Dampfkessel, in welchem der Druck p_1 angenommen wird, strömt die Masse M in den Cylinder, und zwar der Theil m_1 dampfförmig, und der übrige Theil tropfbar flüssig. Der während dieser Zeit im Cylinder wirksame mittlere Druck werde, wie oben, mit p'_1 und der Enddruck mit p_2 bezeichnet.

Nun dehnt sich der Dampf aus, bis sein Druck von p_2 bis zu einem gegebenen Werthe p_3, und demgemäss seine Temperatur von T_2 bis T_3 gesunken ist.

Darauf wird der Cylinder mit dem Condensator, in welchem der Druck p_0 stattfindet, in Verbindung gesetzt, und der Stempel macht die ganze eben vollendete Bewegung wieder zurück. Der Gegendruck, welchen er dabei erfährt, ist bei etwas schneller Bewegung grösser als p_0, und wir wollen daher zum Unterschiede von diesem Werthe den mittleren Gegendruck mit p'_0 bezeichnen.

Der zu Ende der Stempelbewegung im schädlichen Raume bleibende Dampf, welcher für den nächsten Hub in Betracht kommt, steht unter einem Drucke, welcher ebenfalls weder gleich p_0 noch gleich p'_0 zu sein braucht, und daher mit p''_0 bezeichnet werde. Er kann grösser oder kleiner als p'_0 sein, je nachdem der Abschluss von dem Condensator etwas vor oder nach dem Ende der Stempelbewegung eintritt, indem der Dampf im ersteren Falle noch etwas weiter comprimirt wird, im letzteren Falle dagegen Zeit hat, sich durch theilweises Ausströmen in den Condensator noch etwas weiter auszudehnen.

Endlich muss die Masse M noch aus dem Condensator in den Kessel zurückgeschafft werden, wobei, wie früher, der Druck p_0 befördernd wirkt, und der Druck p_1 überwunden werden muss.

Die bei diesen Vorgängen gethanen Arbeitsgrössen werden durch ganz ähnliche Ausdrücke dargestellt, wie in dem früher betrachteten einfacheren Falle, nur dass die Indices der Buchstaben

in leicht ersichtlicher Weise geändert, und die auf den schädlichen Raum bezüglichen Grössen hinzugefügt werden müssen. Man erhält dadurch folgende Gleichungen.

Für die Zeit des Einströmens nach §. 10, wobei nur noch u''_0 statt u_0 geschrieben werden muss:

$$(22)\qquad W_1 = (m_2 u_2 + M\sigma - \mu_0 u''_0) p'_1.$$

Für die Expansion von dem Drucke p_2 bis zum Drucke p_3 nach Abschnitt VI. Gleichung (62), wenn darin $M + \mu$ an die Stelle von M gesetzt wird:

$$(23)\qquad \begin{aligned} W_2 = m_3 u_3 p_3 - m_2 u_2 p_2 + m_2 \varrho_2 - m_3 \varrho_3 \\ + (M + \mu)\, C\, (T_2 - T_3). \end{aligned}$$

Für den Rückgang des Stempels, wobei der von der Stempelfläche durchlaufene Raum gleich dem ganzen von der Masse $M + \mu$ unter dem Drucke p_3 eingenommenen Raume weniger dem durch $\mu_0 u''_0 + \mu\sigma$ dargestellten schädlichen Raume ist:

$$(24)\qquad W_3 = -\,(m_3 u_3 + M\sigma - \mu_0 u''_0) p'_0.$$

Für die Zurückschaffung der Masse M in den Kessel:

$$(25)\qquad W_4 = -\,M\sigma (p_1 - p_0).$$

Die ganze Arbeit ist demnach:

$$(26)\qquad \begin{aligned} W' = m_2 \varrho_2 - m_3 \varrho_3 + (M + \mu)\, C\, (T_2 - T_3) \\ + m_2 u_2 (p'_1 - p_2) + m_3 u_3 (p_3 - p'_0) \\ - M\sigma (p_1 - p'_1 + p'_0 - p_0) - \mu_0 u''_0 (p'_1 - p'_0). \end{aligned}$$

Die hierin vorkommenden Massen m_2 und m_3 ergeben sich aus der Gleichung (21) und aus der in Abschnitt VI. unter (55) gegebenen Gleichung, wobei man nur in der ersteren an die Stelle von p_0 den Werth p''_0 setzen, und in entsprechender Weise die Grössen T_0, r_0 und u_0 ändern, und in der letzteren an die Stelle von M die Summe $M + \mu$ einführen und zugleich r und c durch ϱ und C ersetzen muss. Ich will indessen die durch diese Gleichungen mögliche Elimination der beiden Grössen m_2 und m_3 hier nicht vollständig ausführen, sondern nur für eine derselben m_2 ihren Werth einsetzen, weil es für die Rechnung zweckmässiger ist, die so erhaltene Gleichung mit den beiden vorher genannten zusammen zu betrachten. Das zur Bestimmung der Arbeit der Dampfmaschine dienende System von Gleichungen lautet also in seiner allgemeinsten Form:

$$
(27) \quad \left\{ \begin{aligned}
W' &= m_1\varrho_1 - m_3\varrho_3 + MC(T_1 - T_3) \\
&\quad + \mu_0\varrho''_0 - \mu C(T_3 - T''_0) + m_3 u_3 (p_3 - p'_0) \\
&\quad + \mu_0 u''_0 (p'_0 - p''_0) - M\sigma(p'_0 - p_0) \\
m_2[\varrho_2 &+ u_2(p'_1 - p_2)] = m_1\varrho_1 + MC(T_1 - T_2) \\
&\quad + \mu_0\varrho''_0 - \mu C(T_2 - T''_0) + \mu_0 u''_0 (p'_1 - p''_0) \\
&\quad + M\sigma(p_1 - p'_1) \\
\frac{m_3\varrho_3}{T_3} &= \frac{m_2\varrho_2}{T_2} + (M + \mu)\, C \log \frac{T_2}{T_3}.
\end{aligned} \right.
$$

§. 13. Dampfdruck im Cylinder während der verschiedenen Stadien des Ganges und darauf bezügliche Vereinfachungen der Gleichungen.

Um nun die Gleichungen (27) zu einer numerischen Rechnung anwenden zu können, ist es zunächst nöthig, die Grössen p'_1, p'_0 und p''_0 näher zu bestimmen.

Ueber die Art, wie sich der Druck im Cylinder während des Einströmens ändert, lässt sich kein allgemein gültiges Gesetz aufstellen, weil die Oeffnung und Schliessung des Zuströmungscanales bei verschiedenen Maschinen in zu verschiedenen Weisen geschieht. Demnach lässt sich auch für das Verhältniss zwischen dem mittleren Drucke p'_1 und dem Enddrucke p_2, bei ganz strenger Auffassung des letzteren, nicht ein bestimmter, ein- für allemal geltender Werth angeben. Dagegen wird dieses möglich, wenn man mit der Bedeutung von p_2 eine geringe Aenderung vornimmt.

Der Abschluss des Cylinders vom Kessel kann natürlich nicht momentan geschehen, sondern die dazu nöthige Bewegung des Ventiles oder Schiebers erfordert je nach den verschiedenen Steuerungseinrichtungen eine grössere oder kleinere Zeit, während welcher der im Cylinder befindliche Dampf sich etwas ausdehnt, weil wegen der Verengung der Oeffnung weniger neuer Dampf zuströmen kann, als der Stempelgeschwindigkeit entspricht. Man kann daher im Allgemeinen annehmen, dass zu Ende dieser Zeit der Druck schon etwas kleiner ist, als der mit p'_1 bezeichnete mittlere Druck.

Wenn man sich aber nicht daran bindet, gerade das *Ende* der zum Schliessen nöthigen Zeit als den Moment des Abschlusses in Rechnung zu bringen, sondern sich in der Feststellung dieses Momentes einige Freiheit verstattet, so kann man dadurch auch für p_2 andere Werthe erhalten. Man kann sich dann den Zeit-

punkt so gewählt denken, dass, wenn bis dahin schon die ganze Masse M eingeströmt wäre, dann in diesem Augenblicke ein Druck stattfinden würde, welcher dem bis zu diesem Augenblicke gerechneten mittleren Drucke gerade gleich wäre. Indem man den auf diese Weise näher bestimmten momentanen Abschluss an die Stelle des in der Wirklichkeit stattfindenden allmäligen Abschlusses setzt, begeht man in Bezug auf die daraus berechnete Arbeit nur einen unbedeutenden Fehler. Man kann sich daher mit dieser Modification der Pambour'schen Annahme anschliessen, dass $p'_1 = p_2$ sei, wobei es dann aber noch für jeden einzelnen Fall einer besonderen Betrachtung vorbehalten bleibt, unter Berücksichtigung der obwaltenden Umstände den Zeitpunkt des Abschlusses richtig zu bestimmen.

Was ferner den beim Rückgange des Stempels stattfindenden Gegendruck p'_0 betrifft, so ist die Differenz $p'_0 - p_0$ unter sonst gleichen Umständen offenbar um so kleiner, je kleiner p_0 ist. Sie wird daher bei Maschinen mit Condensator kleiner sein, als bei Maschinen ohne Condensator, bei denen p_0 gleich einer Atmosphäre ist. Bei den wichtigsten Maschinen ohne Condensator, den Locomotiven, kommt gewöhnlich noch ein besonderer Umstand hinzu, welcher dazu beiträgt, die Differenz zu vergrössern, nämlich der, dass man dem Dampfe nicht einen möglichst kurzen und weiten Canal zum Abfluss in die Atmosphäre darbietet, sondern ihn in den Schornstein leitet und dort durch ein etwas verengtes Blasrohr ausströmen lässt, um auf diese Weise einen künstlichen Luftzug zu erzeugen.

In diesem Falle ist eine genaue Bestimmung der Differenz für die Zuverlässigkeit des Resultates von Bedeutung. Man muss dabei auch berücksichtigen, dass die Differenz bei einer und derselben Maschine nicht constant, sondern von der Ganggeschwindigkeit abhängig ist, und muss das Gesetz, nach welchem diese Abhängigkeit stattfindet, feststellen. Auf diese Betrachtungen und die Untersuchungen, welche über diesen Gegenstand schon angestellt sind, will ich aber hier nicht eingehen, weil sie nichts mit der hier beabsichtigten Anwendung der mechanischen Wärmetheorie zu thun haben.

Bei Maschinen, in denen jene Anwendung des aus dem Cylinder austretenden Dampfes nicht vorkommt, und besonders bei den Maschinen mit Condensator ist p'_0 so wenig von p_0 verschieden, und kann sich daher auch mit der Ganggeschwindigkeit nur

so wenig ändern, dass es für die meisten Untersuchungen genügt, einen mittleren Werth für p'_0 anzunehmen.

Da ferner die Grösse p_0 in den Gleichungen (27) nur in einem mit dem Factor σ behafteten Gliede vorkommt, und daher auf den Werth der Arbeit einen sehr geringen Einfluss hat, so kann man ohne Bedenken auch für p_0 den Werth setzen, welcher für p'_0 der wahrscheinlichste ist.

Der im schädlichen Raume stattfindende Druck p''_0 hängt, wie schon erwähnt, davon ab, ob der Abschluss vom Condensator vor oder nach dem Ende der Stempelbewegung eintritt, und kann dadurch sehr verschieden ausfallen. Aber auch dieser Druck und die davon abhängigen Grössen kommen in den Gleichungen (27) nur in solchen Gliedern vor, welche mit kleinen Factoren behaftet sind, nämlich mit μ und μ_0, so dass man von einer genauen Bestimmung dieses Druckes absehen, und sich mit einer ungefähren Schätzung begnügen kann. In solchen Fällen, wo nicht besondere Umstände dafür sprechen, dass p''_0 bedeutend von p'_0 abweicht, kann man diesen Unterschied, ebenso wie den zwischen p_0 und p'_0 vernachlässigen, und den Werth, welcher den mittleren Gegendruck im Cylinder mit der grössten Wahrscheinlichkeit darstellt, als gemeinsamen Werth für alle drei Grössen annehmen. Dieser Werth möge dann einfach mit p_0 bezeichnet werden.

Durch Einführung dieser Vereinfachungen gehen die Gleichungen (27) über in:

$$(28)\quad \begin{cases} W' = m_1\varrho_1 - m_3\varrho_3 + MC(T_1 - T_3) \\ \qquad + \mu_0\varrho_0 - \mu C(T_3 - T_0) + m_3 u_3 (p_3 - p_0) \\ m_2\varrho_2 = m_1\varrho_1 + MC(T_1 - T_2) + \mu_0\varrho_0 - \mu C(T_2 - T_0) \\ \qquad + \mu_0 u_0 (p_2 - p_0) + M\sigma(p_1 - p_2) \\ \dfrac{m_3\varrho_3}{T_3} = \dfrac{m_2\varrho_2}{T_2} + (M + \mu)\, C \log \dfrac{T_2}{T_3}. \end{cases}$$

§. 14. Einführung gewisser Volumina statt der entsprechenden Temperaturen.

In diesen Gleichungen ist vorausgesetzt, dass ausser den Massen M, m_1, μ und μ_0, von denen die beiden ersten durch directe Beobachtung bekannt sein müssen, und die beiden letzten aus der Grösse des schädlichen Raumes angenähert bestimmt werden

können, auch noch die vier Druckkräfte p_1, p_2, p_3 und p_0, oder, was dasselbe ist, die vier Temperaturen T_1, T_2, T_3 und T_0 gegeben seien. Diese Bedingung ist aber in den in der Praxis vorkommenden Fällen nur theilweise erfüllt, und man muss daher andere Data für die Rechnung zu Hülfe nehmen.

Von jenen vier Druckkräften sind nur zwei als bekannt vorauszusetzen, nämlich p_1 und p_0, deren erstere durch das Kesselmanometer unmittelbar angegeben wird, und letztere aus der Angabe des Condensatormanometers wenigstens angenähert geschlossen werden kann. Die beiden anderen p_2 und p_3 sind nicht gegeben, aber dafür kennt man die Dimensionen des Cylinders, und weiss, bei welcher Stellung des Stempels der Abschluss vom Kessel erfolgt. Daraus kann man die Volumina, welche der Dampf im Cylinder im Momente des Abschlusses und zu Ende der Expansion einnimmt, ableiten, und diese beiden Volumina können daher als Data an die Stelle der Druckkräfte p_2 und p_3 treten.

Es kommt nun darauf an, die Gleichungen in solche Form zu bringen, dass man mittelst dieser Data die Rechnung ausführen kann.

Es sei wieder, wie bei der Auseinandersetzung der Pambour'schen Theorie, der ganze Raum, welcher während eines Hubes im Cylinder frei wird, mit Einschluss des schädlichen Raumes, mit v', der bis zum Abschluss vom Kessel frei werdende Raum mit ev' und der schädliche Raum mit $\varepsilon v'$ bezeichnet. Dann hat man nach dem, was früher gesagt ist, die Gleichungen:

$$m_2 u_2 + (M + \mu)\,\sigma = ev'$$
$$m_3 u_3 + (M + \mu)\,\sigma = v'$$
$$\mu_0 u_0 + \mu\sigma = \varepsilon v'.$$

Die Grössen μ und σ sind beide so klein, dass man ihr Product ohne Weiteres vernachlässigen kann, wodurch kommt:

$$(29)\quad \begin{cases} m_2 u_2 = ev' - M\sigma \\ m_3 u_3 = v' - M\sigma \\ \mu_0 = \dfrac{\varepsilon v'}{u_0}. \end{cases}$$

Ferner ist nach Abschnitt VI. Gleichung (13), wenn wir für den darin enthaltenen Differentialcoefficienten $\frac{dp}{dT}$, welcher im Folgenden so oft vorkommen wird, dass eine einfachere Bezeichnung zweckmässig ist, den Buchstaben g einführen:

$$\varrho = Tug.$$

Hiernach kann man in den obigen Gleichungssystemen die Grössen ϱ_2 und ϱ_3 durch u_2 und u_3 ersetzen. Dann kommen die Massen m_2 und m_3 nur noch in den Producten $m_2 u_2$ und $m_3 u_3$ vor, und für diese kann man die in den beiden ersten der Gleichungen (29) gegebenen Werthe einsetzen.

Ebenso kann man mittelst der letzten dieser Gleichungen zunächst die Masse μ_0 eliminiren, und was die andere Masse μ anbetrifft, so kann diese zwar etwas grösser als μ_0 sein, da aber die Glieder, welche μ als Factor enthalten, überhaupt sehr unbedeutend sind, so kann man unbedenklich auch für μ denselben Werth einsetzen, welcher für μ_0 gefunden ist, d. h. man kann jene der Allgemeinheit wegen gemachte Annahme, dass die ursprünglich im schädlichen Raume befindliche Masse theils flüssig, theils dampfförmig war, für die numerische Rechnung fallen lassen, und jene Masse als ganz dampfförmig voraussetzen.

Die eben angedeuteten Substitutionen können sowohl in den allgemeineren Gleichungen (27) als auch in den vereinfachten Gleichungen (28) geschehen. Da indessen die Ausführung gar keine Schwierigkeit hat, so wollen wir uns hier auf die letzteren beschränken, um die Gleichungen sofort in einer für die numerische Berechnung geeigneten Form zu erhalten.

Sie lauten nach dieser Aenderung folgendermaassen:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} W' &= m_1 \varrho_1 + MC(T_1 - T_3) - (v' - M\sigma)(T_3 g_3 - p_3 + p_0) \\ &\qquad + \varepsilon v' \frac{\varrho_0 - C(T_3 - T_0)}{u_0} \\ (\varepsilon v' - M\sigma) T_2 g_2 &= m_1 \varrho_1 + MC(T_1 - T_2) \\ &\qquad + \varepsilon v' \left(\frac{\varrho_0 - C(T_2 - T_0)}{u_0} + p_2 - p_0\right) + M\sigma(p_1 - p_2) \\ (v' - M\sigma) g_3 &= (\varepsilon v' - M\sigma) g_2 + \left(M + \frac{\varepsilon v'}{u_0}\right) C \log \frac{T_2}{T_3}. \end{aligned}\right.$$

§. 15. Arbeit für die Gewichtseinheit Dampf.

Um diese Gleichungen, welche die Arbeit eines Hubes oder der Dampfmenge m_1 bestimmen, endlich noch auf die Gewichtseinheit Dampf zu beziehen, ist dasselbe Verfahren anzuwenden, mittelst dessen früher die Gleichung (17) in (18) verwandelt wurde. Wir dividiren nämlich die drei Gleichungen durch m_1 und setzen dann:

$$\frac{M}{m_1} = l, \frac{v'}{m_1} = V \text{ und } \frac{W'}{m_1} = W.$$

Dadurch gehen die Gleichungen über in:

$$(31) \begin{cases} W = \varrho_1 + lC(T_1 - T_3) - (V - l\sigma)(T_3 g_3 - p_3 + p_0) \\ \qquad\qquad + \varepsilon V \dfrac{\varrho_0 - C(T_3 - T_0)}{u_0} \\ (eV - l\sigma) T_2 g_2 = \varrho_1 + lC(T_1 - T_2) \\ \qquad + \varepsilon V\left(\dfrac{\varrho_0 - C(T_2 - T_0)}{u_0} + p_2 - p_0\right) + l\sigma(p_1 - p_2) \\ (V - l\sigma) g_3 = (eV - l\sigma) g_2 + \left(l + \dfrac{\varepsilon V}{u_0}\right) C \log \dfrac{T_2}{T_3}. \end{cases}$$

§. 16. Behandlung der Gleichungen.

Die Anwendung dieser Gleichungen zur Berechnung der Arbeit kann in folgender Weise geschehen. Aus der als bekannt vorausgesetzten Verdampfungsstärke und aus der Ganggeschwindigkeit, welche die Maschine dabei annimmt, bestimmt man das Volumen V, welches auf eine Gewichtseinheit Dampf kommt. Mit Hülfe dieses Werthes berechnet man zunächst aus der zweiten Gleichung die Temperatur T_2, sodann aus der dritten die Temperatur T_3, und diese endlich wendet man in der ersten Gleichung zur Bestimmung der Arbeit an.

Dabei stösst man aber noch auf eine eigenthümliche Schwierigkeit. Um aus den beiden letzten Gleichungen die Temperaturen T_2 und T_3 zu berechnen, müssten dieselben eigentlich nach den Temperaturen aufgelöst werden. Sie enthalten aber diese Temperaturen nicht nur explicite, sondern auch implicite, indem p und g Functionen der Temperatur sind. Wollte man zur Elimination dieser Grössen eine der gebräuchlichen empirischen Formeln, welche den Dampfdruck als Function der Temperatur darstellen, für p, und ihren Differentialcoefficienten für g einsetzen, so würden die Gleichungen für die weitere Behandlung zu complicirt werden. Man könnte sich nun vielleicht in ähnlicher Weise, wie **Pambour**, dadurch helfen, dass man neue empirische Formeln aufstellte, welche für den vorliegenden Zweck bequemer, und wenn auch nicht für alle Temperaturen, so doch innerhalb gewisser Intervalle hinlänglich genau wären. Auf solche Ver-

suche will ich jedoch hier nicht eingehen, sondern statt dessen auf ein anderes Verfahren aufmerksam machen, bei welchem die Rechnung zwar etwas weitläufig, aber in ihren einzelnen Theilen leicht ausführbar ist.

§. 17. Berechnung des Differentialcoefficienten $\frac{dp}{dt} = g$ und des Productes $T \cdot g$.

Wenn die Spannungsreihe des Dampfes für irgend eine Flüssigkeit mit hinlänglicher Genauigkeit bekannt ist, so kann man daraus auch die Werthe der Grössen g und $T \cdot g$ für verschiedene Temperaturen berechnen, und ebenso, wie es mit den Werthen von p zu geschehen pflegt, in Tabellen vereinigen.

Für den Wasserdampf, welcher bis jetzt bei den Dampfmaschinen fast allein angewandt wird, habe ich eine solche Rechnung mit Hülfe der Regnault'schen Spannungsreihe für die Temperaturen von 0° bis 200° ausgeführt.

Ich hätte dabei eigentlich die Formeln, welche Regnault zur Berechnung der einzelnen Werthe von p unter und über 100° benutzt hat, nach t differentiiren, und mittelst der dadurch erhaltenen neuen Formeln g berechnen müssen. Da aber jene Formeln doch nicht so vollkommen ihrem Zwecke entsprechen, dass mir diese mühsame Arbeit lohnend schien, und die Aufstellung und Berechnung einer anderen geeigneteren Formel noch weitläufiger gewesen wäre, so habe ich mich damit begnügt, die schon für den Druck berechneten Zahlen auch zu einer angenäherten Bestimmung des Differentialcoefficienten des Druckes zu benutzen. Sei z. B. der Druck für die Temperaturen 146° und 148° mit p_{146} und p_{148} bezeichnet, so habe ich angenommen, dass die Grösse

$$\frac{p_{148} - p_{146}}{2}$$

den für die mittlere Temperatur 147° geltenden Werth des Differentialcoefficienten hinlänglich genau darstelle.

Dabei habe ich über 100° die von Regnault selbst angeführten Zahlen benutzt[1]). In Bezug auf die Werthe unter 100° hat in neuerer Zeit Moritz[2]) darauf aufmerksam gemacht, dass

---

1) *Mém. de l'Acad. des Sciences T. XXI, p. 625.*

2) *Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Acad. de St. Pétersbourg, T. XIII, p. 41.*

die Formel, welche Regnault zwischen 0° und 100° angewandt hat, dadurch, dass er sich zur Berechnung der Constanten siebenstelliger Logarithmen bedient hat, etwas ungenau geworden ist, besonders in der Nähe von 100°. Moritz hat daher jene Constanten unter Zugrundelegung derselben Beobachtungswerthe mit zehnstelligen Logarithmen berechnet, und die aus dieser verbesserten Formel abgeleiteten Werthe von p, soweit sie von den Regnault'schen abweichen, was erst über 40° eintritt, mitgetheilt. Diese Werthe habe ich benutzt [1]).

---

[1]) Da der Differentialcoefficient $\frac{dp}{dt}$ in Rechnungen, welche sich auf den Dampf beziehen, sehr oft vorkommt, so ist es von Interesse, zu wissen, in wie weit die von mir angewandte bequeme Bestimmungsweise desselben zuverlässig ist, und ich will daher hier einige Zahlen zur Vergleichung zusammenstellen.

Regnault hat zur Berechnung der in seiner Tabelle enthaltenen Werthe der Dampfspannungen für die Temperaturen über 100° folgende Formel angewandt:

$$Log\, p = a - b\alpha^x - c\beta^x,$$

worin unter Log der Briggs'sche Logarithmus verstanden ist, ferner x die von — 20° an gerechnete Temperatur bedeutet, so dass $x = t + 20$ ist, und endlich die fünf Constanten folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} a &= 6{\cdot}2640348 \\ Log\, b &= 0{\cdot}1397743 \\ Log\, c &= 0{\cdot}6924351 \\ Log\, \alpha &= 9{\cdot}994049292 - 10 \\ Log\, \beta &= 9{\cdot}998343862 - 10. \end{aligned}$$

Wenn man aus dieser Formel für p eine Gleichung für $\frac{dp}{dt}$ ableitet, so erhält man:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = A\alpha^t + B\beta^t,$$

worin α und β dieselben Werthe haben, wie vorher, und A und B zwei neue Constante von folgenden Werthen sind:

$$\begin{aligned} Log\, A &= 8{\cdot}5197602 - 10 \\ Log\, B &= 8{\cdot}6028403 - 10. \end{aligned}$$

Berechnet man aus dieser Gleichung den im Texte beispielsweise erwähnten, auf die Temperatur 147° bezüglichen Werth des Differentialcoefficienten $\frac{dp}{dt}$, so erhält man:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{147} = 90{\cdot}115.$$

Für jene angenäherte Bestimmungsweise hat man nach der Regnault'schen Tabelle die Spannungen:

Nachdem die Grösse g für die einzelnen Temperaturgrade berechnet ist, hat auch die Berechnung des Productes $T \cdot g$ keine Schwierigkeit mehr, da T durch die einfache Gleichung

$$T = 273 + t$$

bestimmt ist.

Die so gefundenen Werthe von g und $T \cdot g$ habe ich in einer am Ende dieser Abhandlung mitgetheilten Tabelle zusammen-

---

$$p_{148} = 3392{\cdot}98$$
$$p_{146} = 3212{\cdot}74$$

und daraus ergiebt sich:

$$\frac{p_{148} - p_{146}}{2} = \frac{180{\cdot}24}{2} = 90{\cdot}12.$$

Man sieht, dass dieser angenäherte Werth mit dem aus der obigen Gleichung berechneten genaueren Werthe so nahe übereinstimmt, dass man ihn in den bei Dampfmaschinen vorkommenden Rechnungen unbedenklich anwenden kann.

Was die Temperaturen zwischen 0° und 100° anbetrifft, so lautet die Formel, welche Regnault in diesem Intervalle zur Berechnung der Dampfspannungen angewandt hat:

$$Log\ p = a + b\alpha^t - c\beta^t.$$

Die Constanten haben nach der verbesserten Berechnung von Moritz folgende Werthe:

$$a = 4{\cdot}7393707$$
$$Log\ b = 8{\cdot}1319907112 - 10$$
$$Log\ c = 0{\cdot}6117407675$$
$$Log\ \alpha = 0{\cdot}006864937152$$
$$Log\ \beta = 9{\cdot}996725536856 - 10.$$

Aus dieser Formel lässt sich für $\frac{dp}{dt}$ wieder eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = A\alpha^t + B\beta^t,$$

ableiten, worin die Werthe der Constanten α und β die eben angeführten sind, und A und B folgende Werthe haben:

$$Log\ A = 6{\cdot}6930586 - 10$$
$$Log\ B = 8{\cdot}8513123 - 10.$$

Berechnet man aus dieser Gleichung z. B. den der Temperatur 70° entsprechenden Werth von $\frac{dp}{dt}$, so findet man:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{70} = 10{\cdot}1112.$$

Durch die angenäherte Bestimmungsweise erhält man:

$$\frac{p_{71} - p_{69}}{2} = \frac{243{\cdot}380 - 223{\cdot}154}{2} = 10{\cdot}113,$$

also wiederum eine Zahl, welche mit der aus der genaueren Gleichung berechneten befriedigend übereinstimmt.

gestellt. Der Vollständigkeit wegen habe ich auch die dazugehörigen Werthe von p hinzugefügt, und zwar von 0° bis 40° und über 100° die von Regnault, von 40° bis 100° die von Moritz berechneten. Bei jeder dieser drei Zahlenreihen sind die Differenzen je zweier aufeinander folgender Zahlen mit angeführt, so dass man aus dieser Tabelle für jede gegebene Temperatur die Werthe jener drei Grössen, und umgekehrt für jeden gegebenen Werth einer jener drei Grössen die entsprechende Temperatur finden kann.

§. 18. Einführung anderer Druck- und Wärmemaasse.

In Bezug auf die Art der Anwendung der Werthe jener Tabelle ist noch eine Bemerkung zu machen. In den Gleichungen (31) ist vorausgesetzt, dass der Druck p und sein Differentialcoefficient g in Kilogrammen auf ein Quadratmeter ausgedrückt seien; in der Tabelle dagegen ist dieselbe Druckeinheit beibehalten, auf welche die Regnault'sche Spannungsreihe sich bezieht, nämlich Millimeter Quecksilber. Um nun in den folgenden Formeln unter p und g die in dieser letzteren Einheit ausgedrückten Werthe des Druckes und seines Differentialcoefficienten verstehen zu dürfen, müssen wir die Aenderung mit den Gleichungen (31) vornehmen, dass wir p und g mit der das specifische Gewicht des Quecksilbers darstellenden Zahl 13·596, welche nach §. 10 des Abschnittes VI. die Verhältnisszahl zwischen den beiden Druckeinheiten ist, multipliciren. Bezeichnen wir diese Zahl der Kürze wegen mit k, so haben wir p und g überall, wo sie in jenen Gleichungen vorkommen, durch die Producte kp und kg zu ersetzen.

Zugleich wollen wir statt der Grössen C und ϱ, welche die specifische Wärme und die Verdampfungswärme nach mechanischem Maasse darstellen, die Grössen c und r einführen, welche sich auf gewöhnliches Wärmemaass beziehen, indem wir statt C und ϱ die Producte Ec und Er setzen.

Wenn wir dann noch die Gleichungen durch k dividiren, um die Constanten E und k möglichst zusammen zu bringen, so gehen sie in folgende über, aus denen sich der Bruch $\frac{W}{k}$ und somit auch die Arbeit W selbst berechnen lässt:

$$
(32)\quad\begin{cases}
\dfrac{W}{k} = \dfrac{E}{k}\Big[r_1 + lc(T_1 - T_3)\Big] - (V - l\sigma)(T_3 g_3 - p_3 + p_0) \\
\qquad\qquad + \varepsilon V \dfrac{E}{k} \cdot \dfrac{r_0 - c(T_3 - T_0)}{u_0} \\
(eV - l\sigma)\, T_2 g_2 = \dfrac{E}{k}\Big[r_1 + lc\,(T_1 - T_2)\Big] \\
\qquad + \varepsilon V \left(\dfrac{E}{k} \cdot \dfrac{r_0 - c(T_2 - T_0)}{u_0} + p_2 - p_0\right) + l\sigma(p_1 - p_2) \\
(V - l\sigma)\, g_3 = (eV - l\sigma)\, g_2 + \left(l + \dfrac{\varepsilon V}{u_0}\right) \dfrac{Ec}{k} \log \dfrac{T_2}{T_3}.
\end{cases}
$$

Der hierin vielfach vorkommende Bruch $\frac{E}{k}$ hat den Werth:

$$
(33)\qquad \frac{E}{k} = \frac{423{\cdot}55}{13{\cdot}596} = 31{\cdot}1525.
$$

§. 19. Bestimmung der Temperaturen T_2 und T_3.

Die zweite der Gleichungen (32) lässt sich in folgender Form schreiben:

$$
(34)\qquad T_2 g_2 = C + a\,(t_1 - t_2) - b\,(p_1 - p_2),
$$

worin die Grössen C, a und b von t_2 unabhängig sind, nämlich:

$$
(34\,\mathrm{a})\quad\begin{cases}
C = \dfrac{1}{eV - l\sigma}\left[\dfrac{Er_1}{k} + \varepsilon V\left(\dfrac{E}{k} \cdot \dfrac{r_0 - c(T_1 - T_0)}{u_0} + p_1 - p_0\right)\right] \\
a = \dfrac{E}{k} \cdot \dfrac{c\left(l + \dfrac{\varepsilon V}{u_0}\right)}{eV - l\sigma} \\
b = \dfrac{\varepsilon V - l\sigma}{eV - l\sigma}.
\end{cases}
$$

Von den drei auf der rechten Seite von (34) stehenden Gliedern ist das erste bei Weitem überwiegend, und dadurch wird es möglich, das Product $T_2 g_2$ und damit zugleich auch die Temperatur t_2 durch successive Näherung zu bestimmen.

Um den ersten Näherungswerth des Productes, welcher $T' g'$ heissen möge, zu erhalten, setze man auf der rechten Seite t_1 an die Stelle von t_2 und entsprechend p_1 statt p_2, dann kommt:

$$
(35)\qquad T' g' = C.
$$

Die zu diesem Werthe des Productes gehörige Temperatur t' schlage man in der Tabelle auf. Um nun den zweiten Näherungs-

werth des Productes zu bekommen, setze man den eben gefundenen Werth t' und den entsprechenden Werth p' des Druckes auf der rechten Seite von (34) für t_2 und p_2, wodurch man unter Berücksichtigung der vorigen Gleichung erhält:

$$(35a) \qquad T'' g'' = T' g' + a(t_1 - t') - b\,(p_1 - p').$$

Die zu diesem Werthe des Productes gehörige Temperatur t'' ergiebt sich, wie vorher, aus der Tabelle. Stellt diese die gesuchte Temperatur t_2 noch nicht genau genug dar, so wiederhole man dasselbe Verfahren. Man setze auf der rechten Seite von (34) t'' und p'' an die Stelle von t_2 und p_2, wodurch man unter Berücksichtigung der beiden vorigen Gleichungen erhält:

$$(35b) \qquad T''' g''' = T'' g'' + a\,(t' - t'') - b\,(p' - p''),$$

und den neuen Temperaturwerth t''' in der Tabelle finden kann.

In dieser Weise könnte man beliebig lange fortfahren, aber schon der dritte Näherungswerth weicht nur noch etwa um $^1/_{100}$ Grad, und der vierte um weniger als $^1/_{1000}$ Grad von dem wahren Werthe der Temperatur t_2 ab.

Ganz ähnlich ist die Behandlung der dritten der Gleichungen (32). Dividirt man diese durch $V - l\sigma$, und führt der leichteren Rechnung wegen statt der durch das Zeichen *log* angedeuteten natürlichen Logarithmen Briggs'sche Logarithmen ein, welche durch das Zeichen *Log* angedeutet werden mögen, wobei man nur den Modulus M dieses Systems als Divisor hinzufügen muss, so nimmt die Gleichung die Form

$$(36) \qquad g_3 = C + a\,Log\,\frac{T_2}{T_3}$$

an, worin C und a folgende von T_3 unabhängige Werthe haben:

$$(36a) \qquad \begin{cases} C = \dfrac{eV - l\sigma}{V - l\sigma} \cdot g_2 \\[2ex] a = \dfrac{E}{k} \cdot \dfrac{c\left(l + \dfrac{\varepsilon V}{u_0}\right)}{M(V - l\sigma)}. \end{cases}$$

In der Gleichung (36) ist wieder auf der rechten Seite das erste Glied überwiegend, so dass man das Verfahren der successiven Näherung anwenden kann. Man setze zunächst T_2 an die Stelle von T_3, dann erhält man als ersten Näherungswerth von g_3:

$$(37) \qquad g' = C,$$

und kann die dazu gehörige Temperatur t' in der Tabelle finden,

und daraus leicht die absolute Temperatur T' bilden. Diese setze man nun in (36) für T_3 ein, dann kommt:

$$g'' = g' + a \, Log \frac{T_2}{T'}, \tag{37a}$$

woraus sich T'' ergiebt. Ebenso erhält man weiter:

$$g''' = g'' + a \, Log \frac{T'}{T''}, \tag{37b}$$

woraus sich T''' ergiebt, u. s. f. Auch hier genügen wenige solcher Rechnungen, um einen Werth zu erhalten, welcher mit grosser Annäherung als Werth von T_3 gelten kann.

§. 20. Bestimmung der Grössen *c* und *r*.

Es bleibt nun, um zur numerischen Anwendung der Gleichungen (32) schreiten zu können, nur noch die Bestimmung der Grössen c und r übrig.

Die Grösse c, d. h. die specifische Wärme der Flüssigkeit ist in der bisherigen Entwickelung als constant behandelt. Das ist freilich nicht ganz richtig, da die specifische Wärme mit wachsender Temperatur etwas zunimmt. Wenn man aber den Werth, welcher etwa für die Mitte des Intervalles, welches die in der Untersuchung vorkommenden Temperaturen umfasst, richtig ist, als gemeinsamen Werth auswählt, so können die Abweichungen nicht bedeutend werden. Bei den durch Wasserdampf getriebenen Dampfmaschinen kann als solche mittlere Temperatur etwa 100° gelten, welche bei einer gewöhnlichen Hochdruckmaschine mit Condensator ungefähr gleich weit von der Kessel- und Condensatortemperatur entfernt ist. Wir wollen also beim Wasser den Werth anwenden, welcher nach Regnault die specifische Wärme bei 100° darstellt, indem wir setzen:

$$c = 1{\cdot}0130. \tag{38}$$

Zur Bestimmung der Grösse r gehen wir von der Gleichung aus, welche Regnault für die ganze Wärmemenge, welche dazu nöthig ist, um eine Gewichtseinheit Wasser von 0° bis zur Temperatur t zu erwärmen und bei dieser Temperatur in Dampf zu verwandeln, aufgestellt hat, nämlich:

$$\lambda = 606{\cdot}5 + 0{\cdot}305 \, . \, t.$$

Setzt man hierin für λ die der vorigen Definition entsprechende Summe $\int_0^t c dt + r$, so kommt:

$$r = 606{\cdot}5 + 0{\cdot}305 \,.\, t - \int_0^t c dt.$$

In dem Integrale muss man, um genau die Werthe von r zu erhalten, welche Regnault angiebt[1]), für c die von Regnault näher bestimmte Teperaturfunction anwenden. Ich glaube aber, dass es für den vorliegenden Zweck genügt, wenn wir auch hierbei für c die vorher angeführte Constante in Anwendung bringen. Dadurch erhalten wir:

$$\int_0^t c dt = 1{\cdot}013 \,.\, t,$$

und können nun die beiden von t abhängigen Glieder der vorigen Gleichung in Eines zusammenziehen, welches $- 0{\cdot}708 \,.\, t$ lautet.

Zugleich müssen wir nun auch das constante Glied der Gleichung etwas ändern, und wir wollen es so bestimmen, dass derjenige Beobachtungswerth von r, welcher wahrscheinlich unter allen der genaueste ist, auch durch die Formel richtig dargestellt wird. Bei 100° hat Regnault für die Grösse λ als Mittel aus 38 Beobachtungszahlen den Werth 636·67 gefunden. Ziehen wir hiervon die Wärmemenge ab, welche zur Erwärmung der Gewichtseinheit Wasser von 0° bis 100° erforderlich ist, und welche nach Regnault 100·5 Wärmeeinheiten beträgt, so bleibt, wenn wir uns mit Einer Decimale begnügen,

$$r_{100} = 536{\cdot}2 \text{ }^{2)}.$$

Unter Anwendung dieses Werthes erhält man für r die Formel:

$$r = 607 - 0{\cdot}708 \,.\, t. \tag{39}$$

Diese Formel wurde schon in Abschnitt VI. §. 3 vorläufig angeführt, und es ist dort eine kleine Tabelle gegeben, aus welcher die grosse Uebereinstimmung zwischen den aus dieser Formel berechneten und den von Regnault in seiner Tabelle angeführten Werthen von r ersichtlich ist.

---

[1]) *Relation des expériences t. I., p. 748.*

[2]) Regnault selbst führt in seiner Tabelle nicht genau die obige Zahl, sondern 536·5 an; das liegt aber nur daran, dass er für λ bei 100° in der Rechnung statt des vorher erwähnten Werthes 636·67 in runder Zahl 637 gesetzt hat.

§. 21. Specielle Form der Gleichungen (32) für eine Maschine ohne Expansion.

Um die beiden verschiedenen Arten der Ausdehnung, auf welche sich die beiden letzten der Gleichungen (32) beziehen, in ihren Wirkungen unterscheiden zu können, scheint es mir zweckmässig, zunächst eine solche Dampfmaschine zu betrachten, in welcher nur Eine derselben vorkommt. Wir wollen daher mit einer Maschine beginnen, welche *ohne Expansion* arbeitet.

In diesem Falle ist für die Grösse e, welche das Verhältniss der Volumina vor und nach der Expansion bezeichnet, der Werth 1 und zugleich $T_3 = T_2$ zu setzen, wodurch die Gleichungen (32) eine einfachere Gestalt annehmen.

Die letzte dieser Gleichungen wird identisch und fällt also fort. In der zweiten geht die linke Seite in $(V - l\sigma)\, T_2 g_2$ über, während die rechte Seite ungeändert bleibt. Die erste endlich nimmt zunächst folgende Form an:

$$\frac{W}{k} = \frac{E}{k}\Big[r_1 + lc\,(T_1 - T_2)\Big] - (V - l\sigma)\,(T_2 g_2 - p_2 + p_0) \\ + \varepsilon V\, \frac{E}{k} \cdot \frac{r_0 - c\,(T_2 - T_0)}{u_0}.$$

Wenn man hierin für $(V - l\sigma)\, T_2 g_2$ den an der rechten Seite der zweiten Gleichung stehenden Ausdruck einsetzt, so heben sich alle Glieder, welche $\frac{E}{k}$ als Factor enthalten und zwei Glieder, welche $l\sigma$ als Factor enthalten, gegenseitig auf, und die übrig bleibenden Glieder lassen sich in zwei Producte zusammenfassen. Die beiden Gleichungen lauten dann:

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{W}{k} = V(1 - \varepsilon)\,(p_2 - p_0) - l\sigma\,(p_1 - p_0) \\ (V - l\sigma)\, T_2 g_2 = \dfrac{E}{k}\Big[r_1 + lc\,(T_1 - T_2)\Big] \\ + \varepsilon V \left(\dfrac{E}{k} \cdot \dfrac{r_0 - c\,(T_2 - T_0)}{u_0} + p_2 - p_0\right) + l\sigma\,(p_1 - p_2). \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist genau dieselbe, welche man auch nach der Pambour'schen Theorie erhält, wenn man in (18) $e = 1$ setzt, und mittelst der Gleichung (12) (nachdem

darin $e = 1$ und $\frac{v'}{m} = V$ gesetzt ist), statt der Grösse B das Volumen V einführt. Der Unterschied liegt also nur in der zweiten Gleichung, welche an die Stelle der von Pambour angenommenen einfachen Beziehung zwischen Volumen und Druck getreten ist.

§. 22. Angenommene numerische Werthe.

Die in diesen Gleichungen vorkommende Grösse ε, welche den schädlichen Raum als Bruchtheil des ganzen für den Dampf frei werdenden Raumes darstellt, sei zu 0·05 angenommen. Die Menge der tropfbaren Flüssigkeit, welche der Dampf beim Eintritt in den Cylinder mit sich führt, ist bei verschiedenen Maschinen verschieden. Pambour sagt, dass sie bei Locomotiven durchschnittlich 0·25, bei stehenden Dampfmaschinen aber viel weniger, vielleicht 0·05 der ganzen in den Cylinder tretenden Masse betrage. Wir wollen für unser Beispiel die letztere Angabe benutzen, wonach das Verhältniss der ganzen in den Cylinder tretenden Masse zu dem dampfförmigen Theile derselben 1 : 0·95 ist. Ferner sei der Druck im Kessel zu 5 Atmosphären angenommen, wozu die Temperatur 152·22° gehört, und vorausgesetzt, dass die Maschine keinen Condensator, oder, was dasselbe ist, einen Condensator mit dem Drucke von 1 Atmosphäre habe. Der mittlere Gegendruck im Cylinder ist dann grösser als 1 Atmosphäre. Bei Locomotiven kann dieser Unterschied, wie oben erwähnt, durch einen besonderen Umstand beträchtlich werden, bei stehenden Dampfmaschinen dagegen ist er geringer. Pambour hat in seinen numerischen Rechnungen für stehende Maschinen ohne Condensator diesen Unterschied ganz vernachlässigt, und da es sich hier nur um ein Beispiel zur Vergleichung der neuen Formeln mit den Pambour'schen handelt, so wollen wir uns auch hierin ihm anschliessen, und $p_0 = 1$ Atmosphäre setzen.

Es kommen also in den Gleichungen (40) für dieses Beispiel folgende Werthe zur Anwendung:

$$(41) \quad \begin{cases} \varepsilon = 0{\cdot}05 \\ l = \frac{1}{0{\cdot}95} = 1{\cdot}053 \\ p_1 = 3800 \\ p_0 = 760. \end{cases}$$

Nehmen wir hierzu noch die ein- für allemal feststehenden Werthe:

$$k = 13{\cdot}596$$
$$\sigma = 0{\cdot}001,$$

so bleiben in der ersten der Gleichungen (40) ausser der gesuchten Grösse W nur noch die Grössen V und p_2 unbestimmt.

§. 23. Kleinstmöglicher Werth von V und dazugehörige Arbeit.

Wir müssen nun zuerst untersuchen, welches der *kleinstmögliche* Werth von V ist.

Dieser Werth entspricht dem Falle, wo im Cylinder derselbe Druck, wie im Kessel stattfindet, und wir brauchen daher nur in der letzten der Gleichungen (40) p_1 an die Stelle von p_2 zu setzen. Dadurch kommt:

$$(42) \qquad V = \frac{\frac{Er_1}{k} + l\sigma \,.\, T_1 g_1}{T_1 g_1 - \varepsilon\left(\frac{E}{k} \cdot \frac{r_0 - c(T_1 - T_0)}{u_0} + p_1 - p_0\right)}.$$

Um hierbei gleich von dem Einflusse des schädlichen Raumes ein Beispiel zu geben, habe ich von diesem Ausdrucke zwei Werthe berechnet, den, welcher entstehen würde, wenn kein schädlicher Raum vorhanden, und also $\varepsilon = 0$ wäre, und den, welcher unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass $\varepsilon = 0{\cdot}05$ ist, entstehen muss. Diese beiden Werthe sind für 1 Kilogramm aus dem Kessel tretenden Dampfes als Bruchtheil eines Cubikmeter ausgedrückt:

0·3637 und 0·3690.

Dass der letzte dieser Werthe grösser ist, als der erste, kommt daher, dass erstens der Dampf in den schädlichen Raum mit grosser Geschwindigkeit eindringt, die lebendige Kraft dieser Bewegung sich dann in Wärme verwandelt, und diese wiederum einen Theil der mitgerissenen Flüssigkeit verdampfen lässt, und dass zweitens

der schon vor dem Einströmen im schädlichen Raume befindliche Dampf ebenfalls dazu beiträgt, die ganze nachher vorhandene Dampfmenge zu vermehren.

Setzt man die beiden für V gefundenen Werthe in die erste der Gleichungen (40) ein, wobei wieder ε das eine Mal $= 0$ und das andere Mal $= 0{\cdot}05$ gesetzt wird, so erhält man als entsprechende Arbeitsgrössen in Kilogramm-Meter ausgedrückt:

14990 und 14450.

Nach der Pambour'schen Theorie macht es in Bezug auf das Volumen keinen Unterschied, ob ein Theil desselben schädlicher Raum ist, oder nicht, es wird in beiden Fällen durch dieselbe Gleichung (11b) bestimmt, wenn man darin für p den besonderen Werth p_1 setzt. Dadurch erhält man:

0·3883.

Dass dieser Werth grösser ist, als der vorher für dieselbe Dampfmenge gefundene 0·3637, erklärt sich daraus, dass man überhaupt bisher das Volumen des Dampfes im Maximum der Dichte für grösser gehalten hat, als es der mechanischen Wärmetheorie nach sein kann, und diese frühere Ansicht auch in der Gleichung (11b) ihren Ausdruck findet.

Bestimmt man mittelst dieses Volumens die Arbeit aus der Pambour'schen Gleichung unter den beiden Voraussetzungen, dass $\varepsilon = 0$ oder $= 0{\cdot}05$ sei, so kommt:

16000 und 15200.

Diese Arbeitsgrössen sind, wie es auch als unmittelbare Folge des grösseren Volumens vorauszusehen war, beide grösser, als die vorher gefundenen, aber nicht in gleichem Verhältnisse, indem der durch den schädlichen Raum veranlasste Arbeitsverlust nach den von uns entwickelten Gleichungen geringer ist, als er nach der Pambour'schen Theorie sein müsste.

§. 24. Berechnung der Arbeit für andere Werthe von V.

Bei einer Maschine der hier betrachteten Art, welche Pambour in ihrer Wirksamkeit untersuchte, verhielt sich die Geschwindigkeit, welche die Maschine wirklich annahm, zu derjenigen, welche sich für dieselbe Verdampfungsstärke und denselben Druck im Kessel aus seiner Theorie als Minimum der Geschwindigkeit

berechnen liess, bei einem Versuche wie 1·275 : 1 und bei einem anderen, unter geringerer Belastung, wie 1·70 : 1. Diesen Geschwindigkeiten würden für unseren Fall die Volumina 0·495 und 0·660 entsprechen. Wir wollen nun als ein Beispiel zur Bestimmung der Arbeit eine Geschwindigkeit wählen, welche zwischen diesen beiden liegt, indem wir in runder Zahl setzen:

$$V = 0{\cdot}6.$$

Es kommt nun zunächst darauf an, für diesen Werth von V die Temperatur t_2 zu finden. Dazu dient die Gleichung (34), welche folgende specielle Form annimmt:

$$(43) \qquad T_2 g_2 = 26\,577 + 56{\cdot}42 \,.\, (t_1 - t_2) - 0{\cdot}0483 \,.\, (p_1 - p_2).$$

Führt man mittelst dieser Gleichung die in §. 19 beschriebene successive Bestimmung von t_2 aus, so erhält man der Reihe nach folgende Näherungswerthe:

$$t' = 133{\cdot}01^0$$
$$t'' = 134{\cdot}43$$
$$t''' = 134{\cdot}32$$
$$t'''' = 134{\cdot}33.$$

Noch weitere Näherungswerthe würden sich nur noch in höheren Decimalen unterscheiden, und wir haben also, sofern wir uns mit zwei Decimalen begnügen wollen, die letzte Zahl als den wahren Werth von t_2 zu betrachten. Der dazu gehörige Druck ist:

$$p_2 = 2308{\cdot}30.$$

Wendet man diese Werthe von V und p_2 zugleich mit den übrigen in §. 22 näher festgestellten Werthen auf die erste der Gleichungen (40) an, so erhält man:

$$W = 11\,960.$$

Die Pambour'sche Gleichung (18) giebt für dasselbe Volumen 0·6 die Arbeit:

$$W = 12\,520.$$

Um die Abhängigkeit der Arbeit vom Volumen, und zugleich den Unterschied, welcher in dieser Beziehung zwischen Pambour's und meiner Theorie herrscht, noch deutlicher erkennen zu lassen, habe ich dieselbe Rechnung, wie für das Volumen 0·6 auch für eine Reihe anderer in gleichen Abständen wachsender Volumina ausgeführt. Die Resultate sind in nachstehender Tabelle zusammengefasst. Die erste horizontale Zahlenreihe, welche durch einen Strich von den anderen getrennt ist, enthält die für eine Maschine

ohne schädlichen Raum gefundenen Werthe. Im Uebrigen ist die Einrichtung der Tabelle leicht ersichtlich.

V	t_2	W	nach Pambour V	nach Pambour W
0·3637	152·22°	14 990	0·3883	16 000
0·3690	152·22°	14 450	0·3883	15 200
0·4	149·12	14 100	0·4	15 050
0·5	140·83	13 020	0·5	13 780
0·6	134·33	11 960	0·6	12 520
0·7	129·03	10 910	0·7	11 250
0·8	124·55	9 880	0·8	9 980
0·9	120·72	8 860	0·9	8 710
1	117·36	7 840	1	7 440

Man sieht, dass die nach der Pambour'schen Theorie berechneten Arbeitsgrössen mit wachsendem Volumen schneller abnehmen, als die nach unseren Gleichungen berechneten, so dass sie, während sie anfangs beträchtlich grösser sind, als diese, ihnen allmälig näher kommen, und zuletzt sogar kleiner werden. Dieses erklärt sich daraus, dass nach der Pambour'schen Theorie bei der während des Einströmens stattfindenden Ausdehnung immer nur dieselbe Masse dampfförmig bleibt, welche es schon anfangs war; nach der unserigen dagegen ein Theil der im flüssigen Zustande mitgerissenen Masse noch nachträglich verdampft, und zwar um so mehr, je grösser die Ausdehnung ist.

§. 25. Arbeit einer Maschine mit Expansion für einen bestimmten Werth von V.

Wir wollen nun in ähnlicher Weise eine Maschine betrachten, welche *mit Expansion* arbeitet, und zwar wollen wir dazu eine Maschine mit Condensator wählen.

In Bezug auf die Grösse der Expansion wollen wir annehmen, dass der Abschluss vom Kessel erfolge, wenn der Stempel $1/3$

seines Weges zurückgelegt hat. Dann haben wir zur Bestimmung von e die Gleichung:

$$e - \varepsilon = \frac{1}{3}(1 - \varepsilon),$$

und daraus ergiebt sich, wenn wir für ε den Werth 0·05 beibehalten:

$$e = \frac{1 \cdot 1}{3} = 0 \cdot 3666 \ldots$$

Der Druck im Kessel sei, wie vorher, zu 5 Atmosphären angenommen. Der Druck im Condensator kann bei guter Einrichtung unter $\frac{1}{10}$ Atmosphäre erhalten werden. Da er aber nicht immer so klein ist, und ausserdem der Gegendruck im Cylinder den im Condensator stattfindenden Druck noch etwas übertrifft, so wollen wir für den mittleren Gegendruck p_0 in runder Zahl $\frac{1}{5}$ Atmosphäre oder 152 mm annehmen, wozu die Temperatur $t_0 = 60 \cdot 46^0$ gehört. Behalten wir endlich für l den vorher angenommenen Werth bei, so sind die in diesem Beispiele zur Anwendung kommenden Grössen folgende:

$$(44) \qquad \begin{cases} e = 0 \cdot 36667 \\ \varepsilon = 0 \cdot 05 \\ l = 1 \cdot 053 \\ p_1 = 3800 \\ p_0 = 152. \end{cases}$$

Es braucht nun, um die Arbeit berechnen zu können, nur noch der Werth von V gegeben zu werden. Um bei der Wahl desselben einen Anhalt zu haben, müssen wir zuerst den kleinstmöglichen Werth von V kennen. Dieser ergiebt sich, ganz wie bei den Maschinen ohne Expansion, dadurch, dass man in der zweiten der Gleichungen (32) p_1 an die Stelle von p_2 setzt, und ebenso die übrigen mit p_2 zusammenhängenden Grössen ändert. Man findet auf diese Weise für unseren Fall den Werth:

$$1 \cdot 010.$$

Hiervon ausgehend wollen wir als erstes Beispiel annehmen, die wirkliche Ganggeschwindigkeit der Maschine übertreffe die kleinstmögliche etwa im Verhältnisse von 3 : 2, indem wir in runder Zahl

$$V = 1 \cdot 5$$

setzen, und für diese Geschwindigkeit wollen wir die Arbeit bestimmen.

Zunächst müssen durch Einsetzung dieses Werthes von V in die beiden letzten der Gleichungen (32) die beiden Temperaturen

t_2 und t_3 bestimmt werden. Die Bestimmung von t_2 ist schon bei der Maschine ohne Condensator etwas näher besprochen, und da sich der vorliegende Fall von jenem nur dadurch unterscheidet, dass die Grösse e, welche dort gleich 1 gesetzt war, hier einen anderen Werth hat, so will ich darauf nicht noch einmal eingehen, sondern nur das Endresultat anführen. Man findet nämlich:

$$t_2 = 137{\cdot}43^0.$$

Die zur Bestimmung von t_3 dienende Gleichung (36) nimmt für diesen Fall folgende Gestalt an:

$$g_3 = 26{\cdot}604 + 51{\cdot}515\, Log \frac{T_2}{T_3}. \tag{45}$$

Hieraus erhält man nach einander folgende Näherungswerthe:

$$\begin{aligned} t' &= 99{\cdot}24^0 \\ t'' &= 101{\cdot}93 \\ t''' &= 101{\cdot}74 \\ t'''' &= 101{\cdot}76. \end{aligned}$$

Den letzten dieser Werthe, von welchem die späteren nur noch in höheren Decimalen abweichen würden, betrachten wir als den richtigen Werth von t_3, und wenden ihn zusammen mit den bekannten Werthen von t_1 und t_0 auf die erste der Gleichungen (32) an. Dadurch kommt:

$$W = 31\,080.$$

Berechnet man unter Voraussetzung desselben Werthes von V die Arbeit nach der Pambour'schen Gleichung (18), wobei man aber die Werthe von B und b nicht, wie bei der Maschine ohne Condensator, aus der Gleichung (11 b), sondern aus der für Maschinen mit Condensator bestimmten Gleichung (11 a) entnehmen muss, so findet man:

$$W = 32\,640.$$

§. 26. Zusammenstellung verschiedener Fälle in Bezug auf den Gang der Maschine.

In derselben Weise, wie es für das Volumen 1·5 hier angedeutet ist, habe ich auch für die Volumina 1·2, 1·8 und 2·1 die Arbeit berechnet. Ausserdem habe ich, um den Einfluss, welchen die verschiedenen Unvollkommenheiten der Maschine auf die Grösse

der Arbeit ausüben, an einem Beispiele übersichtlich zusammenstellen zu können, noch folgende Fälle hinzugefügt.

1) Den Fall einer Maschine, welche keinen schädlichen Raum hat, und bei welcher ausserdem der Druck im Cylinder während des Einströmens gleich dem im Kessel ist, und die Expansion so weit getrieben wird, bis der Druck von seinem ursprünglichen Werthe p_1 bis p_0 abgenommen hat. Dieses ist, wenn wir nur noch annehmen, dass p_0 genau den Druck im Condensator darstelle, der Fall, auf welchen sich die Gleichung (9) bezieht, und welcher für eine gegebene Wärmemenge, wenn auch die Temperaturen der Wärmeaufnahme und Wärmeabgabe als gegeben betrachtet werden, die grösstmögliche Arbeit liefert.

2) Den Fall einer Maschine, bei welcher wieder kein schädlicher Raum vorkommt, und der Druck im Cylinder gleich dem im Kessel ist, aber die Expansion nicht wie vorher vollständig, sondern nur im Verhältnisse von $e : 1$ stattfindet. Dieses ist der Fall, auf welchen sich die Gleichung (6) bezieht, nur dass dort, um die Grösse der Expansion zu bestimmen, die durch die Expansion bewirkte Temperaturänderung des Dampfes als bekannt vorausgesetzt wurde, während hier die Expansion dem Volumen nach bestimmt ist, und die Temperaturänderung daraus erst berechnet werden muss.

3) Den Fall einer Maschine mit schädlichem Raume und unvollständiger Expansion, bei welcher von den vorigen günstigen Bedingungen nur noch die besteht, dass der Dampf im Cylinder während des Einströmens denselben Druck ausübt, wie im Kessel, so dass also das Volumen den kleinstmöglichen Werth hat.

An diesen Fall schliessen sich endlich die schon erwähnten an, in welchen auch die letzte günstige Bedingung fortgefallen ist, indem das Volumen statt des kleinstmöglichen Werthes andere gegebene Werthe hat.

Alle diese Fälle sind zur Vergleichung auch nach der Pambour'schen Theorie berechnet, mit Ausnahme des ersten, für welchen die Gleichungen (11a) und (11b) nicht ausreichen, indem selbst diejenige unter ihnen, welche für geringeren Druck bestimmt ist, doch nur bis zu $^1/_2$ oder höchstens $^1/_3$ Atmosphäre abwärts angewandt werden darf, während hier der Druck bis zu $^1/_5$ Atmosphäre abnehmen soll.

Die für diesen ersten Fall aus unseren Gleichungen hervorgehenden Zahlen sind folgende:

Volumen vor der Expansion	Volumen nach der Expansion	W
0·3637	6·345	50 460

Für alle übrigen Fälle sind die Resultate in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst, wobei wieder die auf die Maschine ohne schädlichen Raum bezüglichen Zahlen von den anderen durch einen Strich getrennt sind. Für das Volumen sind nur die nach der Expansion gültigen Zahlen angeführt, weil die Werthe vor der Expansion sich daraus von selbst ergeben, indem sie in allen Fällen in dem Verhältnisse von e : 1 oder von 0·36667 : 1 kleiner sind.

				nach Pambour	
V	t_2	t_3	W	V	W
0·992	152·22°	113·71°	34 300	1·032	36 650
1·010	152·22°	113·68°	32 430	1·032	34 090
1·2	145·63	108·38	31 870	1·2	33 570
1·5	137·43	101·76	31 080	1·5	32 640
1·8	131·02	96·55	30 280	1·8	31 710
2·1	125·79	92·30	29 490	2·1	30 780

§. 27. Zurückführung der Arbeit auf eine von der Wärmequelle gelieferte Wärmeeinheit.

Die in dieser Tabelle angeführten Arbeitsgrössen, ebenso wie diejenigen der früheren Tabelle für die Maschine ohne Condensator, beziehen sich auf ein Kilogramm aus dem Kessel tretenden Dampfes. Man kann aber hiernach die Arbeit auch leicht auf eine von der Wärmequelle gelieferte *Wärmeeinheit* beziehen, wenn man bedenkt, dass für jedes Kilogramm Dampf so viel Wärme geliefert werden muss, wie nöthig ist, um die Masse l, welche etwas grösser als 1 Kilogramm ist, von ihrer Anfangstemperatur, mit

welcher sie in den Kessel tritt, bis zu der im Kessel selbst herrschenden Temperatur zu erwärmen, und bei dieser letzteren ein Kilogramm in Dampf zu verwandeln, welche Wärmemenge sich aus den bisherigen Daten berechnen lässt.

§. 28. Berücksichtigung der Reibung.

Zum Schluss dieser numerischen Bestimmungen muss ich noch einige Worte über die *Reibung* hinzufügen, wobei ich mich aber darauf beschränken will, mein Verfahren, dass ich die Reibung in den bisher entwickelten Gleichungen ganz unberücksichtigt gelassen habe, zu rechtfertigen, indem ich zeige, dass man die Reibung, anstatt sie, wie es Pambour gethan hat, gleich in die ersten allgemeinen Ausdrücke der Arbeit mit einzuflechten, nach denselben Principien auch nachträglich in Rechnung bringen kann, was übrigens in gleicher Weise auch von anderen Autoren geschehen ist.

Die Kräfte, welche die Maschine bei ihrem Gange zu überwinden hat, lassen sich folgendermaassen unterscheiden. 1) Der Widerstand, welcher ihr von aussen entgegengestellt wird, und dessen Ueberwindung die von ihr verlangte *nützliche* Arbeit bildet. Pambour nennt diesen Widerstand die *Belastung* (*charge*) der Maschine. 2) Die Widerstände, welche in der Maschine selbst ihren Grund haben, so dass die zu ihrer Ueberwindung verbrauchte Arbeit nicht äusserlich nutzbar wird. Diese letzteren Widerstände fassen wir alle unter dem Namen der *Reibung* zusammen, obwohl ausser der Reibung im engeren Sinne auch noch andere Kräfte unter ihnen vorkommen, besonders die Widerstände der zur Dampfmaschine gehörigen Pumpen, mit Ausnahme derjenigen, welche den Kessel speist, und welche im Früheren schon mit betrachtet ist.

Beide Arten von Widerständen bringt Pambour als Kräfte, welche sich der Bewegung des Stempels widersetzen, in Rechnung, und um sie mit den Druckkräften des an beiden Seiten des Stempels befindlichen Dampfes bequem vereinigen zu können, wählt er auch die Bezeichnung ähnlich, wie es beim Dampfdrucke geschieht, nämlich so, dass das Zeichen nicht die ganze Kraft, sondern den auf eine Flächeneinheit des Stempels kommenden Theil

derselben bedeutet. In diesem Sinne stelle der Buchstabe R die Belastung dar.

Bei der Reibung muss noch ein weiterer Unterschied gemacht werden. Die Reibung hat nämlich nicht für jede Maschine einen constanten Werth, sondern wächst mit der Belastung. Pambour zerlegt sie daher in zwei Theile, den, welcher schon vorhanden ist, wenn die Maschine ohne Belastung geht, und den, welcher erst durch die Belastung hinzukommt. Von letzterem nimmt er an, dass er der Belastung proportional sei. Demgemäss drückt er die Reibung, auf die Flächeneinheit bezogen, durch

$$f + \delta \cdot R$$

aus, worin f und δ Grössen sind, die zwar von der Einrichtung und den Dimensionen der Maschine abhängen, aber für eine bestimmte Maschine nach Pambour als constant zu betrachten sind.

Wir können nun die Arbeit der Maschine statt, wie bisher, auf die *treibende* Kraft des Dampfes, auch auf diese *widerstehenden* Kräfte beziehen, denn die von diesen gethane negative Arbeit muss gleich der von jener gethanen positiven sein, weil sonst eine Beschleunigung oder Verzögerung des Ganges eintreten würde, was der gemachten Voraussetzung, nach welcher der Gang gleichmässig sein soll, widerspricht. Die Stempelfläche beschreibt, während eine Gewichtseinheit Dampf in den Cylinder tritt, den Raum $(1 - \varepsilon) V$, und man erhält daher für die Arbeit W den Ausdruck:

$$W = (1 - \varepsilon) V [(1 + \delta) R + f].$$

Der *nutzbare* Theil dieser Arbeit dagegen, welcher zum Unterschiede von der ganzen Arbeit mit (W) bezeichnet werden möge, wird durch den Ausdruck:

$$(W) = (1 - \varepsilon) V \cdot R$$

dargestellt. Eliminirt man aus dieser Gleichung vermittelst der vorigen die Grösse R, so kommt:

$$(46) \qquad (W) = \frac{W - (1 - \varepsilon) V \cdot f}{1 + \delta}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man, da die Grösse V als bekannt vorauszusetzen ist, aus der ganzen Arbeit W die nützliche Arbeit (W) ableiten, sobald die Grössen f und δ gegeben sind.

Auf die Art, wie Pambour die letzteren bestimmt, will ich hier nicht eingehen, da diese Bestimmung noch auf zu unsicheren Grundlagen beruht, und die Reibung überhaupt dem eigentlichen Gegenstande dieses Abschnittes fremd ist.

§. 29. Allgemeine Betrachtung der Vorgänge in thermodynamischen Maschinen und Zurückführung derselben auf Kreisprocesse.

Nachdem wir im Vorigen die Dampfmaschine in der Weise behandelt haben, dass wir alle in ihr stattfindenden Vorgänge verfolgt, die dabei geleisteten positiven oder negativen Arbeitsgrössen einzeln bestimmt und diese dann zu einer algebraischen Summe vereinigt haben, wollen wir nun die thermodynamischen Maschinen von allgemeineren Gesichtspunkten aus betrachten.

Der Ausdruck, dass *die Wärme eine Maschine treibt*, ist natürlich nicht auf die Wärme unmittelbar zu beziehen, sondern ist so zu verstehen, dass irgend ein in der Maschine vorhandener Stoff in Folge der Veränderungen, welche er durch die Wärme erleidet, die Maschinentheile in Bewegung setzt. Wir wollen diesen Stoff den *die Wirkung der Wärme vermittelnden* Stoff nennen.

Wenn nun eine fortwährend wirkende Maschine in gleichmässigem Gange ist, so finden alle dabei vorkommenden Veränderungen periodisch statt, so dass derselbe Zustand, in welchem sich zu einer gewissen Zeit die Maschine mit allen ihren einzelnen Theilen befindet, in gleichen Intervallen regelmässig wiederkehrt. Demnach muss auch der die Wirkung der Wärme vermittelnde Stoff in solchen regelmässig wiederkehrenden Momenten in gleicher Menge in der Maschine vorhanden sein, und sich in gleichem Zustande befinden. Diese Bedingung kann auf zwei verschiedene Arten erfüllt werden.

Erstens kann ein und dasselbe ursprünglich in der Maschine befindliche Quantum dieses Stoffes immer in ihr bleiben, wobei dann die Zustandsänderungen, welche dieser Stoff während des Ganges erleidet, so stattfinden müssen, dass er mit dem Ende jeder Periode wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, und dann denselben Cyclus von Veränderungen von Neuem beginnt.

Zweitens kann die Maschine jedesmal den Stoff, welcher während einer Periode zur Hervorbringung der Wirkung gedient hat, nach aussen abgeben, und dafür ebenso viel Stoff von derselben Art von aussen wieder aufnehmen.

Dieses letztere Verfahren ist bei den in der Praxis angewandten Maschinen das gewöhnlichere. Es findet z. B. bei den calorischen

Luftmaschinen, wie sie bis jetzt construirt sind, Anwendung, indem nach jedem Hube die Luft, welche im Treibcylinder den Stempel bewegt hat, in die Atmosphäre ausgetrieben, und dafür vom Speisecylinder eine gleiche Quantität Luft aus der Atmosphäre geschöpft wird. Ebenso bei den Dampfmaschinen ohne Condensator, bei welchen auch der Dampf aus dem Cylinder in die Atmosphäre tritt, und dafür aus einem Reservoir neues Wasser in den Kessel gepumpt wird.

Ferner findet es wenigstens eine theilweise Anwendung auch bei den Dampfmaschinen mit Condensator von gewöhnlicher Einrichtung. Bei diesen wird das aus dem Dampfe niedergeschlagene Wasser zwar zum Theil in den Kessel zurückgepumpt, aber nicht alles, weil es mit dem Kühlwasser gemischt ist, und von diesem daher auch ein Theil in den Kessel kommt. Der nicht wieder angewandte Theil des niedergeschlagenen Wassers muss mit dem übrigen Theile des Kühlwassers zusammen fortgeschafft werden.

Das erstere Verfahren hat bisher nur bei wenigen Maschinen Anwendung gefunden, unter anderen bei solchen Dampfmaschinen, welche durch zwei verschiedene Dämpfe, z. B. Wasser- und Aetherdampf, getrieben werden [1]). In diesen wird der Wasserdampf nur durch die Berührung mit Metallröhren, welche inwendig mit flüssigem Aether gefüllt sind, niedergeschlagen, und dann vollständig wieder in den Kessel zurückgepumpt. Ebenso wird der Aetherdampf in Metallröhren, die nur auswendig von kaltem Wasser umspült sind, niedergeschlagen, und dann in den ersten Raum, der zur Verdampfung des Aethers dient, zurückgepumpt. Es braucht daher, um den gleichmässigen Gang zu erhalten, nur so viel Wasser und Aether neu zugeführt zu werden, wie etwa wegen Unvollkommenheit der Construction durch die Fugen entweicht.

In einer Maschine dieser Art, in welcher dieselbe Masse immer wieder von Neuem angewandt wird, müssen, wie oben gesagt, die verschiedenen Veränderungen, welche die Masse während einer Periode erleidet, einen in sich geschlossenen Cyclus oder nach der Bezeichnung, welche ich in meinen Abhandlungen gewählt habe, einen *Kreisprocess* bilden.

Solche Maschinen dagegen, bei denen ein periodisches Aufnehmen und Wiederausscheiden von Massen stattfindet, sind dieser Bedingung nicht nothwendig unterworfen. Dessen ungeachtet

---

1) *Annales des Mines T. IV. (1853), p. 203 u. 281.*

können auch sie dieselbe erfüllen, indem sie die Massen in demselben Zustande wieder ausscheiden, in welchem sie sie aufgenommen haben. Dieses ist der Fall bei den Dampfmaschinen mit Condensator, bei denen das Wasser im flüssigen Zustande und mit derselben Temperatur, mit der es aus dem Condensator in den Kessel getreten war, später aus dem Condensator fortgeschafft wird. Das Kühlwasser, welches kalt in den Condensator ein- und warm wieder austritt, kommt dabei nicht in Betracht, weil es nicht zu dem die Wirkung der Wärme vermittelnden Stoffe gehört, sondern als eine negative Wärmequelle dient.

Bei anderen Maschinen ist der Zustand beim Austritte von demjenigen beim Eintritte verschieden. Die calorischen Luftmaschinen z. B., selbst wenn sie mit einem Regenerator versehen sind, treiben die Luft mit einer Temperatur, die höher ist, als die Eintrittstemperatur, in die Atmosphäre zurück, und die Dampfmaschinen ohne Condensator nehmen das Wasser tropfbar flüssig auf, und lassen es dampfförmig wieder ausströmen. In diesen Fällen findet zwar kein vollständiger Kreisprocess statt, indessen kann man sich immer zu der wirklich vorhandenen Maschine noch eine zweite hinzudenken, welche die Masse aus der ersten Maschine aufnimmt, sie auf irgend eine Weise in den Anfangszustand zurückbringt, und dann erst entweichen lässt. Beide Maschinen zusammen können dann als Eine Maschine betrachtet werden, welche wieder der obigen Bedingung genügt. In manchen Fällen kann diese Vervollständigung geschehen, ohne dass dadurch eine grössere Complication für die Untersuchungen eintritt. So kann man sich z. B. eine Dampfmaschine ohne Condensator, wenn man nur annimmt, dass sie mit Wasser von 100° gespeist werde, ohne Weiteres durch eine Maschine mit einem Condensator, dessen Temperatur 100° ist, ersetzt denken.

Demnach kann man unter der Voraussetzung, dass die Maschinen, welche jene Bedingung nicht schon von selbst erfüllen, in dieser Weise für die Betrachtung vervollständigt seien, auf alle thermodynamischen Maschinen die für die Kreisprocesse geltenden Sätze anwenden, und dadurch gelangt man zu einigen Schlüssen, welche von der besonderen Natur der in den einzelnen Maschinen stattfindenden Vorgänge ganz unabhängig sind.

§. 30. Gleichungen für die durch einen beliebigen Kreisprocess geleistete Arbeit.

Für jeden Kreisprocess gelten den früheren Entwickelungen gemäss, als analytische Ausdrücke der beiden Hauptsätze, nachdem der letztere so erweitert ist, dass er auch die nicht umkehrbaren Veränderungen umfasst, folgende zwei Gleichungen:

$$(47) \qquad \begin{cases} W = Q \\ \int \frac{dQ}{T} = -N, \end{cases}$$

worin N die während des Kreisprocesses eingetretene uncompensirte Verwandlung bedeutet, welche nur positiv sein kann und bei umkehrbaren Kreisprocessen den Grenzwerth Null hat.

Wenden wir diese Gleichungen auf denjenigen Kreisprocess an, welcher in der thermodynamischen Maschine während einer Periode stattfindet, so sieht man zunächst, dass, wenn die ganze Wärmemenge, welche der die Wirkung der Wärme vermittelnde Stoff während dieser Zeit aufgenommen hat, gegeben ist, dann durch die erste Gleichung unmittelbar auch die Arbeit bestimmt ist, ohne dass die Natur der Vorgänge selbst, aus denen der Kreisprocess besteht, bekannt zu sein braucht.

In ähnlicher Allgemeinheit kann man durch die Verbindung beider Gleichungen die Arbeit auch noch aus anderen Daten bestimmen.

Wir wollen annehmen, es seien die Wärmemengen, welche der veränderliche Körper nach einander empfängt, sowie die Temperaturen, welche er bei der Aufnahme einer jeden hat, gegeben, und nur Eine Temperatur T_0 sei übrig, bei welcher dem Körper noch eine Wärmemenge mitgetheilt, oder, wenn sie negativ ist, entzogen wird, deren Grösse nicht im Voraus bekannt ist. Die Summe aller bekannten Wärmemengen heisse Q_1, und die unbekannte Wärmemenge Q_0.

Dann zerlege man das in der zweiten Gleichung vorkommende Integral in zwei Theile, von denen der eine sich nur über die bekannte Wärmemenge Q_1 und der andere über die unbekannte Q_0 erstreckt. Im letzten Theile lässt sich, da in ihm T einen constanten Werth T_0 hat, die Integration sogleich ausführen, und giebt den Ausdruck:

$$\frac{Q_0}{T_0}.$$

Dadurch geht die zweite Gleichung über in:

$$\int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T} + \frac{Q_0}{T_0} = -N,$$

woraus folgt:

$$Q_0 = -T_0 \cdot \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T} - T_0 \cdot N.$$

Ferner hat man nach der ersten Gleichung, da für unseren Fall $Q = Q_1 + Q_0$ ist:

$$W = Q_1 + Q_0.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für Q_0 den eben gefundenen Werth, so kommt:

$$(48) \qquad W = Q_1 - T_0 \cdot \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T} - T_0 \cdot N.$$

Wird insbesondere angenommen, dass der ganze Kreisprocess umkehrbar sei, so ist dem Obigen nach $N = 0$, und dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$(49) \qquad W = Q_1 - T_0 \cdot \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem vorigen nur durch das Glied $-T_0 N$. Da nun N nur positiv sein kann, so kann dieses Glied nur negativ sein, und man sieht daraus, was sich auch durch unmittelbare Betrachtung leicht ergiebt, dass man unter den oben in Bezug auf die Wärmemittheilung festgestellten Bedingungen die grösstmögliche Arbeit erhält, wenn der ganze Kreisprocess umkehrbar ist, und dass durch jeden Umstand, welcher bewirkt, dass einer der in dem Kreisprocesse stattfindenden Vorgänge nicht umkehrbar ist, die Grösse der Arbeit abnimmt.

Die Gleichung (48) führt hiernach zu dem gesuchten Werthe der Arbeit auf einem Wege, welcher dem gewöhnlichen gerade entgegengesetzt ist, indem man nicht, wie sonst, die während der verschiedenen Vorgänge gethanen Arbeitsgrössen einzeln bestimmt und dann addirt, sondern von dem Maximum der Arbeit ausgeht, und die durch die einzelnen Unvollkommenheiten des Processes entstandenen Arbeitsverluste davon abzieht. Man kann dieses Verfahren das *Subtractionsverfahren* nennen.

Macht man in Bezug auf die Mittheilung der Wärme die beschränkende Bedingung, dass auch die ganze Wärmemenge Q_1 dem Körper bei einer bestimmten Temperatur T_1 mitgetheilt werde, so lässt sich der diese Wärmemenge umfassende Theil des Integrals ebenfalls ohne Weiteres ausführen, und giebt:

$$\frac{Q_1}{T_1},$$

wodurch die für das Maximum der Arbeit geltende Gleichung (49) folgende Form annimmt:

$$W = Q_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1}. \tag{50}$$

§. 31. Anwendung der vorigen Gleichungen auf den Grenzfall, in welchem der in der Dampfmaschine stattfindende Kreisprocess umkehrbar ist.

Unter den weiter oben betrachteten Fällen in Bezug auf den Gang der Dampfmaschine kommt auch ein Grenzfall vor, den man zwar in der Wirklichkeit nicht erreichen kann, dem man sich aber so weit, wie möglich, zu nähern sucht, nämlich der Fall, wo kein schädlicher Raum vorhanden ist, wo ferner im Cylinder derselbe Druck herrscht wie im Kessel resp. im Condensator, und wo endlich die Expansion so weit geht, dass sich der Dampf dadurch von der Kesseltemperatur bis zur Condensatortemperatur abkühlt.

In diesem Falle ist der Kreisprocess in allen seinen Theilen umkehrbar. Man kann sich denken, dass im Condensator bei der Temperatur T_0 die Verdampfung stattfinde, und die Masse M, wovon der Theil m_0 dampfförmig und der Theil $M - m_0$ tropfbar flüssig sei, in den Cylinder trete, und den Stempel in die Höhe treibe, dass dann beim Niedergange des Stempels der Dampf zuerst soweit comprimirt werde, bis seine Temperatur auf T_1 gestiegen sei, und darauf in den Kessel gepresst werde, und dass endlich mittelst der kleinen Pumpe die Masse M wieder als tropfbare Flüssigkeit aus dem Kessel in den Condensator geschafft werde, und sich bis zur Anfangstemperatur T_0 abkühle. Hierbei durchläuft der Stoff dieselben Zustände, wie früher, nur in umgekehrter Reihenfolge. Die Wärmemittheilungen oder Wärmeentziehungen finden in entgegengesetztem Sinne, aber in derselben Grösse und bei denselben Temperaturen der Masse statt, und alle

Arbeitsgrössen haben entgegengesetzte Vorzeichen, aber dieselben numerischen Werthe.

Daraus folgt, dass in diesem Falle in dem Kreisprocesse keine uncompensirte Verwandlung vorkommt. Man hat daher in der Gleichung (48) $N = 0$ zu setzen, und bekommt dadurch die schon unter (49) angeführte Gleichung, in welcher nur noch, zur besseren Uebereinstimmung mit dem Früheren, W' statt W zu schreiben ist:

$$W' = Q_1 - T_0 \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T}.$$

Hierin bedeutet Q_1 für unseren Fall die der Masse M im Dampfkessel mitgetheilte Wärme, durch welche M als Flüssigkeit von T_0 bis T_1 erwärmt und dann der Theil m_1 in Dampf verwandelt wird, und es ist daher:

$$Q_1 = m_1 \varrho_1 + MC(T_1 - T_0). \tag{51}$$

Bei der Bestimmung des Integrales $\int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T}$ müssen die beiden einzelnen in Q_1 enthaltenen Wärmemengen $MC(T_1 - T_0)$ und $m_1 \varrho_1$ besonders betrachtet werden. Um für die erstere die Integration auszuführen, schreibe man das Wärmeelement dQ in der Form $MCdT$, dann lautet dieser Theil des Integrales:

$$MC \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = MC \log \frac{T_1}{T_0}.$$

Während der Mittheilung der letzteren Wärmemenge ist die Temperatur constant gleich T_1, und der auf diese Wärmemenge bezügliche Theil des Integrales ist daher einfach:

$$\frac{m_1 \varrho_1}{T_1}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe geht der vorige Ausdruck von W' in den folgenden über:

$$W' = m_1 \varrho_1 + MC(T_1 - T_0) - T_0 \left(\frac{m_1 \varrho_1}{T_1} + MC \log \frac{T_1}{T_0} \right)$$
$$= m_1 \varrho_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1} + MC \left(T_1 - T_0 + T_0 \log \frac{T_0}{T_1} \right),$$

und dieses ist in der That der in Gleichung (9) enthaltene Ausdruck, welchen wir in §. 4 und 5 durch die successive Bestimmung der einzelnen während des Kreisprocesses gethanen Arbeitsgrössen gefunden haben.

§. 32. Andere Form des letzten Ausdruckes.

Es wurde im vorigen Paragraphen erwähnt, dass die beiden nach Gleichung (51) in Q_1 enthaltenen Wärmemengen $m_1 \varrho_1$ und $MC(T_1 - T_0)$ bei der Berechnung der Arbeit verschieden behandelt werden müssen, weil die eine dem die Wirkung der Wärme vermittelnden Stoffe bei einer bestimmten Temperatur T_1 und die andere bei allmälig von T_0 bis T_1 steigender Temperatur mitgetheilt wird. Demgemäss kommen diese beiden Wärmemengen auch in dem Ausdrucke der Arbeit in verschiedener Weise vor, was noch deutlicher ersichtlich wird, wenn wir die letzte Gleichung in folgender Form schreiben:

$$(52)\qquad W' = m_1 \varrho_1 \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_1} + MC(T_1 - T_0) \cdot \left(1 + \frac{T_0}{T_1 - T_0} \log \frac{T_0}{T_1}\right).$$

Hierin ist die Wärmemenge $m_1 \varrho_1$ mit dem in Gleichung (50) vorkommenden Factor

$$\frac{T_1 - T_0}{T_1},$$

die andere Wärmemenge $MC(T_1 - T_0)$ mit dem Factor

$$1 + \frac{T_0}{T_1 - T_0} \log \frac{T_0}{T_1}$$

multiplicirt. Um diese beiden Factoren bequemer mit einander vergleichen zu können, wollen wir den letzteren etwas umgestalten. Führen wir nämlich zur Abkürzung den Buchstaben z mit der Bedeutung

$$(53)\qquad z = \frac{T_1 - T_0}{T_1}$$

ein, so ist:

$$\frac{T_0}{T_1 - T_0} = \frac{1 - z}{z}$$

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 - z,$$

und wir erhalten daher:

$$1 + \frac{T_0}{T_1 - T_0} \log \frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{1 - z}{z} \log (1 - z)$$

$$= 1 - \frac{1 - z}{z}\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^3}{3.4} + \text{etc.}$$

Dadurch geht die Gleichung (52) oder (9) über in:

$$(54) \quad W' = m_1 \varrho_1 . z + MC(T_1 - T_0) . z \left(\frac{1}{1.2} + \frac{z}{2.3} + \frac{z^2}{3.4} + \text{etc.} \right).$$

Der Werth der in Klammern geschlossenen unendlichen Reihe, welche den Factor der Wärmemenge $MC(T_1 - T_0)$ von dem der Wärmemenge $m_1 \varrho_1$ unterscheidet, variirt, wie man sich leicht überzeugt, während z von 0 bis 1 wächst, zwischen $1/2$ und 1.

§. 33. Berücksichtigung der Temperatur der Wärmequelle.

Da, wie in §. 31 gezeigt wurde, unter den gemachten Voraussetzungen der beim Gange der Maschine periodisch durchlaufene Kreisprocess in allen seinen Theilen *umkehrbar* ist, und da ein *umkehrbarer* Kreisprocess das Maximum der erreichbaren Arbeit liefert, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Temperaturen, bei welchen der die Wirkung der Wärme vermittelnde Stoff die von der Wärmequelle gelieferte Wärme aufnimmt, oder Wärme nach aussen abgiebt, als im Voraus gegeben betrachtet werden, dann ist die Dampfmaschine unter den bei der Ableitung der Gleichung (9) resp. (52) gemachten Voraussetzungen, eine *vollkommene* Maschine, indem sie für eine bestimmte ihr mitgetheilte Wärmemenge eine so grosse Arbeit liefert, wie nach der mechanischen Wärmetheorie bei denselben Temperaturen überhaupt möglich ist.

Anders verhält es sich aber, *wenn man auch jene Temperaturen nicht als im Voraus gegeben, sondern als ein veränderliches Element betrachtet, welches bei der Beurtheilung der Maschine mit berücksichtigt werden muss.*

Darin, dass die Flüssigkeit während ihrer Erwärmung und Verdampfung viel niedrigere Temperaturen, als das Feuer, hat, und also die Wärme, welche ihr mitgetheilt wird, dabei von höheren zu niederen Temperaturen übergehen muss, liegt eine in N nicht mit einbegriffene uncompensirte Verwandlung, welche in Bezug auf die Nutzbarmachung der Wärme einen grossen Verlust zur Folge hat. Die Arbeit, welche bei der Dampfmaschine aus der Wärmemenge $m_1 \varrho_1 + MC(T_1 - T_0) = Q_1$ gewonnen werden kann, ist, wie man aus Gleichung (54) ersieht, etwas kleiner als

$$Q_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1}.$$

Nehmen wir nun aber an, es könne so eingerichtet werden, dass der die Wirkung der Wärme vermittelnde Stoff bei der Wärmeaufnahme in jedem Augenblicke dieselbe Temperatur habe, wie die Bestandtheile des Feuers, welche die Wärme liefern, und bezeichnen den betreffenden Mittelwerth dieser Temperatur mit T', während wir die Temperatur der Wärmeabgabe, wie bisher, mit T_0 bezeichnen, so würde unter diesen Umständen die von der Wärmemenge Q_1 möglicherweise zu gewinnende Arbeit nach Gleichung (50) durch

$$Q_1 \frac{T' - T_0}{T'}$$

dargestellt werden.

Um die Werthe dieser Ausdrücke in einigen Beispielen vergleichen zu können, sei die Temperatur t_0 des Condensators zu 50° C. festgesetzt, und für den Kessel seien die Temperaturen 110°, 150° und 180° C. angenommen, von denen die beiden ersten ungefähr der Niederdruckmaschine und der gewöhnlichen Hochdruckmaschine entsprechen, und die letzte etwa als die Grenze der bis jetzt in der Praxis bei den Dampfmaschinen angewandten Temperaturen zu betrachten ist. Für diese Fälle hat der von den Temperaturen abhängige Bruch folgende Werthe:

t_1	110°	150°	180°
$\frac{T_1 - T_0}{T_1}$	0·157	0·236	0·287

wogegen der entsprechende Werth des Bruches, welcher T' enthält, wenn wir beispielsweise t' zu 1000° C. annehmen, gleich 0·746 ist.

Es ist somit leicht zu erkennen, was schon S. Carnot, und nach ihm viele andere Autoren ausgesprochen haben, dass man, um die durch Wärme getriebenen Maschinen vortheilhafter einzurichten, hauptsächlich darauf bedacht sein muss, das Temperaturintervall $T_1 - T_0$ zu erweitern.

So ist z. B. von den calorischen Luftmaschinen nur dann zu erwarten, dass sie einen wesentlichen Vortheil vor den Dampfmaschinen erlangen, wenn es gelingt, sie bei bedeutend höheren Temperaturen arbeiten zu lassen, als die Dampfmaschinen, bei welchen die Gefahr der Explosion die Anwendung zu hoher Tem-

peraturen verbietet. Derselbe Vortheil lässt sich aber auch mit überhitztem Dampfe erreichen, denn sobald der Dampf von der Flüssigkeit getrennt ist, kann man ihn ebenso gefahrlos noch weiter erhitzen, wie ein permanentes Gas. Maschinen, welche den Dampf in diesem Zustande anwenden, können manche Vortheile der Dampfmaschinen mit denen der Luftmaschinen vereinigen, und es ist daher von ihnen wohl eher ein praktischer Erfolg zu erwarten, als von den Luftmaschinen.

Bei den oben erwähnten Maschinen, in welchen ausser dem Wasser noch eine zweite flüchtigere Substanz angewandt wird, ist das Intervall $T_1 - T_0$ dadurch erweitert, dass T_0 erniedrigt ist. Man hat auch schon daran gedacht, auf dieselbe Weise das Intervall auch nach der oberen Seite hin zu erweitern, indem man noch eine dritte Flüssigkeit hinzufügte, welche weniger flüchtig wäre, als das Wasser. Dann würde also das Feuer unmittelbar die am wenigsten flüchtige der drei Substanzen verdampfen, diese durch ihren Niederschlag die zweite, und diese die dritte. Dem Principe nach ist nicht daran zu zweifeln, dass diese Verbindung vortheilhaft sein würde; wie gross aber die praktischen Schwierigkeiten sein würden, welche sich der Ausführung entgegen stellten, lässt sich natürlich im Voraus nicht übersehen.

§. 34. Beispiel von der Anwendung des Subtractionsverfahrens.

Ausser der eben besprochenen Unvollkommenheit der gewöhnlichen Dampfmaschinen, welche in ihrem Wesen selbst begründet ist, leiden diese Maschinen, wie schon erwähnt, noch an manchen anderen Unvollkommenheiten, welche mehr der praktischen Ausführung zuzuschreiben sind, und von denen einige in unseren obigen zur Bestimmung der Arbeit ausgeführten Entwickelungen in Rechnung gebracht wurden. Wir wollen nun zum Schlusse noch zeigen, wie man bei Maschinen, die mit solchen Unvollkommenheiten behaftet sind, die Arbeit auch durch das in §. 30 angegebene Subtractionsverfahren bestimmen kann. Um aber bei dieser Betrachtung, welche nur ein Beispiel von der Ausführung dieses Verfahrens geben soll, nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir uns darauf beschränken, zwei solche Unvollkommenheiten zu berücksichtigen, nämlich das Vorhandensein des schädlichen Raumes und den

Unterschied zwischen dem Dampfdrucke im Cylinder während des Einströmens und dem im Kessel herrschenden Drucke. Dagegen wollen wir die Expansion als vollständig voraussetzen, so dass die mit T_3 bezeichnete Endtemperatur der Expansion gleich der Condensatortemperatur T_0 ist, und auch die Temperaturen T'_0 und T''_0 wollen wir gleich T_0 setzen.

Das anzuwendende Verfahren beruht auf der Gleichung (48), welche, wenn wir die Arbeit jetzt mit W' bezeichnen, lautet:

$$W' = Q_1 - T_0 \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T} - T_0 . N.$$

Hierin stellen die beiden ersten an der rechten Seite stehenden Glieder

$$Q_1 - T_0 \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{T}$$

das Maximum der Arbeit dar, welches dem Falle entspricht, wo der Kreisprocess umkehrbar ist, und das Product $T_0 N$ stellt den Arbeitsverlust dar, welcher von den Unvollkommenheiten herrührt, die die Nichtumkehrbarkeit des Kreisprocesses bewirken.

Für jenes Maximum der Arbeit haben wir den auf die Dampfmaschine bezüglichen Ausdruck schon in §. 31 abgeleitet, nämlich:

$$m_1 \varrho_1 + MC(T_1 - T_0) - T_0 \left(\frac{m_1 \varrho_1}{T_1} + MC \log \frac{T_1}{T_0} \right).$$

Es braucht also nur noch die Grösse N, die im Kreisprocesse eintretende uncompensirte Verwandlung, bestimmt zu werden.

Diese uncompensirte Verwandlung entsteht beim Einströmen des Dampfes in den schädlichen Raum und den Cylinder, und die Data zu ihrer Bestimmung sind schon in §. 10 gegeben, wo wir durch die Annahme, dass die eingeströmte Masse sofort wieder in den Kessel zurückgepresst und auch im Uebrigen Alles in umkehrbarer Weise wieder in den Anfangszustand gebracht werde, zu einem besonderen Kreisprocess gelangten, für welchen wir alle der veränderlichen Masse mitgetheilten Wärmemengen bestimmten, und auf welchen wir jetzt die Gleichung:

$$N = -\int \frac{dQ}{T}$$

anwenden können.

Jene mitgetheilten, theils positiven, theils negativen Wärmemengen sind:

$m_1 \varrho_1, - m_2 \varrho_2, \mu_0 \varrho_0, MC(T_1 - T_2)$ und $-\mu C(T_2 - T_0)$.
Die drei ersten werden bei den constanten Temperaturen T_1, T_2 und T_0 mitgetheilt, und die betreffenden Theile des Integrales lauten:

$$\frac{m_1 \varrho_1}{T_1}, \quad - \frac{m_2 \varrho_2}{T_2} \text{ und } \frac{\mu_0 \varrho_0}{T_0}.$$

Die beiden letzten werden bei Temperaturen, die sich zwischen T_2 und T_1 und zwischen T_2 und T_0 stetig ändern, mitgetheilt und die betreffenden Theile des Integrales lauten:

$$MC \log \frac{T_1}{T_2} \text{ und } -\mu C \log \frac{T_2}{T_0}.$$

Wenn man die Summe dieser Grössen an die Stelle des Integrales setzt, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(55) \qquad N = - \frac{m_1 \varrho_1}{T_1} + \frac{m_2 \varrho_2}{T_2} - MC \log \frac{T_1}{T_2} - \frac{\mu_0 \varrho_0}{T_0} + \mu C \log \frac{T_2}{T_0}.$$

Indem man diesen Ausdruck von N mit T_0 multiplicirt und das Product von dem obigen Ausdrucke des Maximums der Arbeit abzieht, erhält man für W' die Gleichung:

$$(56) \qquad W' = m_1 \varrho_1 - \frac{T_0}{T_2} m_2 \varrho_2 + MC(T_1 - T_0) - (M + \mu) C T_0 \log \frac{T_2}{T_0} + \mu_0 \varrho_0.$$

Um diesen Ausdruck von W' mit dem durch die Gleichungen (28) bestimmten zu vergleichen, setze man den aus der letzten dieser Gleichungen sich ergebenden Werth von $m_3 \varrho_3$ in die erste ein, und setze dann noch $T_3 = T_0$. Mit dem dadurch entstehenden Ausdrucke stimmt der in (56) gegebene vollständig überein.

Auf dieselbe Weise kann man auch den durch die unvollständige Expansion entstandenen Arbeitsverlust in Abzug bringen, indem man die beim Ueberströmen des Dampfes aus dem Cylinder in den Condensator entstehende uncompensirte Verwandlung berechnet, und diese in N mit einbegreift. Durch diese Rechnung, welche wir hier nicht wirklich ausführen wollen, gelangt man ganz zu dem in (28) gegebenen Ausdrucke der Arbeit.

Tabelle, enthaltend die für den Wasserdampf geltenden Werthe des Druckes p, seines Differentialcoefficienten $\frac{dp}{dt} = g$ und des Productes $T \cdot g$ in Millimetern Quecksilber ausgedrückt.

Δ
1222
1244
1265
1286
1314
1326
1348
1372
1390
1412
1440
[illegible]
1476
1502
1529
1550
1570
1599
1619
[illegible]
1670
1688
1714
1743
1763
[illegible]
1814
[illegible]
1861
1889
1919
1941
[illegible]
1991

t in Cent. Graden	*p*	Δ	*g*	Δ	*T . g*	Δ
197	10976·00		231·935		109009	
		233·82		3·795		2020
198	11209·82		235·730		111029	
		237·64		3·840		2048
199	11447·46		239·570		113077	
		241·50		3·885		2077
200	11688·96		243·455		115154	

ABSCHNITT XII.

Die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Grenzen ihrer Wirkung.

§. 1. Gegenstand der Untersuchung.

Der von mir zum Beweise des zweiten Hauptsatzes aufgestellte Grundsatz, *dass die Wärme nicht von selbst (oder ohne Compensation) aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann*, entspricht in einigen besonders einfachen Fällen des Wärmeaustausches der alltäglichen Erfahrung. Dahin gehört erstens die Wärmeleitung, welche immer in dem Sinne vor sich geht, dass die Wärme vom wärmeren Körper oder Körpertheile zum kälteren Körper oder Körpertheile strömt. Was ferner die in gewöhnlicher Weise stattfindende Wärmestrahlung anbetrifft, so ist es freilich bekannt, dass nicht nur der warme Körper dem kalten, sondern auch umgekehrt der kalte Körper dem warmen Wärme zustrahlt, aber das Gesammtresultat dieses gleichzeitig stattfindenden doppelten Wärmeaustausches besteht, wie man als erfahrungsmässig feststehend ansehen kann, immer darin, dass der kältere Körper auf Kosten des wärmeren einen Zuwachs an Wärme erfährt.

Es können aber bei der Strahlung besondere Umstände stattfinden, welche bewirken, dass die Strahlen nicht geradlinig fort-

schreiten, sondern ihre Richtungen ändern, und diese Richtungsänderung kann in der Weise geschehen, dass die sämmtlichen Strahlen eines ganzen Strahlenbündels von endlichem Querschnitte in Einem Punkte zusammentreffen, und hier ihre Wirkung vereinigen. Man kann dieses bekanntlich durch Anwendung eines Brennspiegels oder Brennglases künstlich erreichen, und kann selbst mehrere Brennspiegel oder Brenngläser so aufstellen, dass mehrere von verschiedenen Wärmequellen herstammende Strahlenbündel in Einem Punkte zusammentreffen.

Für Fälle dieser Art existirt keine Erfahrung, welche beweist, dass es unmöglich ist, in dem Concentrationspunkte eine höhere Temperatur zu erhalten, als die Körper, von welchen die Strahlen herstammen, besitzen. Es ist sogar von Rankine bei einer besonderen Veranlassung, von der an einem anderen Orte noch die Rede sein wird, ein eigenthümlicher Schluss gezogen[1]), welcher ganz auf der Ansicht beruht, dass die Wärmestrahlen durch Reflexion in solcher Weise concentrirt werden können, dass in dem dadurch entstehenden Brennpunkte ein Körper zu einer höheren Temperatur erhitzt werden könne, als die Körper haben, welche die Strahlen aussenden.

Wenn diese Ansicht richtig wäre, so müsste der oben erwähnte Grundsatz falsch sein, und der mit Hülfe desselben geführte Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie wäre somit zu verwerfen.

Da ich wünschte, den Grundsatz gegen jeden Zweifel dieser Art zu sichern, und da die Concentration der Wärmestrahlen, mit welcher auch diejenige der Lichtstrahlen in unmittelbarem Zusammenhange steht, ein Gegenstand ist, welcher, auch abgesehen von jener speciellen Frage, in vieler Beziehung Interesse darbietet, so habe ich die Gesetze, denen die Strahlenconcentration unterworfen ist, und den Einfluss, welchen sie auf den unter den Körpern stattfindenden Strahlenaustausch haben kann, einer näheren mathematischen Untersuchung unterworfen, deren Resultate ich im Folgenden mittheilen will.

---

[1]) On the Reconcentration of the Mechanical Energy of the Universe. *Phil. Mag. Ser. IV., Vol. IV., p. 358.*

I. Grund, weshalb die bisherige Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung zweier Flächen für den vorliegenden Fall nicht ausreicht.

§. 2. Beschränkung der Betrachtung auf vollkommen schwarze Körper und auf homogene und unpolarisirte Wärmestrahlen.

Wenn zwei Körper sich in einem für Wärmestrahlen durchdringlichen Mittel befinden, so senden sie einander durch Strahlung Wärme zu. Von den Strahlen, welche auf einen Körper fallen, wird im Allgemeinen ein Theil absorbirt, während ein anderer theils reflectirt, theils durchgelassen wird, und es ist bekannt, dass das Absorptionsvermögen mit dem Emissionsvermögen in einem einfachen Zusammenhange steht. Da es sich für uns jetzt nicht darum handelt, die Unterschiede und die Gesetzmässigkeiten, welche in dieser Beziehung stattfinden, zu untersuchen, so wollen wir einen einfachen Fall annehmen, nämlich den, wo die betrachteten Körper von der Art sind, dass sie alle Strahlen, welche auf sie fallen, sofort an der Oberfläche, oder in einer so dünnen Schicht, dass man die Dicke vernachlässigen kann, vollständig absorbiren. Solche Körper hat Kirchhoff in seiner bekannten ausgezeichneten Abhandlung über das Verhältniss zwischen Emission und Absorption [1]) *vollkommen schwarze* Körper genannt.

Körper dieser Art haben auch das grösstmögliche Emissionsvermögen, und es war früher schon als sicher angenommen, dass die Stärke ihrer Emission nur von ihrer Temperatur abhänge, so dass alle vollkommen schwarzen Körper bei gleicher Temperatur von gleich grossen Stücken ihrer Oberflächen gleich viel Wärme ausstrahlen. Da nun die Strahlen, welche ein Körper aussendet, nicht gleichartig, sondern der Farbe nach verschieden sind, so muss man die Emission in Bezug auf die verschiedenen Farben besonders betrachten, und Kirchhoff hat den obigen Satz dahin erweitert, dass vollkommen schwarze Körper von gleicher Temperatur nicht nur im Allgemeinen, sondern auch von jeder Strahlengattung im Besonderen, gleich viel aussenden. Da auch diese

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. CIX, S. 275.

auf die Farbe der Strahlen bezüglichen Unterschiede bei unserer Untersuchung nicht in Betracht kommen sollen, so wollen wir im Folgenden immer voraussetzen, dass wir es nur mit einer bestimmten Strahlengattung, oder, genauer ausgedrückt, mit Strahlen, deren Wellenlängen nur innerhalb eines unendlich kleinen Intervalls variiren, zu thun haben. Da dasjenige, was von dieser Strahlengattung gilt, in entsprechender Weise auch von jeder anderen Strahlengattung gelten muss, so lassen sich die Resultate, welche für homogene Wärme gefunden sind, ohne Schwierigkeit auch auf solche Wärme ausdehnen, die verschiedene Strahlengattungen gemischt enthält.

Ebenso wollen wir, um unnöthige Complicationen zu vermeiden, von Polarisationserscheinungen absehen und annehmen, dass wir es nur mit unpolarisirten Strahlen zu thun haben. In welcher Weise bei derartigen Betrachtungen die Polarisation zu berücksichtigen ist, ist von Helmholtz und Kirchhoff auseinandergesetzt.

§. 3. Kirchhoff'sche Formel für die gegenseitige Zustrahlung zweier Flächenelemente.

Seien nun irgend zwei Flächen s_1 und s_2 als Oberflächen vollkommen schwarzer Körper von gleicher Temperatur gegeben, und auf ihnen die Elemente ds_1 und ds_2 zur Betrachtung ausgewählt, um die Wärmemengen, welche dieselben sich gegenseitig durch Strahlung zusenden, zu bestimmen und unter einander zu vergleichen. Wenn das Mittel, welches die Körper umgiebt und den Zwischenraum zwischen ihnen ausfüllt, gleichförmig ist, so dass die Strahlen sich einfach geradlinig von der einen Fläche zur anderen fortpflanzen, so ist leicht zu sehen, dass die Wärmemenge, welche das Element ds_1 nach ds_2 sendet, ebenso gross sein muss, wie die, welche ds_2 nach ds_1 sendet. Ist dagegen das Mittel, welches die Körper umgiebt, nicht gleichförmig, sondern finden Verschiedenheiten statt, welche Brechungen und Reflexionen der Strahlen veranlassen, so ist der Vorgang weniger einfach, und es bedarf einer eingehenderen Betrachtung, um sich davon zu überzeugen, ob auch in diesem Falle jene vollkommene Reciprocität stattfindet.

Diese Betrachtung ist in sehr eleganter Weise von Kirch-

hoff ausgeführt, und ich will sein Resultat, so weit es sich auf den Fall bezieht, wo die Strahlen auf ihrem Wege von dem einen Elemente zum anderen keine Schwächung erleiden, wo also die vorkommenden Brechungen und Reflexionen ohne Verlust geschehen und die Fortpflanzung ohne Absorption stattfindet, hier kurz anführen. Dabei werde ich mir nur in der Bezeichnung und in der Wahl der Coordinatensysteme zur besseren Uebereinstimmung mit dem Folgenden einige Aenderungen erlauben.

Wenn zwei Punkte gegeben sind, so kann von den unendlich vielen Strahlen, welche der eine Punkt aussendet[1]), im Allgemeinen nur einer nach dem anderen Punkte gelangen, oder, falls durch Brechungen oder Reflexionen bewirkt wird, dass mehrere Strahlen in dem anderen Punkte zusammentreffen, so ist es doch im Allgemeinen nur eine beschränkte Anzahl von getrennten Strahlen, deren jeden man besonders betrachten kann. Der Weg eines solchen von dem einen Punkte zum anderen gelangenden Strahles ist dadurch bestimmt, dass die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege gebraucht, verglichen mit den Zeiten, welche er auf allen anderen nahe liegenden Wegen zwischen denselben beiden Punkten gebrauchen würde, ein Minimum ist. Dieses Minimum der Zeit ist, wenn man in solchen Fällen, wo mehrere getrennte Strahlen vorkommen, einen einzelnen zur Betrachtung ausgewählt hat, durch die Lage der beiden Punkte bestimmt, und wir wollen es, wie Kirchhoff, mit T bezeichnen.

Indem wir nun zu den beiden Flächenelementen ds_1 und ds_2

---

[1]) Die Ausdrucksweise, dass ein *Punkt* unendlich viele Strahlen aussende, könnte vielleicht im streng mathematischen Sinne als ungenau bezeichnet werden, da die Aussendung von Wärme oder Licht nur von einer *Fläche* und nicht von einem *mathematischen Punkte* geschehen kann. Es würde darnach genauer sein, die Aussendung von Wärme oder Licht, statt auf den betrachteten Punkt selbst, vielmehr auf ein bei ihm befindliches Flächenelement zu beziehen. Da indessen schon der Begriff eines Strahles nur eine mathematische Abstraction ist, so kann man, ohne Furcht vor Missverständnissen, die Vorstellung beibehalten, dass von jedem Punkte einer Fläche unendlich viele Strahlen ausgehen. Wenn es sich darum handelt, die Wärme oder das Licht, welche eine Fläche ausstrahlt, der *Quantität* nach zu bestimmen, so versteht es sich von selbst, dass dabei die Grösse der Fläche mit in Betracht kommt, und dass, wenn man die Fläche in Elemente zerlegt, diese Elemente nicht Punkte, sondern unendlich kleine Flächen sind, deren Grösse in derjenigen Formel, welche die von einem Flächenelemente ausgestrahlte Wärme- oder Lichtmenge darstellen soll, als Factor vorkommen muss.

zurückkehren, wollen wir uns in einem Punkte jedes Elementes eine Tangentialebene an die betreffende Fläche gelegt denken, und die Elemente ds_1 und ds_2 als Elemente dieser Ebenen betrachten. In jeder dieser Ebenen führen wir ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem ein, welches in der einen x_1, y_1, und in der anderen x_2, y_2 heisse [1]). Nehmen wir nun in jeder Ebene einen Punkt, so ist die Zeit T, welche der Strahl gebraucht, um vom einen Punkte zum anderen zu gelangen, wie oben gesagt, durch die Lage der beiden Punkte bestimmt, und sie ist somit als eine Function der vier Coordinaten der beiden Punkte zu betrachten.

Dieses vorausgesetzt gilt für die Wärmemenge, welche das Element ds_1 dem Elemente ds_2 während der Zeiteinheit zusendet, nach Kirchhoff folgender Ausdruck [2]):

$$\frac{e_1}{\pi}\left(\frac{d^2T}{dx_1\,dx_2}\cdot\frac{d^2T}{dy_1\,dy_2}-\frac{d^2T}{dx_1\,dy_2}\cdot\frac{d^2T}{dy_1\,dx_2}\right)ds_1\,ds_2,$$

worin π die bekannte Zahl ist, welche das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser ausdrückt, und e_1 die Stärke der Emission der Fläche s_1 an der Stelle, wo das Element ds_1 liegt, bedeutet, in der Weise, dass $e_1\,ds_1$ die ganze Wärmemenge darstellt, welche das Element ds_1 während der Zeiteinheit ausstrahlt.

Um die Wärmemenge auszudrücken, welche umgekehrt das Element ds_2 dem Elemente ds_1 zusendet, braucht man in dem vorigen Ausdrucke nur an die Stelle von e_1 die Grösse e_2, die Stärke der Emission der Fläche s_2, zu setzen. Alles Uebrige bleibt ungeändert, weil es in Bezug auf beide Elemente symmetrisch ist, denn die Zeit T, welche ein Strahl braucht, um den Weg zwischen zwei Punkten der beiden Elemente zu durchlaufen, ist dieselbe, mag der Strahl sich in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung bewegen. Nimmt man nun an, dass die Flächen, unter der Voraussetzung gleicher Temperatur, gleich viel Wärme ausstrahlen, dass also $e_1 = e_2$ ist, so ist hiernach die Wärmemenge, welche das Element ds_1 nach ds_2 sendet, ebenso gross, wie die, welche ds_2 nach ds_1 sendet.

---

[1]) Kirchhoff hat zwei Ebenen, welche auf den in der Nähe der Elemente stattfindenden Strahlenrichtungen senkrecht sind, angenommen, und in diese Ebenen hat er die Coordinatensysteme gelegt, und zugleich die Flächenelemente auf diese Ebenen projicirt.

[2]) Pogg. Ann. Bd. CIX, S. 286.

§. 4. Unbestimmtheit der Formel für den Fall der Strahlenconcentration.

Es wurde vorher gesagt, zwischen zwei gegebenen Punkten sei im Allgemeinen nur ein Strahl oder eine beschränkte Anzahl getrennter Strahlen möglich. In besonderen Fällen aber kann es vorkommen, dass *unendlich viele* Strahlen, welche von dem einen Punkte ausgehen und entweder einen in einer Fläche liegenden Winkel, oder auch einen ganzen körperlichen Winkel oder einen Kegelraum ausfüllen, sich in dem anderen Punkte wieder vereinigen. Dasselbe gilt natürlich von den Lichtstrahlen ebenso, wie von den Wärmestrahlen, und man pflegt in der Optik einen solchen Punkt, wo sämmtliche Strahlen, die ein gegebener Punkt innerhalb eines gewissen Kegelraumes aussendet, sich wieder vereinigen, das *Bild* des gegebenen Punktes zu nennen, oder, da bei umgekehrter Strahlenrichtung auch der erste Punkt das Bild des zweiten ist, so nennt man beide Punkte zwei *conjugirte Brennpunkte*. Wenn das, was hier von zwei einzelnen Punkten gesagt ist, von den sämmtlichen Punkten zweier Flächen gilt, so dass jeder Punkt der einen Fläche der conjugirte Brennpunkt eines Punktes der anderen Fläche ist, so nennt man die eine Fläche das optische Bild der anderen.

Es fragt sich nun, wie zwischen den Elementen zweier solcher Flächen der Strahlenaustausch stattfindet, ob da auch die obige Reciprocität besteht, dass bei gleicher Temperatur jedes Element der einen Fläche einem Elemente der anderen gerade so viel Wärme zusendet, als es von jenem zurück erhält, und dass daher ein Körper den anderen nicht zu einer höheren Temperatur, als seiner eigenen, erwärmen kann, oder ob in solchen Fällen durch die Concentration der Strahlen die Möglichkeit gegeben ist, dass ein Körper einen anderen zu einer höheren Temperatur erwärmen kann, als er selbst hat.

Auf diesen Fall ist der Kirchhoff'sche Ausdruck nicht direct anwendbar. Ist nämlich die Fläche s_2 ein optisches Bild der Fläche s_1, so vereinigen sich alle Strahlen, welche ein in der Fläche s_1 gelegener Punkt p_1 innerhalb eines gewissen Kegelraumes aussendet, in einem bestimmten Punkte p_2 der Fläche s_2, und alle anderen umliegenden Punkte der Fläche s_2 erhalten von jenem Punkte p_1

keine Strahlen. Es sind also, wenn die Coordinaten x_1, y_1 des Punktes p_1 gegeben sind, die Coordinaten x_2, y_2 des Punktes p_2 nicht mehr willkürlich, sondern sie sind gleich mit bestimmt; und ebenso, wenn die Coordinaten x_2, y_2 gegeben sind, so sind die Coordinaten x_1, y_1 gleich mit bestimmt. Ein Differentialcoefficient von der Form $\frac{d^2 T}{dx_1\, dx_2}$, worin bei der Differentiation nach x_1 die Coordinate x_1 als veränderlich betrachtet wird, während die zweite Coordinate y_1 desselben Punktes und die beiden Coordinaten x_2 und y_2 des anderen Punktes als constant vorausgesetzt werden, und ebenso bei der Differentiation nach x_2 die Coordinate x_2 als veränderlich gilt, während y_2, x_1 und y_1 constant sind, kann demnach keine reelle Grösse von endlichem Werthe sein.

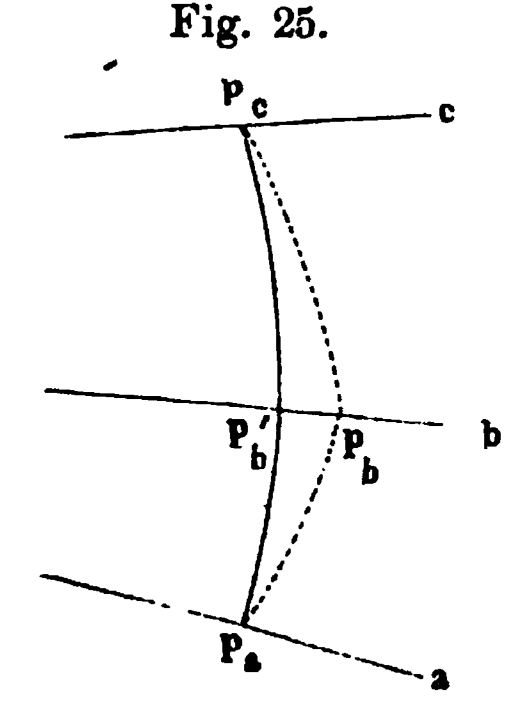
Es muss daher für diesen Fall ein Ausdruck von etwas anderer Form, als der Kirchhoff'sche, abgeleitet werden, und zu diesem Zwecke mögen zunächst einige Betrachtungen ähnlicher Art, wie die, welche Kirchhoff zu seinem Ausdrucke geführt haben, folgen.

II. Bestimmung zusammengehöriger Punkte und zusammengehöriger Flächenelemente in drei von den Strahlen durchschnittenen Ebenen.

§. 5. Gleichungen zwischen den Coordinaten der Punkte, in welchen ein Strahl drei gegebene Ebenen schneidet.

Es seien drei Ebenen a, b, c gegeben, von denen b zwischen a und c liege (Fig. 25). In jeder derselben führe man ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, welche mit x_a, y_a; x_b, y_b und x_c, y_c bezeichnet seien. Wenn nun in der Ebene a ein Punkt p_a, und in der Ebene b ein Punkt p_b gegeben ist, und man betrachtet den Strahl, welcher von dem einen zum anderen geht, so hat man zur Bestimmung des Weges, welchen dieser Strahl nimmt, die Bedingung, dass die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege braucht, unter den Zeiten, welche er auf allen anderen nahe liegenden Wegen gebrauchen würde,

Fig. 25.



ein Minimum ist. Dieses Minimum der Zeit, welches als Function der Coordinaten der Punkte p_a und p_b, also als Function der vier Grössen x_a, y_a, x_b, y_b zu betrachten ist, heisse T_{ab}. Ebenso sei T_{ac} die Zeit des Strahles zwischen zwei Punkten p_a und p_c in den Ebenen a und c, und T_{bc} die Zeit des Strahles zwischen zwei Punkten p_b und p_c in den Ebenen b und c. T_{ac} ist als Function der vier Grössen x_a, y_a, x_c, y_c, und T_{bc} als Function der vier Grössen x_b, y_b, x_c, y_c anzusehen.

Da nun ein Strahl, welcher durch zwei Ebenen geht, im Allgemeinen auch die dritte Ebene schneidet, so haben wir für jeden Strahl drei Durchschnittspunkte, welche in solcher Beziehung zu einander stehen, dass durch zwei derselben im Allgemeinen der dritte bestimmt ist. Die Gleichungen, welche zu dieser Bestimmung dienen können, lassen sich nach der obigen Bedingung leicht aufstellen.

Wir wollen zunächst annehmen, die Punkte p_a und p_c (Fig. 25) in den Ebenen a und c seien im Voraus gegeben, dagegen der Punkt, wo der Strahl die Zwischenebene b schneidet, und welchen wir zum Unterschiede von anderen in der Ebene b gelegenen Punkten mit p'_b bezeichnen wollen, sei noch unbekannt. Dann wählen wir in dieser Ebene einen beliebigen Punkt p_b und betrachten zwei Strahlen, die wir Hülfsstrahlen nennen wollen, deren einer von p_a nach p_b, und der andere von p_b nach p_c geht. In der Fig. 25 sind die Hülfsstrahlen punktirt gezeichnet, während der Hauptstrahl, um den es sich eigentlich handelt, welcher direct von p_a nach p_c geht, voll ausgezogen ist[1]. Nennen wir, dem Vorigen entsprechend, die Zeiten der beiden Hülfsstrahlen T_{ab} und T_{bc}, und bilden die Summe $T_{ab} + T_{bc}$, so ist der Werth dieser Summe von der Lage des gewählten Punktes p_b abhängig, und die Summe ist daher, sofern die Punkte p_a und p_c als gegeben vorausgesetzt werden, als eine Function der Coordinaten x_b, y_b des Punktes p_b zu betrachten. Unter allen Werthen, welche diese Summe annehmen

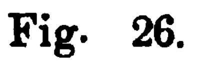
[1] In der Figur sind die Wege der Strahlen etwas gekrümmt gezeichnet. Dadurch soll nur angedeutet werden, dass der Weg, welchen ein Strahl zwischen zwei gegebenen Punkten zurücklegt, nicht einfach die zwischen den beiden Punkten gezogene gerade Linie zu sein braucht, sondern dass durch Brechungen oder Reflexionen ein anderer Weg entstehen kann, welcher entweder eine aus mehreren Geraden bestehende gebrochene Linie ist, oder auch, wenn das Mittel, in welchem der Strahl sich fortpflanzt, sich nicht plötzlich, sondern allmälig ändert, eine gekrümmte Linie sein kann.

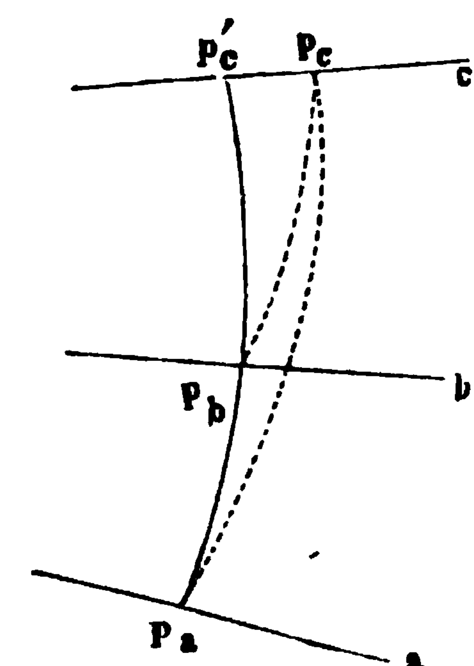
kann, wenn man dem Punkte p_b verschiedene Lagen in der Nähe des Punktes p'_b giebt, muss nun derjenige, welchen man erhält, wenn man p_b mit p'_b zusammenfallen lässt, und dadurch bewirkt, dass die beiden Hülfsstrahlen Theile des direct von p_a nach p_c gehenden Strahles werden, ein *Minimum* sein. Demnach erhält man zur Bestimmung der Coordinaten dieses Punktes p'_b folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{d(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b} = 0; \quad \frac{d(T_{ab} + T_{bc})}{dy_b} = 0.$$

Da die Grössen T_{ab} und T_{bc} ausser den Coordinaten x_b, y_b des vorher als unbekannt betrachteten Punktes auch die Coordinaten x_a, y_a und x_c, y_c der vorher als gegeben vorausgesetzten Punkte enthalten, so kann man die beiden vorigen Gleichungen, nachdem sie einmal aufgestellt sind, einfach als zwei Gleichungen zwischen den sechs Coordinaten der drei Punkte, in welchen die drei Ebenen von einem Strahle getroffen werden, ansehen. Diese Gleichungen lassen sich daher nicht bloss dazu anwenden, die Coordinaten des in der Mittelebene gelegenen Punktes aus den Coordinaten der beiden anderen Punkte zu bestimmen, sondern können allgemein dazu dienen, irgend zwei der sechs Coordinaten aus den vier übrigen zu bestimmen.

Nun wollen wir ferner annehmen, die beiden Punkte p_a und p_b (Fig. 26), wo der Strahl die beiden Ebenen a und b schneidet, seien im Voraus gegeben, dagegen der Punkt, wo er die Ebene c trifft, und welchen wir zum Unterschiede von anderen in der Ebene c gelegenen Punkten wieder mit p'_c bezeichnen wollen, sei noch unbekannt. Dann wählen wir in der Ebene c einen beliebigen Punkt p_c, und betrachten zwei Hülfsstrahlen, deren einer von p_a nach p_c, und der andere von p_b nach p_c geht. In der Fig. 26 sind sie wieder punktirt gezeichnet, während der Hauptstrahl voll ausgezogen ist. Nennen wir die Zeiten der beiden Hülfsstrahlen T_{ac} und T_{bc}, und bilden die Differenz $T_{ac} - T_{bc}$, so ist der Werth dieser Differenz abhängig von der Lage des in der Ebene c gewählten Punktes p_c. Unter den verschiedenen Werthen, welche man erhält,


Fig. 26.



wenn man dem Punkte p_c verschiedene Lagen in der Nähe des Punktes p'_c giebt, muss nun derjenige, welchen man erhält, wenn man p_c mit p'_c zusammenfallen lässt, ein *Maximum* sein.

In diesem Falle schneidet nämlich der von p_a nach p_c gehende Strahl die Ebene b in dem gegebenen Punkte p_b, und er besteht daher aus den beiden Strahlen, welche von p_a nach p_b und von p_b nach p_c gehen. Demnach kann man setzen:

$$T_{ac} = T_{ab} + T_{bc},$$

und daraus ergiebt sich für die fragliche Differenz in diesem speciellen Falle die Gleichung:

$$T_{ac} - T_{bc} = T_{ab}.$$

Fällt dagegen der Punkt p_c nicht mit p'_c zusammen, dann fällt auch der von p_a nach p_c gehende Strahl nicht mit den beiden Strahlen, welche von p_a nach p_b und von p_b nach p_c gehen, zusammen, und da der directe Strahl zwischen p_a und p_c die kürzeste Zeit braucht, so muss sein:

$$T_{ac} < T_{ab} + T_{bc},$$

und demnach hat man für die fragliche Differenz im Allgemeinen die Beziehung:

$$T_{ac} - T_{bc} < T_{ab}.$$

Die Differenz $T_{ac} - T_{bc}$ ist somit im Allgemeinen kleiner, als in jenem speciellen Falle, wo der Punkt p_c in der Fortsetzung des von p_a nach p_b gehenden Strahles liegt, und jener specielle Werth der Differenz bildet somit ein Maximum[1]). Daraus ergeben sich wieder zwei Bedingungsgleichungen, welche lauten:

$$(2) \qquad \frac{d(T_{ac} - T_{bc})}{dx_c} = 0; \quad \frac{d(T_{ac} - T_{bc})}{dy_c} = 0.$$

Nimmt man endlich an, die Punkte p_b und p_c in den Ebenen b und c seien im Voraus gegeben, und dagegen der Punkt, wo der Strahl die Ebene a trifft, noch unbekannt, so erhält man aus einer Betrachtung, welche ganz der vorigen entspricht, und welche ich

---

[1]) In der Abhandlung von Kirchhoff S. 285 steht von der dort betrachteten Grösse, welche im Wesentlichen der hier zuletzt betrachteten Differenz entspricht, nur mit dem Unterschiede, dass sie sich auf vier Ebenen statt auf drei bezieht, sie müsse ein *Minimum* sein. Es kann sein, dass diese Angabe nur auf einem Druckfehler beruht, und ohnehin würde eine Verwechselung zwischen Maximum und Minimum an jener Stelle ohne weitere Bedeutung sein, weil der Satz, welcher in den darauf folgenden Rechnungen benutzt wird, dass die Differentialcoefficienten gleich Null sein müssen, für das Maximum und das Minimum gemeinsam gilt.

daher nicht weiter ausführen will, die beiden Bedingungsgleichungen:

$$(3) \qquad \frac{d(T_{ac} - T_{ab})}{dx_a} = 0; \quad \frac{d(T_{ac} - T_{ab})}{dy_a} = 0.$$

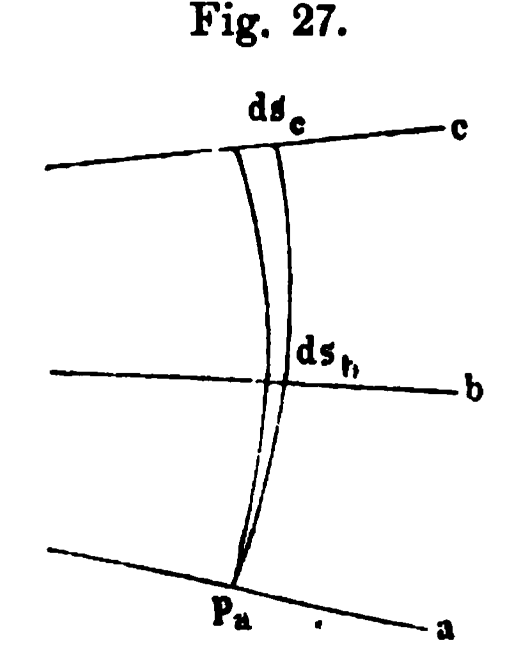
Auf diese Weise sind wir zu drei Paar Gleichungen gelangt, von denen jedes Paar dazu dienen kann, die gegenseitige Beziehung der drei Punkte, in welchen ein Strahl die drei Ebenen *a*, *b*, *c* schneidet, auszudrücken, so dass, wenn zwei der Punkte gegeben sind, der dritte gefunden werden kann, oder noch allgemeiner, wenn von den sechs Coordinaten der drei Punkte vier gegeben sind, die beiden anderen sich bestimmen lassen.

§. 6. Verhältniss zwischen zusammengehörigen Flächenelementen.

Wir wollen nun folgenden Fall betrachten. In einer der drei Ebenen, z. B. in *a*, sei ein Punkt p_a gegeben, und in einer zweiten, z. B. in *b*, ein Flächenelement, welches wir ds_b nennen wollen. Wenn nun von p_a aus Strahlen nach den verschiedenen Punkten des Elementes ds_b gehen, und man denkt sich dieselben fortgesetzt, bis sie die dritte Ebene *c* schneiden, so treffen alle diese Strahlen die Ebene *c* im Allgemeinen auch in einem unendlich kleinen Flächenelemente, welches wir ds_c nennen wollen (s. Fig. 27). Es soll nun das Verhältniss zwischen den Flächenelementen ds_b und ds_c bestimmt werden.

In diesem Falle sind von den sechs Coordinaten, welche bei jedem Strahle in Betracht kommen (den Coordinaten der drei Punkte, in welchen der Strahl die drei Ebenen schneidet), zwei, nämlich x_a und y_a, im Voraus gegeben. Wenn dann für die Coordinaten x_b und y_b irgend welche Werthe angenommen werden, so sind dadurch im Allgemeinen die Coordinaten x_c und y_c gleich mit bestimmt. Man kann also in diesem Falle jede der Coordinaten x_c und y_c als eine Function der beiden Coordinaten x_b und y_b betrachten. Giebt man nun dem Flächenelemente ds_b in der Ebene *b*, dessen Gestalt willkürlich ist,

Fig. 27.



die Gestalt eines Rechteckes $dx_b\,dy_b$, und sucht zu jedem Punkte seines Umfanges den entsprechenden Punkt in der Ebene c, so erhält man hier ein unendlich kleines Parallelogramm, welches das entsprechende Flächenelement ds_c bildet.

Die Grösse dieses Parallelogrammes bestimmt sich folgendermaassen. Die Länge derjenigen Seite des Parallelogrammes, welche der Seite dx_b des Rechteckes in der Ebene b entspricht, heisse λ, und die Winkel, welche diese Seite mit den Coordinatenaxen der x_c und y_c bildet, seien mit (λx_c) und (λy_c) bezeichnet. Dann ist:

$$\lambda \cos(\lambda x_c) = \frac{dx_c}{dx_b}\,dx_b; \quad \lambda \cos(\lambda y_c) = \frac{dy_c}{dx_b}\,dx_b.$$

Ebenso hat man, wenn man die andere Seite des Parallelogrammes mit μ und ihre Winkel mit den Coordinatenaxen mit (μx_c) und (μy_c) bezeichnet, zu setzen:

$$\mu \cos(\mu x_c) = \frac{dx_c}{dy_b}\,dy_b; \quad \mu \cos(\mu y_c) = \frac{dy_c}{dy_b}\,dy_b.$$

Wird ferner der Winkel zwischen den Seiten λ und μ mit $(\lambda\mu)$ bezeichnet, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\cos(\lambda\mu) &= \cos(\lambda x_c)\cos(\mu x_c) + \cos(\lambda y_c)\cos(\mu y_c)\\ &= \left(\frac{dx_c}{dx_b}\cdot\frac{dx_c}{dy_b} + \frac{dy_c}{dx_b}\cdot\frac{dy_c}{dy_b}\right)\frac{dx_b\,dy_b}{\lambda\mu}.\end{aligned}$$

Um nun den mit ds_c bezeichneten Flächeninhalt des Parallelogrammes zu bestimmen, schreiben wir zunächst:

$$\begin{aligned}ds_c &= \lambda\mu \sin(\lambda\mu)\\ &= \lambda\mu\sqrt{1-\cos^2(\lambda\mu)}\\ &= \sqrt{\lambda^2\mu^2 - \cos^2(\lambda\mu).\lambda^2\mu^2}\end{aligned}$$

und hierin substituiren wir für $\cos(\lambda\mu)$ den eben gegebenen Ausdruck und für λ^2 und μ^2 die aus den obigen Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke:

$$\lambda^2 = \left[\left(\frac{dx_c}{dx_b}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{dx_b}\right)^2\right]dx_b^2$$

$$\mu^2 = \left[\left(\frac{dx_c}{dy_b}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{dy_b}\right)^2\right]dy_b^2.$$

Dann heben sich unter dem Wurzelzeichen mehrere Glieder fort, und die übrigen bilden ein Quadrat, nämlich:

$$\begin{aligned}ds_c &= \sqrt{\left(\frac{dx_c}{dx_b}\cdot\frac{dy_c}{dy_b} - \frac{dx_c}{dy_b}\cdot\frac{dy_c}{dx_b}\right)^2 dx_b^2\,dy_b^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{dx_c}{dx_b}\cdot\frac{dy_c}{dy_b} - \frac{dx_c}{dy_b}\cdot\frac{dy_c}{dx_b}\right)^2 ds_b^2},\end{aligned}$$

und es lässt sich somit die angedeutete Quadratwurzel sofort ausziehen. Dabei ist aber noch zu bemerken, dass die in Klammer stehende Differenz positiv oder negativ sein kann, und da wir nur die positive Wurzel in Anwendung zu bringen haben, so wollen wir dieses dadurch andeuten, dass wir vor die Differenz die Buchstaben v. n. (valor numericus) setzen. Dann können wir schreiben:

$$(4)\qquad ds_c = \text{v. n.}\left(\frac{dx_c}{dx_b}\cdot\frac{dy_c}{dy_b} - \frac{dx_c}{dy_b}\cdot\frac{dy_c}{dx_b}\right)ds_b.$$

Um die Abhängigkeit der Coordinaten x_c und y_c von den Coordinaten x_b und y_b zu bestimmen, müssen wir eines der drei Paare von Gleichungen in §. 5 anwenden. Wir wollen dazu zuerst die Gleichungen (1) wählen. Wenn man diese beiden Gleichungen nach x_b und nach y_b differentiirt, indem man bedenkt, dass jede der mit T bezeichneten Grössen von den drei Paaren von Coordinaten x_a, y_a; x_b, y_b; x_c, y_c zwei Paare enthält, welche durch die Indices angedeutet sind, und wenn man bei der Differentiation x_c und y_c als Functionen von x_b und y_b behandelt, während man x_a und y_a als constant voraussetzt, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{(dx_b)^2} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dx_c}\cdot\dfrac{dx_c}{dx_b} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dy_c}\cdot\dfrac{dy_c}{dx_b} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b\,dy_b} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dx_c}\cdot\dfrac{dx_c}{dy_b} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dy_c}\cdot\dfrac{dy_c}{dy_b} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b\,dy_b} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dx_c}\cdot\dfrac{dx_c}{dx_b} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dy_c}\cdot\dfrac{dy_c}{dx_b} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{(dy_b)^2} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dx_c}\cdot\dfrac{dx_c}{dy_b} + \dfrac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dy_c}\cdot\dfrac{dy_c}{dy_b} = 0. \end{cases}$$

Wenn wir mit Hülfe dieser Gleichungen die vier Differentialcoefficienten $\frac{dx_c}{dx_b}, \frac{dx_c}{dy_b}, \frac{dy_c}{dx_b}, \frac{dy_c}{dy_b}$ bestimmen, und die gefundenen Werthe in die Gleichung (4) einsetzen, so erhalten wir die gesuchte Beziehung zwischen den Flächenelementen ds_b und ds_c. Um das Resultat, welches sich auf diese Weise ergiebt, kürzer schreiben zu können, wollen wir folgende Zeichen einführen:

$$(6)\qquad A = \text{v. n.}\left(\frac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dx_c}\cdot\frac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dy_c} - \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dy_c}\cdot\frac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dx_c}\right)$$

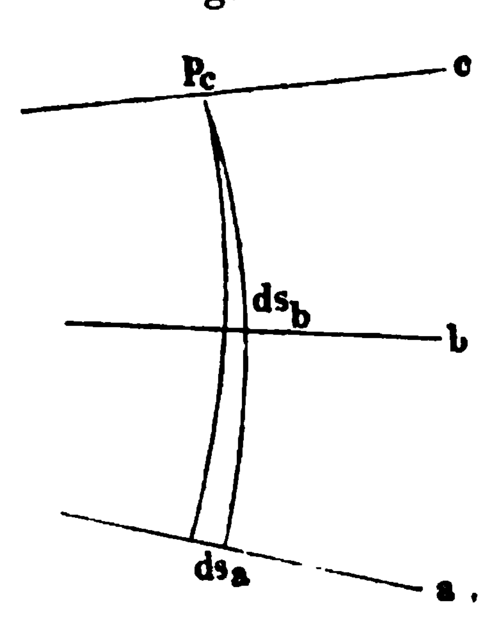
$$(7)\qquad E = \text{v. n.}\left\{\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{(dx_b)^2}\cdot\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{(dy_b)^2} - \left[\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b\,dy_b}\right]^2\right\}.$$

Dann kann man die gesuchte Beziehung in folgender Gleichung schreiben:

(8) $$\frac{ds_c}{ds_b} = \frac{E}{A}.$$

Nehmen wir nun in entsprechender Weise an, es sei in der Ebene c (Fig. 28) ein bestimmter Punkt p_c gegeben, und suchen in der Ebene a das Flächenelement ds_a, welches dem in der Ebene b gegebenen Elemente ds_b entspricht, so können wir das Resultat aus dem vorigen einfach dadurch ableiten, dass wir überall die Indices a und c vertauschen. Führen wir zur Abkürzung noch das Zeichen C ein mit der Bedeutung:

Fig. 28.



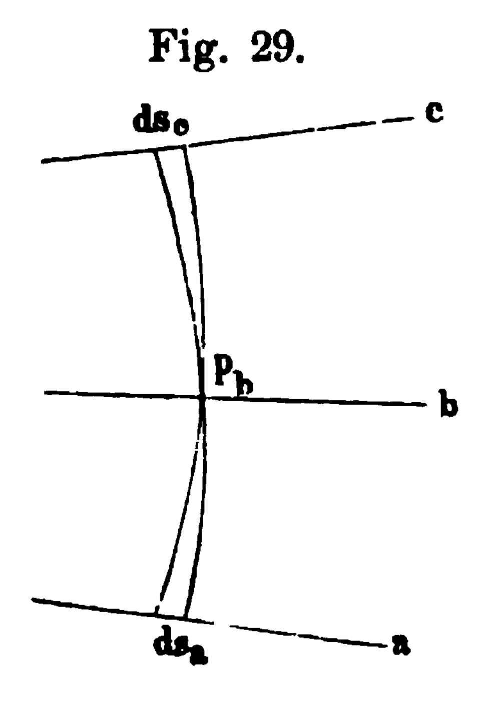
(9) $$C = \text{v. n.} \left(\frac{d^2 T_{ab}}{dx_a\, dx_b} \cdot \frac{d^2 T_{ab}}{dy_b\, dy_b} - \frac{d^2 T_{ab}}{dx_a\, dy_b} \cdot \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a\, dx_b} \right),$$

so kommt:

(10) $$\frac{ds_a}{ds_b} = \frac{E}{C}.$$

Nehmen wir endlich an, es sei in der Ebene b ein bestimmter Punkt p_b gegeben (Fig. 29), und wählen in der Ebene a irgend ein Flächenelement ds_a und denken uns, von den verschiedenen Punkten dieses Elementes gehen Strahlen durch den Punkt p_b, welche wir uns bis zur Ebene c fortgesetzt denken; und suchen wir nun die Grösse des Flächenelementes ds_c, in welchem diese sämmtlichen Strahlen die Ebene c treffen, so finden wir unter Anwendung der vorher eingeführten Zeichen:

Fig. 29.



(11) $$\frac{ds_c}{ds_a} = \frac{C}{A}.$$

Man sieht hieraus, dass die beiden in diesem Falle zusammengehörigen Flächenelemente sich zu einander gerade so verhalten, wie die beiden Flächenelemente, welche man erhält, wenn in der Ebene b ein bestimmtes Element ds_b gegeben ist, und man dazu erst in der Ebene a und darauf in der Ebene c einen Punkt als

Ausgangspunkt der Strahlen annimmt, und dann jedesmal in der dritten Ebene das dem Elemente ds_b entsprechende Flächenelement bestimmt.

§. 7. Verschiedene aus sechs Grössen gebildete Brüche zur Darstellung derselben Verhältnisse.

Bei den Rechnungen des vorigen Paragraphen ist unter den drei Paaren von Gleichungen des §. 5, welche dazu benutzt werden können, nur das erste angewandt. Man kann nun aber in derselben Weise die Rechnungen auch mit den beiden anderen Paaren (2) und (3) ausführen. Durch jedes Paar von Gleichungen gelangt man zu drei Grössen der Art, wie die vorher mit A, C und E bezeichneten, welche dazu dienen können, die Verhältnisse der Flächenelemente auszudrücken. Unter den neun Grössen, welche man auf diese Weise im Ganzen erhält, kommen aber dreimal je zwei vor, welche unter einander gleich sind, wodurch sich die Anzahl der Grössen auf sechs reducirt. Die Ausdrücke dieser sechs Grössen will ich hier der Vollständigkeit wegen zusammenstellen, obwohl drei davon schon früher mitgetheilt sind.

$$
(\mathrm{I.})\quad \begin{cases}
A = \text{v. n.}\left(\dfrac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dx_c}\cdot\dfrac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dy_c} - \dfrac{d^2 T_{bc}}{dx_b\,dy_c}\cdot\dfrac{d^2 T_{bc}}{dy_b\,dx_c}\right)\\[2ex]
B = \text{v. n.}\left(\dfrac{d^2 T_{ac}}{dx_a\,dx_c}\cdot\dfrac{d^2 T_{ac}}{dy_a\,dy_c} - \dfrac{d^2 T_{ac}}{dx_a\,dy_c}\cdot\dfrac{d^2 T_{ac}}{dy_a\,dx_c}\right)\\[2ex]
C = \text{v. n.}\left(\dfrac{d^2 T_{ab}}{dx_a\,dx_b}\cdot\dfrac{d^2 T_{ab}}{dy_a\,dy_b} - \dfrac{d^2 T_{ab}}{dx_a\,dy_b}\cdot\dfrac{d^2 T_{ab}}{dy_a\,dx_b}\right)\\[2ex]
D = \text{v. n.}\left\{\dfrac{d^2(T_{ac}-T_{ab})}{(dx_a)^2}\cdot\dfrac{d^2(T_{ac}-T_{ab})}{(dy_a)^2} - \left[\dfrac{d^2(T_{ac}-T_{ab})}{dx_a\,dy_a}\right]^2\right\}\\[2ex]
E = \text{v. n.}\left\{\dfrac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{(dx_b)^2}\cdot\dfrac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{(dy_b)^2} - \left[\dfrac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b\,dy_b}\right]^2\right\}\\[2ex]
F = \text{v. n.}\left\{\dfrac{d^2(T_{ac}-T_{bc})}{(dx_c)^2}\cdot\dfrac{d^2(T_{ac}-T_{bc})}{(dy_c)^2} - \left[\dfrac{d^2(T_{ac}-T_{bc})}{dx_c\,dy_c}\right]^2\right\}.
\end{cases}
$$

Mit Hülfe dieser sechs Grössen kann man jedes Verhältniss zweier Flächenelemente durch drei verschiedene Brüche darstellen, wie es die folgende tabellarische Zusammenstellung zeigt.

$$(\mathrm{II.})\quad \begin{cases} \dfrac{ds_c}{ds_b} = \dfrac{E}{A} = \dfrac{A}{F} = \dfrac{C}{B} \\ \dfrac{ds_b}{ds_a} = \dfrac{C}{E} = \dfrac{B}{A} = \dfrac{D}{C} \\ \dfrac{ds_a}{ds_c} = \dfrac{A}{C} = \dfrac{F}{B} = \dfrac{B}{D}. \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, beziehen sich die drei Horizontalreihen auf die drei Fälle, wo entweder in der Ebene a, oder in c, oder in b ein bestimmter Punkt angenommen ist, durch den die Strahlen gehen müssen. Von den drei Verticalreihen der Brüche, welche die Verhältnisse der Flächenelemente darstellen, ist die erste aus den Gleichungen (1), die zweite aus den Gleichungen (2), und die dritte aus den Gleichungen (3) des §. 5 abgeleitet.

Da die drei Brüche, welche ein bestimmtes Verhältniss zweier Flächenelemente darstellen, unter einander gleich sein müssen, so erhält man zwischen den sechs Grössen, aus welchen die Brüche gebildet sind, folgende Gleichungen:

$$(12)\qquad D = \frac{BC}{A};\quad E = \frac{CA}{B};\quad F = \frac{AB}{C}.$$

$$(13)\qquad A^2 = EF;\quad B^2 = FD;\quad C^2 = DE.$$

Mit diesen sechs Grössen sind nun die weiteren Rechnungen anzustellen, und da jedes Verhältniss je zweier Flächenelemente durch drei verschiedene Brüche dargestellt ist, so hat man unter diesen die Wahl, und kann in jedem speciellen Falle den Bruch anwenden, welcher für diesen Fall der geeignetste ist.

III. Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung für den Fall, dass keine Concentration der Strahlen stattfindet.

§. 8. Grösse des zu ds_c gehörenden Flächenelementes in einer Ebene von besonderer Lage.

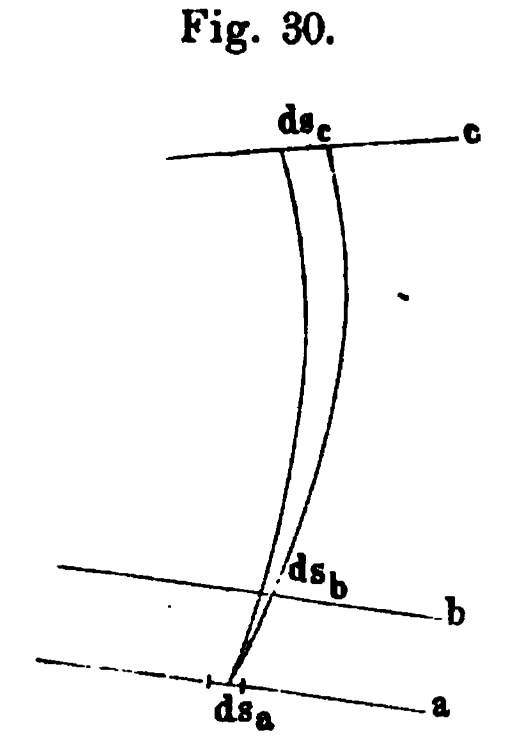
Wir wollen zunächst denselben Fall betrachten, auf welchen der Kirchhoff'sche Ausdruck sich bezieht, indem wir zu bestimmen suchen, wieviel Wärme zwei Flächenelemente sich gegenseitig zusenden, unter der Voraussetzung, dass jeder Punkt des einen Elementes von jedem Punkte des anderen einen Strahl und auch

nur Einen Strahl, oder höchstens eine beschränkte Anzahl von einzelnen Strahlen, die man gesondert betrachten kann, erhält.

Seien zwei Elemente ds_a und ds_c in den Ebenen a und c (Fig. 30) gegeben, so wollen wir zuerst die Wärme bestimmen, welche das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet.

Dazu denken wir uns die Mittelebene b parallel der Ebene a gelegt in einem Abstande ϱ, welchen wir als so klein voraussetzen, dass bei jedem von ds_a nach ds_c gehenden Strahle der Theil, welcher zwischen den Ebenen a und b liegt, als geradlinig, und das Mittel, welches er auf dieser Strecke durchläuft, als homogen anzusehen ist. Nehmen wir nun in dem Elemente ds_a irgend einen Punkt, und betrachten das Strahlenbüschel, welches von diesem Punkte aus nach dem Elemente ds_c geht, so schneidet dieses die Ebene b in einem Elemente ds_b, dessen Grösse durch einen der drei in der obersten Horizontalreihe von (II.) stehenden Brüche ausgedrückt werden kann. Wir wollen den letzten Bruch wählen, und erhalten dadurch die Gleichung:

Fig. 30.



$$ds_b = \frac{B}{C} ds_c. \tag{14}$$

Die hierin vorkommende Grösse C lässt sich nun in diesem Falle wegen der eigenthümlichen Lage der Ebene b in eine besonders einfache Form bringen.

Es sei, wie es auch von Kirchhoff geschehen ist, das Coordinatensystem in b so gewählt, dass es dem Coordinatensysteme in der parallelen Ebene a vollkommen correspondirt. Nämlich die Anfangspunkte beider Coordinatensysteme sollen in einer auf beiden Ebenen senkrechten Geraden liegen, und die Coordinaten des einen Systemes sollen den entsprechenden des anderen Systemes parallel sein. Dann ist der Abstand r zwischen zwei in den beiden Ebenen liegenden Punkten mit den Coordinaten x_a, y_a und x_b, y_b bestimmt durch die Gleichung:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}. \tag{15}$$

Denken wir uns nun einen Strahl von dem einen dieser Punkte nach dem anderen gehend, so wird die Länge seines Weges, da

die Fortpflanzung zwischen beiden Ebenen als geradlinig vorausgesetzt wird, einfach durch den Abstand r der beiden Punkte dargestellt, und wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Ebene a, welche sich der Voraussetzung nach auf der Strecke bis zur Ebene b nicht merklich ändert, mit v_a bezeichnen, so ist die Zeit, welche der Strahl auf dieser Strecke gebraucht, bestimmt durch die Gleichung:

$$T_{ab} = \frac{r}{v_a}.$$

Demgemäss lässt sich der Ausdruck von C so schreiben:

$$C = \text{v. n.}\ \frac{1}{v_a^2}\left(\frac{d^2 r}{dx_a dx_b}\cdot\frac{d^2 r}{dy_a dy_b} - \frac{d^2 r}{dx_a dy_b}\cdot\frac{d^2 r}{dy_a dx_b}\right).$$

Setzt man hierin für r seinen Werth aus (15), so kommt:

$$(16) \qquad C = \frac{1}{v_a^2}\cdot\frac{\varrho^2}{r^4}.$$

Hierdurch geht die Gleichung (14) über in:

$$(17) \qquad ds_b = v_a^2\,\frac{r^4}{\varrho^2}\,B\,ds_c.$$

Bezeichnen wir noch den Winkel, welchen das betrachtete, von einem Punkte des Elementes ds_a ausgehende unendlich schmale Strahlenbüschel mit der auf dem Elemente errichteten Normale bildet, mit ϑ, so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\varrho}{r},$$

und man kann daher der vorigen Gleichung auch folgende Form geben:

$$(18) \qquad ds_b = \frac{v_a^2 r^2}{\cos^2\vartheta}\,B\,ds_c.$$

§. 9. Ausdrücke der Wärmemengen, welche die Elemente ds_a und ds_c einander zustrahlen.

Nachdem die Grösse des Flächenelementes ds_b bestimmt ist, lässt sich auch die Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet, leicht ausdrücken.

Von jedem Punkte des Elementes ds_a geht nämlich nach ds_c ein unendlich schmales Strahlenbüschel, und die Kegelöffnungen der von den verschiedenen Punkten ausgehenden Büschel sind als

gleich anzusehen. Die Grösse der Kegelöffnung eines solchen Strahlenbüschels wird bestimmt durch die Grösse und Lage jenes Flächenelementes ds_b, in welchem der Kegel die Ebene b schneidet. Um diese Kegelöffnung geometrisch auszudrücken, denken wir uns um den betreffenden Punkt, von dem die Strahlen ausgehen, mit dem Radius ϱ eine Kugelfläche geschlagen, innerhalb deren wir die Fortpflanzung der Strahlen als geradlinig betrachten. Nennen wir dann das Flächenelement, in welchem diese Kugelfläche von dem Strahlenkegel geschnitten wird, $d\sigma$, so stellt der Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$ die Oeffnung des Kegels dar. Da nun das Flächenelement ds_b von der Spitze des Kegels um die Strecke r entfernt ist, und die auf ds_b errichtete Normale, welche mit der vorher erwähnten, auf ds_a errichteten parallel ist, mit dem unendlich schmalen Strahlenkegel den Winkel ϑ bildet, so hat man die Gleichung:

$$(19)\qquad \frac{d\sigma}{\varrho^2} = \frac{\cos\vartheta \, . \, ds_b}{r^2}.$$

Wenn man hierin für ds_b den in (18) gegebenen Ausdruck setzt, so kommt:

$$(20)\qquad \frac{d\sigma}{\varrho^2} = \frac{v_a^2}{\cos\vartheta} B ds_c.$$

Es kommt nun darauf an, zu bestimmen, wie gross derjenige Theil der von dem Elemente ds_a ausgesandten Wärme ist, welcher dieser unendlich schmalen Kegelöffnung entspricht, oder, mit anderen Worten, wie viel Wärme das Element ds_a durch jenes auf der Kugelfläche bestimmte Element $d\sigma$ sendet. Diese Wärmemenge ist erstens proportional der Grösse des ausstrahlenden Elementes ds_a, ferner proportional der Grösse der Kegelöffnung, also dem Bruche $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$, und endlich, nach dem bekannten Ausstrahlungsgesetze, proportional dem Cosinus des Winkels ϑ, welchen der unendlich schmale Strahlenkegel mit der Normale bildet. Man kann sie also ausdrücken durch das Product:

$$\varepsilon \cos\vartheta \frac{d\sigma}{\varrho^2} ds_a,$$

worin ε ein von der Temperatur des Flächenelementes abhängiger Factor ist. Zur Bestimmung dieses Factors haben wir die Bedingung, dass die Wärmemenge, welche das Element ds_a im Ganzen

ausstrahlt, also der ganzen über der Ebene a befindlichen Halbkugel zustrahlt, gleich dem Producte $e_a ds_a$ sein muss, worin e_a die Stärke der Emission der Ebene a an der Stelle, wo das Element ds_a liegt, bedeutet. Man erhält also die Gleichung:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho^2}\int \cos\vartheta\, d\sigma = e_a,$$

worin die Integration über die Halbkugel auszudehnen ist, und daraus folgt:

$$\varepsilon\pi = e_a.$$

Wenn man den hierdurch bestimmten Werth von ε in den obigen Ausdruck einsetzt, so erhält man für die Wärmemenge, welche das Element ds_a durch $d\sigma$ sendet, die Formel:

$$\frac{e_a}{\pi}\cos\vartheta\,\frac{d\sigma}{\varrho^2}\,ds_a.$$

In diese Formel hat man nun für den Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$ den oben gewonnenen und in Gleichung (20) angegebenen Werth zu setzen, um den gesuchten Ausdruck *der Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet*, zu erhalten, nämlich:

$$e_a v_a^2\,\frac{B}{\pi}\,ds_a ds_c.$$

Sucht man in ganz derselben Weise *die Wärmemenge, welche umgekehrt das Element ds_c dem Elemente ds_a zusendet*, und bezeichnet dabei die Stärke der Emission der Ebene c an der Stelle, wo das Element ds_c liegt, mit e_c, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen in der Nähe des Elementes mit v_c, so findet man:

$$e_c v_c^2\,\frac{B}{\pi}\,ds_a ds_c.$$

§. 10. Abhängigkeit der Ausstrahlung von dem umgebenden Medium.

Diese im vorigen Paragraphen gewonnenen Ausdrücke sind im Uebrigen gleich dem in §. 3 mitgetheilten Kirchhoff'schen Ausdrucke, nur darin unterscheiden sie sich von demselben, dass sie noch das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Factor enthalten, welches in Kirchhoff's Ausdrucke nicht vorkommt, indem Kirchhoff an der betreffenden Stelle nur von der Fort-

pflanzungsgeschwindigkeit *im leeren Raume* spricht, und diese als Einheit nimmt. Da nun aber die Körper, deren gegenseitige Zustrahlung man betrachtet, sich möglicher Weise in verschiedenen Mitteln befinden können, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschieden sind, so ist für solche Fälle dieser Factor nicht unwesentlich, und sein Vorkommen führt sofort zu einem eigenthümlichen, theoretisch interessanten Schlusse.

Wie in §. 2 erwähnt wurde, nahm man bisher an, dass bei vollkommen schwarzen Körpern die Stärke der Emission nur von der Temperatur abhänge, so dass also zwei solche Körper bei gleicher Temperatur von gleichen Stücken ihrer Oberflächen gleich viel Wärme ausstrahlen. Dass die Natur des umgebenden Mittels auch einen Einfluss auf die Stärke der Ausstrahlung haben könne, ist meines Wissens noch nirgends zur Sprache gebracht. Da nun aber in den beiden obigen Ausdrücken für die gegenseitige Zustrahlung zweier Elemente ein Factor vorkommt, der von der Natur des Mittels abhängt, so ist dadurch die Nothwendigkeit, das Mittel zu berücksichtigen, und zugleich die Möglichkeit, seinen Einfluss zu bestimmen, gegeben.

Wenn man aus jenen beiden Ausdrücken ein Verhältniss bildet, und dann denjenigen Factor, welcher in beiden Gliedern gemeinsam vorkommt, nämlich $\frac{B}{\pi}\, ds_a ds_c$, forthebt, so ergiebt sich, dass die Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet, sich zu derjenigen, welche das Element ds_c dem Elemente ds_a zusendet, verhält wie

$$e_a v_a^2 : e_c v_c^2.$$

Wollte man nun annehmen, dass bei gleicher Temperatur die Ausstrahlung unbedingt gleich sei, auch wenn die den beiden Elementen angränzenden Mittel verschieden sind, so müsste man für gleiche Temperatur $e_a = e_c$ setzen, und es würden dann die Wärmemengen, welche sich beide Elemente gegenseitig zustrahlen, nicht gleich sein, sondern sich wie $v_a^2 : v_c^2$ verhalten. Daraus würde folgen, dass zwei Körper, welche sich in verschiedenen Mitteln befinden, z. B. der eine in Wasser und der andere in Luft, durch gegenseitige Zustrahlung nicht ihre Temperaturen auszugleichen suchen, sondern dass der eine den anderen durch Zustrahlung zu einer höheren Temperatur erwärmen könnte, als er selbst hat.

Gesteht man dagegen jenen von mir als Grundsatz hingestellten Satz, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen

wärmeren Körper übergehen kann, ganz allgemein als richtig zu, so muss man die gegenseitige Zustrahlung zweier vollkommen schwarzer Flächenelemente von gleicher Temperatur als gleich betrachten, und somit setzen:

(21) $$e_a v_a^2 = e_c v_c^2.$$

Daraus folgt die Proportion:

(22) $$e_a : e_c = v_c^2 : v_a^2,$$

oder auch, da das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Brechungscoefficienten der beiden Mittel ist, welche wir mit n_a und n_c bezeichnen wollen, die Proportion:

(23) $$e_a : e_c = n_a^2 : n_c^2.$$

Hiernach ist also *die Ausstrahlung vollkommen schwarzer Körper bei gleicher Temperatur in verschiedenen Mitteln verschieden, und verhält sich umgekehrt, wie die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Mitteln, oder direct wie die Quadrate ihrer Brechungscoefficienten.* Die Ausstrahlung in Wasser muss sich somit zu der in Luft angenähert wie $(^4/_3)^2 : 1$ verhalten.

Berücksichtigt man den Umstand, dass in der von einem vollkommen schwarzen Körper ausgestrahlten Wärme Strahlen von sehr verschiedenen Farben vorkommen, und giebt man als richtig zu, dass die Gleichheit der gegenseitigen Zustrahlung nicht bloss für die Wärme im Ganzen, sondern auch für jede Farbe im Einzelnen gelten muss, so erhält man für jede Farbe eine Proportion der Art, wie (22) und (23), worin aber das an der rechten Seite stehende Verhältniss, welchem das Verhältniss der Ausstrahlungen gleich gesetzt ist, etwas verschiedene Werthe hat.

Will man endlich statt der vollkommen schwarzen Körper auch Körper von anderer Natur betrachten, bei denen nicht vollkommene, sondern nur theilweise Absorption der auffallenden Wärmestrahlen stattfindet, so muss man statt der Emission einen Bruch, welcher die Emission als Zähler und den Absorptionscoefficienten als Nenner hat, in die Formeln einführen, und erhält dann für diesen Bruch entsprechende Beziehungen, wie vorher für die Emission allein. Auf diese Verallgemeinerung des Resultates, bei welcher auch der Einfluss der Strahlenrichtung auf die Emission und Absorption zur Sprache kommen würde, brauche ich hier nicht einzugehen, weil sie sich bei angemessener Betrachtung des Gegenstandes von selbst ergiebt.

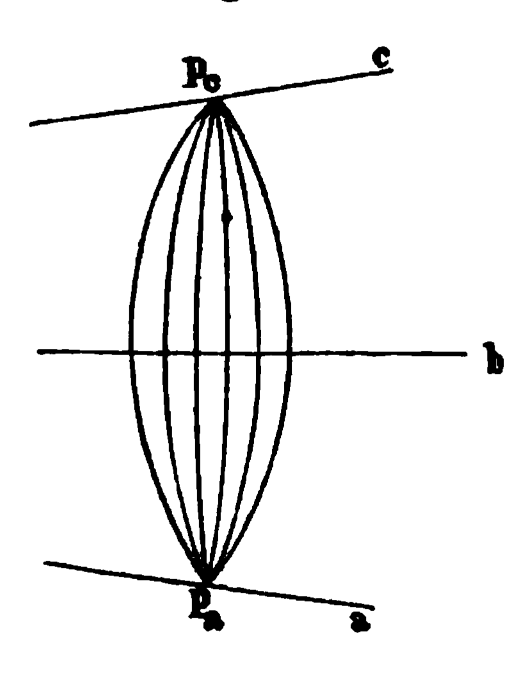
IV. Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung zweier Flächenelemente für den Fall, dass das eine Flächenelement das optische Bild des anderen ist.

§. 11. Verhalten der Grössen *B*, *D*, *F* und *E*.

Wir wollen nun zu dem Falle übergehen, wo die bisher gemachte Voraussetzung, dass die Ebenen *a* und *c*, soweit sie in Betracht kommen, ihre Strahlen in der Weise austauschen, dass von jedem Punkte der einen nach jedem Punkte der anderen ein Strahl, und auch nur Ein Strahl, oder höchstens eine beschränkte Anzahl von einzelnen Strahlen gelange, nicht erfüllt ist. Die Strahlen, welche von den Punkten der einen Ebene divergirend ausgehen, können durch Brechungen oder Reflexionen convergirend werden, und in der anderen Ebene wieder zusammentreffen, so dass es für einen in der Ebene *a* zur Betrachtung ausgewählten Punkt p_a in der Ebene *c* einen oder mehrere Punkte oder Linien giebt, in welchen sich unendlich viele vom Punkte p_a kommende Strahlen schneiden, während andere Stellen der Ebene *c* gar keine Strahlen von jenem Punkte erhalten. Natürlich findet in einem solchen Falle auch mit den Strahlen, welche von der Ebene *c* ausgehend nach der Ebene *a* gelangen, das Entsprechende statt, da die zwischen den beiden Ebenen hin- und zurückgehenden Strahlen gleiche Wege beschreiben.

Unter den unendlich vielen verschiedenen Fällen dieser Art wollen wir, der grösseren Anschaulichkeit wegen, zunächst den extremen Fall behandeln, wo alle Strahlen, welche der Punkt p_a der Ebene *a* innerhalb eines gewissen endlichen Kegelraumes aussendet, in einem einzelnen Punkte p_c der Ebene *c* wieder zusammentreffen, wie es in Fig. 31 angedeutet ist. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Richtungsänderung der Strahlen durch eine Linse oder einen sphärischen Spiegel, oder auch durch irgend ein System von centrirten Linsen oder Spiegeln bewirkt ist, und wenn man von der dabei stattfindenden sphärischen

Fig. 31.



und chromatischen Aberration absieht, wobei zu bemerken ist, dass die chromatische Aberration hier ohnehin nicht zu berücksichtigen ist, da wir uns von vorn herein auf die Betrachtung homogener Strahlen beschränkt haben. Zwei in der angegebenen Weise zusammengehörige Punkte, welche den Ausgangs- und den Vereinigungspunkt der Strahlen bilden, werden, wie schon oben erwähnt, *conjugirte Brennpunkte* genannt.

In einem solchen Falle sind für jeden der betreffenden Strahlen durch die Coordinaten x_a, y_a des Ausgangspunktes p_a auch die Coordinaten x_c, y_c des Punktes p_c, wo der Strahl die Ebene c trifft, gleich mit bestimmt. Die übrigen in der Nähe von p_c liegenden Punkte der Ebene c erhalten vom Punkte p_a keine Strahlen, weil es nach ihnen hin keinen Weg giebt, der die Eigenschaft hätte, dass die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege gebraucht, verglichen mit der Zeit, welche er auf jedem anderen nahe liegenden Wege gebrauchen würde, im mathematischen Sinne ein Minimum ist. Demnach kann auch die Grösse T_{ac}, welche dieses Minimum der Zeit darstellt, für keinen der um p_c gelegenen Punkte, sondern nur für den Punkt p_c selbst einen reellen Werth haben. Die Differentialcoefficienten von T_{ac}, in denen die Coordinaten x_a, y_a als constant, und gleichzeitig eine der Coordinaten x_c, y_c als veränderlich, oder umgekehrt x_c, y_c als constant, und zugleich eine der Coordinaten x_a, y_a als veränderlich vorausgesetzt werden, können somit keine endlichen reellen Grössen sein. Daraus ergiebt sich, dass von den sechs durch die Gleichungen (I.) bestimmten Grössen A, B, C, D, E, F die drei B, D, F, welche Differentialcoefficienten von T_{ac} enthalten, in unserem gegenwärtigen Falle nicht anwendbar sind.

Die drei anderen Grössen A, C, E dagegen enthalten nur Differentialcoefficienten der Grössen T_{ab} und T_{bc}. Wenn wir nun annehmen, die Ebene b sei so gewählt, dass zwischen ihr und den beiden Ebenen a und c, soweit wir die Ebenen betrachten, der Strahlenaustausch in der früher vorausgesetzten Weise stattfinde, dass von jedem Punkte der Ebene b nach jedem Punkte der Ebenen a und c ein Strahl und auch nur Ein Strahl, oder höchstens eine beschränkte Anzahl von einzelnen Strahlen geht, so haben die Grössen T_{ab} und T_{bc} und ihre Differentialcoefficienten für alle in Betracht kommenden Punkte reelle und nicht unendlich grosse Werthe. Die Grössen A, C und E sind daher im gegenwärtigen Falle ebenso gut, wie in dem früher betrachteten, anwendbar.

Eine dieser Grössen, nämlich E, nimmt in diesem Falle einen speciellen Werth an, der sich sofort ableiten lässt. Für die drei Punkte, in welchen ein Strahl die drei Ebenen a, b, c schneidet, müssen die beiden unter (1) gegebenen Gleichungen gelten:

$$\frac{d(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b}=0;\quad \frac{d(T_{ab}+T_{bc})}{dy_b}=0.$$

Da nun in unserem gegenwärtigen Falle durch die Lage der beiden Punkte p_a und p_c in den Ebenen a und c die Lage des Punktes, wo der Strahl die Ebene b schneidet, nicht bestimmt ist, sondern die Ebene b in allen Punkten eines gewissen endlichen Flächenraumes geschnitten werden kann, so müssen die beiden vorigen Gleichungen für alle diese Punkte gültig sein, woraus folgt, dass man durch Differentiation dieser Gleichungen nach x_b und y_b ebenfalls wieder gültige Gleichungen erhalten muss, also:

$$(24)\quad \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b^2}=0;\quad \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b\,dy_b}=0;\quad \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dy_b^2}=0.$$

Wendet man diese Gleichungen auf diejenige der Gleichungen (I.) an, durch welche E bestimmt wird, so kommt:

$$(25)\qquad E=0.$$

Die beiden anderen Grössen A und C haben im Allgemeinen endliche Werthe, welche je nach Umständen verschieden sind, und diese müssen nun zu den folgenden Bestimmungen angewandt werden.

§. 12. Anwendung der Grössen A und C zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen den Flächenelementen.

Es sei angenommen, das Element ds_a der Ebene a habe ein optisches Bild, welches in die Ebene c fällt, und welches wir ds_c nennen wollen, so dass also jeder Punkt des Elementes ds_a einen Punkt des Elementes ds_c zum conjugirten Brennpunkte hat, und umgekehrt. Es soll nun untersucht werden, ob die Wärmemengen, welche diese Flächenelemente, wenn sie als Elemente der Oberflächen zweier vollkommen schwarzer Körper von gleicher Temperatur betrachtet werden, sich gegenseitig zusenden, gleich sind.

Um zunächst das zu dem gegebenen Elemente ds_a gehörige Bild ds_c seiner Lage und Grösse nach zu bestimmen, nehmen wir in der Zwischenebene b irgend einen Punkt p_b an, und denken uns

von sämmtlichen Punkten des Elementes ds_a Strahlen durch diesen Punkt p_b gehend. Jeder dieser Strahlen trifft die Ebene c in dem conjugirten Brennpunkte desjenigen Punktes, von welchem er ausgegangen ist, und somit ist das Flächenelement, in welchem dieses Strahlenbüschel die Ebene c schneidet, gerade das mit ds_c bezeichnete optische Bild des Elementes ds_a. Wir können daher, um das Bild ds_c seiner Grösse nach im Verhältnisse zu ds_a auszudrücken, einen der drei in der untersten Horizontalreihe von (II.) angeführten Brüche anwenden, welche das Verhältniss derjenigen beiden Flächenelemente darstellen, in welchen ein durch einen Punkt p_b der Zwischenebene b gehendes unendlich schmales Strahlenbüschel die beiden Ebenen a und c schneidet; und zwar ist von den drei dort stehenden Brüchen in diesem Falle nur der erste brauchbar, weil die beiden anderen unbestimmt sind. Wir haben also die Gleichung:

$$\frac{ds_a}{ds_c} = \frac{A}{C}. \tag{26}$$

Diese Gleichung ist auch in optischer Beziehung von Interesse, indem sie die allgemeinste Gleichung zur Bestimmung des Grössenverhältnisses zwischen einem Gegenstande und seinem optischen Bilde ist, wobei zu bemerken ist, dass die Zwischenebene b, auf welche sich die Grössen A und C beziehen, beliebig ist, und daher in jedem einzelnen Falle so gewählt werden kann, wie es für die Rechnung am bequemsten ist.

§. 13. Verhältniss zwischen den Wärmemengen, welche die Elemente ds_a und ds_c einander zustrahlen.

Nachdem das Flächenelement ds_c, welches zu ds_a als Bild gehört, bestimmt ist, nehmen wir in der Ebene b statt eines Punktes ein Flächenelement ds_b, und betrachten die Strahlen, welche die beiden Elemente ds_a und ds_c durch dieses Element ds_b senden. Alle Strahlen, welche von einem Punkte des Elementes ds_a ausgehend, durch das Element ds_b gehen, vereinigen sich wieder in einem Punkte des Elementes ds_c, und somit treffen alle Strahlen, welche das Element ds_a durch ds_b sendet, gerade das Element ds_c, und umgekehrt die Strahlen, welche ds_c durch ds_b sendet, treffen sämmtlich das Element ds_a. Die beiden Wärmemengen, welche

die Elemente ds_a und ds_c dem Elemente ds_b zusenden, sind somit auch die Wärmemengen, welche die Elemente ds_a und ds_c durch das Zwischenelement ds_b hindurch einander gegenseitig zusenden. Diese Wärmemengen lassen sich nun dem Früheren nach ohne Weiteres angeben.

Es gilt nämlich für die Wärmemenge, welche das Element ds_a dem Elemente ds_b zusendet, derselbe Ausdruck, welcher in §. 9 für diejenige Wärmemenge entwickelt wurde, welche das Element ds_a dem Elemente ds_c zusendet, wenn man darin nur für ds_c setzt ds_b, und für die Grösse B die Grösse C einführt. Der Ausdruck lautet also:

$$e_a v_a^2 \frac{C}{\pi} ds_a ds_b.$$

Ebenso gilt für die Wärmemenge, welche das Element ds_c dem Elemente ds_b zusendet, derselbe Ausdruck, welcher dort für die Wärmemenge angegeben wurde, welche das Element ds_c dem Elemente ds_a zusendet, wenn man darin für ds_a setzt ds_b, und für die Grösse B die Grösse A einführt, also:

$$e_c v_c^2 \frac{A}{\pi} ds_c ds_b.$$

Bedenkt man nun, dass nach Gleichung (26) ist:

$$C ds_a = A ds_c,$$

so sieht man, dass die beiden gefundenen Ausdrücke sich unter einander verhalten wie $e_a v_a^2 : e_c v_c^2$.

Ganz dasselbe Resultat finden wir, wenn wir in der Zwischenebene b irgend ein anderes Flächenelement ds_b nehmen, und die Wärmemengen betrachten, welche sich die beiden Elemente ds_a und ds_c durch dieses Element gegenseitig zusenden. Immer stehen die beiden Wärmemengen zu einander in dem Verhältnisse $e_a v_a^2 : e_c v_c^2$. Da nun die Wärmemengen, welche sich die Elemente ds_a und ds_c im Ganzen zusenden, aus denjenigen, welche sie sich durch die einzelnen Elemente der Zwischenebene hindurch zusenden, zusammengesetzt sind, so muss auch für sie dasselbe Verhältniss gelten, und wir finden somit als Endresultat, dass die Wärmemengen, welche die Flächenelemente ds_a und ds_c sich im Ganzen gegenseitig zusenden, sich verhalten wie

$$e_a v_a^2 : e_c v_c^2.$$

Dieses ist dasselbe Verhältniss, welches in den §§. 8 und 9 für den Fall gefunden wurde, wo keine Concentration von Strahlen

stattfindet. Es ergiebt sich also, dass die Concentration der Strahlen, wie sehr sie auch die *absolute Grösse* der Wärmemengen, welche zwei Flächenelemente durch Strahlung mit einander austauschen, verändert, doch das *Verhältniss* derselben ungeändert lässt.

In §. 10 ist gezeigt, dass, wenn bei der gewöhnlichen, ohne Concentration stattfindenden Zustrahlung der Satz gelten soll, dass dadurch nicht Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergeführt werden kann, dann die Ausstrahlung in verschiedenen Medien verschieden sein muss, und zwar in der Weise, dass man für vollkommen schwarze Körper von gleicher Temperatur hat:

$$e_a v_a^2 = e_c v_c^2.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so sind auch in unserem gegenwärtigen Falle, wo von den Flächenelementen ds_a und ds_c das eine das Bild des anderen ist, die Wärmemengen, welche sie sich gegenseitig zusenden, unter einander gleich, und es kann daher, trotz der Concentration der Strahlen, das eine Element das andere nicht zu einer höheren Temperatur erwärmen, als es selbst hat.

V. Beziehung zwischen der Vergrösserung und dem Verhältnisse der beiden Kegelöffnungen eines Elementarstrahlenbüschels.

§. 14. Aufstellung der betreffenden Proportionen.

Als ein Nebenresultat der vorstehenden Betrachtung möchte ich hier gelegentlich eine Proportion entwickeln, welche mir von allgemeinem Interesse zu sein scheint, indem sie eine eigenthümliche Verschiedenheit in dem Verhalten der Strahlenbüschel beim Gegenstande und beim Bilde angiebt, welche stets in bestimmter Weise stattfinden muss, wenn Gegenstand und Bild verschiedene Grössen haben.

Wenn wir ein unendlich schmales Strahlenbüschel betrachten, welches von einem Punkte des Elementes ds_a ausgehend durch das Element ds_b der Zwischenebene geht, und sich dann wieder in einem Punkte des Elementes ds_c vereinigt, so können wir die Grösse der Divergenz, welche die Strahlen an ihrem Ausgangs-

punkte haben, vergleichen mit der Grösse der Convergenz, welche dieselben Strahlen an ihrem Vereinigungspunkte haben. Diese Divergenz und Convergenz, wofür wir auch mit gemeinsamem Ausdrucke sagen können: *die Oeffnungen der unendlich schmalen Kegel*, welche das Strahlenbüschel am Ausgangs- und Vereinigungspunkte bildet, ergeben sich unmittelbar durch dasselbe Verfahren, welches wir in §. 9 angewandt haben.

Wir denken uns um jeden der Punkte eine Kugelfläche mit so kleinem Radius beschrieben, dass wir die Strahlen bis zur Kugelfläche als gradlinig ansehen können, und betrachten dann das Flächenelement, in welchem das Strahlenbüschel die Kugelfläche schneidet. Sei dieses Flächenelement mit $d\sigma$ bezeichnet, und heisse der Radius der Kugel ϱ, so wird die Oeffnung des unendlich schmalen Kegels, welcher die Strahlen, soweit sie als geradlinig zu betrachten sind, einschliesst, durch den Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$ dargestellt.

Diesen Bruch haben wir in §. 9 für einen ähnlichen Fall durch die Gleichung (20) bestimmt, und in dem dort gegebenen Ausdrucke brauchen wir nur die Buchstaben etwas zu ändern, um die für unseren gegenwärtigen Fall passenden Ausdrücke zu erhalten. Um die Kegelöffnung an dem in der Ebene a liegenden Ausgangspunkte der Strahlen auszudrücken, hat man in dem dortigen Ausdrucke statt des Elementes ds_c das Element ds_b, und statt der Grösse B die Grösse C zu setzen. Ausserdem wollen wir das Zeichen ϑ, welches den Winkel zwischen dem Elementarstrahlenbüschel und der auf dem Flächenelemente ds_a errichteten Normale bedeutet, um bestimmter anzudeuten, dass es sich um den an der Ebene a liegenden Winkel handelt, in ϑ_a umändern, und aus demselben Grunde auch den Bruch $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$, welcher die gesuchte Kegelöffnung darstellt, mit dem Index a versehen. Dann kommt:

$$\left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a = \frac{v_a^2}{\cos\vartheta_a} C ds_b. \tag{27}$$

Um die andere entsprechende Gleichung zu erhalten, welche die Kegelöffnung an dem in der Ebene c liegenden Vereinigungspunkte bestimmt, braucht man in der vorigen nur überall, wo der Index a steht, den Index c zu setzen, und ausserdem die Grösse C mit A zu vertauschen, also:

$$(28)\qquad \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = \frac{v_c^2}{\cos\vartheta_c} A\, ds_b.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich die Proportion:

$$\frac{\cos\vartheta_a}{v_a^2}\left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : \frac{\cos\vartheta_c}{v_c^2}\left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = C : A,$$

und wenn man hierauf die Gleichung (26) anwendet, so kommt:

$$(29)\qquad \frac{\cos\vartheta_a}{v_a^2}\left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : \frac{\cos\vartheta_c}{v_c^2}\left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = ds_c : ds_a.$$

Führt man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die Brechungscoefficienten der Mittel ein, so lautet die Proportion:

$$(30)\qquad n_a^2 \cos\vartheta_a \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : n_c^2 \cos\vartheta_c \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = ds_c : ds_a.$$

Das Verhältniss, welches in diesen Proportionen an der rechten Seite steht, ist das Grössenverhältniss zwischen einem Flächenelemente des Bildes und dem entsprechenden Flächenelemente des Gegenstandes, also kurz die Flächenvergrösserung, und man erhält also durch diese Proportionen eine einfache Beziehung zwischen der Vergrösserung und dem Verhältnisse der Kegelöffnungen eines Elementarstrahlenbüschels. Dabei ist es, wie man leicht sieht, für die Gültigkeit der Proportionen nicht gerade nöthig, dass die Strahlen schliesslich *convergirend* sind, und sich in einem Punkte wirklich schneiden, sondern sie können auch *divergirend* sein, so dass ihre nach rückwärts gezogenen geradlinigen Verlängerungen sich in einem Punkte schneiden, und das entstehende Bild ein in der Optik sogenanntes *virtuelles* ist.

Nimmt man als speciellen Fall an, das Mittel am Ausgangs- und am Vereinigungspunkte sei gleich, wie es z. B. stattfindet, wenn die Strahlen von einem in der Luft befindlichen Gegenstande ausgehen, und, nachdem sie irgend welche Brechungen oder Reflexionen erlitten haben, ein Bild geben, welches sich in der Luft befindet, oder in der Luft gedacht wird, so ist $v_a = v_c$ und $n_a = n_c$ zu setzen, und es kommt:

$$\cos\vartheta_a \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : \cos\vartheta_c \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = ds_c : ds_a.$$

Fügt man ferner noch als Bedingung hinzu, dass das Elementarstrahlenbüschel mit beiden Flächenelementen gleiche Winkel bilde, z. B. auf beiden senkrecht stehe, so heben sich auch die beiden Cosinus fort, und es kommt:

$$\left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_a : \left(\frac{d\sigma}{\varrho^2}\right)_c = ds_c : ds_a.$$

In diesem Falle stehen also die Kegelöffnungen des Elementarstrahlenbüschels am Gegenstande und am Bilde einfach im umgekehrten Verhältnisse, wie die Grössen der einander entsprechenden Flächenelemente von Gegenstand und Bild.

In der ebenso inhaltreichen als klaren Auseinandersetzung der Gesetze der Brechung in Systemen kugeliger Flächen, welche Helmholtz in seiner „Physiologischen Optik"[1]) gegeben hat, um daran die Betrachtung derjenigen Brechungen zu knüpfen, welche im Auge vorkommen, findet sich auf Seite 50, und erweitert auf Seite 54 eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen der Bildgrösse und der Convergenz der Strahlen für den Fall ausdrückt, wo die Richtungsänderung der Strahlen durch Brechung oder auch durch Reflexion in centrirten Kugelflächen bewirkt wird, und wo die Strahlen auf den betreffenden Ebenen, welche Gegenstand und Bild enthalten, angenähert senkrecht stehen. In der Allgemeinheit, wie in den Proportionen (29) und (30) ist die Beziehung, so viel ich weiss, noch nirgends angegeben.

VI. Allgemeine Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung zwischen Flächen, in denen beliebige Concentrationen vorkommen können.

§. 15. Allgemeiner Begriff der Strahlenconcentration.

Es muss nun die Betrachtung dahin verallgemeinert werden, dass sie nicht bloss den extremen Fall, wo alle von einem Punkte der Ebene a innerhalb eines gewissen endlichen Kegelraumes ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte der Ebene c zusammentreffen, so dass dort ein conjugirter Brennpunkt entsteht, sondern jeden beliebigen Fall der Strahlenconcentration umfasst.

Um den Begriff der Concentration näher festzustellen, sei folgende Definition eingeführt. Wenn von irgend einem Punkte p_a Strahlen ausgehen und auf die Ebene c fallen, und diese Strahlen haben in der Nähe dieser Ebene solche Richtungen, dass an einer

[1]) Allgemeine Encyklopädie der Physik, herausgegeben von G. Karsten.

Stelle der Ebene die Dichtigkeit der auffallenden Strahlen gegen die mittlere Dichtigkeit unendlich gross ist, so wollen wir sagen, es finde an dieser Stelle Concentration der von p_a ausgehenden Strahlen statt.

Nach dieser Definition können wir den Fall der Strahlenconcentration leicht mathematisch kenntlich machen. Wir nehmen zwischen dem Punkte p_a und der Ebene c irgend eine Zwischenebene b, welche so gelegen ist, dass in dieser keine Concentration der von p_a ausgehenden Strahlen stattfindet, und dass auch die Ebenen b und c, soweit sie hierbei in Betracht kommen, zu einander in solcher Beziehung stehen, dass die von den Punkten der einen ausgehenden Strahlenbüschel in der anderen keine Concentration erleiden. Dann denken wir uns ein von p_a ausgehendes unendlich schmales Strahlenbüschel, welches die Ebenen b und c schneidet, und vergleichen die Grössen der Flächenelemente ds_b und ds_c, in denen der Durchschnitt stattfindet. Wenn dann das Element ds_c im Verhältnisse zu ds_b verschwindend klein ist, so dass man setzen kann:

$$\frac{ds_c}{ds_b} = 0, \tag{31}$$

so ist das ein Zeichen, dass in der Ebene c Strahlenconcentration in dem oben angegebenen Sinne stattfindet.

Gehen wir nun zu den in §. 7 gegebenen Gleichungen (II.) zurück, so sind die in der ersten Horizontalreihe stehenden Gleichungen auf unseren gegenwärtigen Fall bezüglich, und unter den drei dort befindlichen Brüchen, welche das Verhältniss der Flächenelemente darstellen, ist wiederum der erste in unserem Falle anwendbar, weil nach der gemachten Annahme über die Lage der Zwischenebene die Grössen A und E sich in gewöhnlicher Weise bestimmen lassen. Wir haben also die Gleichung:

$$\frac{ds_c}{ds_b} = \frac{E}{A}.$$

Soll dieser das Verhältniss der beiden Flächenelemente ausdrückende Bruch Null werden, so muss es dadurch geschehen, dass der Zähler E Null wird, denn der Nenner A kann nach der gemachten Annahme über die Lage der Ebene b nicht unendlich gross werden. Wir haben also als mathematisches Criterium zur Entscheidung, ob die vom Punkte p_a ausgehenden Strahlen an der betreffenden Stelle der Ebene c eine Concentration erleiden oder nicht, die Bedingungsgleichung:

(32) $$E = 0,$$

welche im Falle der Concentration erfüllt sein muss.

Nehmen wir nun umgekehrt an, es sei in der Ebene c ein Punkt p_c gegeben, und es soll entschieden werden, ob die von diesem ausgehenden Strahlen an irgend einer Stelle der Ebene a eine Concentration erleiden, so haben wir in ganz entsprechender Weise die Bedingung:

$$\frac{ds_a}{ds_b} = 0,$$

und da wir nach (II.) setzen können:

$$\frac{ds_a}{ds_b} = \frac{E}{C},$$

so erhalten wir wieder dieselbe Bedingungsgleichung:

$$E = 0.$$

In der That ist auch leicht zu sehen, dass in dem Falle, wo die von einem Punkte der Ebene a ausgehenden Strahlen in einem Punkte der Ebene c eine Concentration erleiden, auch umgekehrt die von diesem letzteren Punkte ausgehenden Strahlen in dem ersteren eine Concentration erleiden müssen.

Da wir in den Gleichungen (12) und (13) die Beziehungen ausgedrückt haben, welche zwischen den sechs Grössen A, B, C, D, E, F stattfinden, so können wir diese Gleichungen anwenden, um zu erkennen, was in einem solchen Falle, wo $E = 0$ wird, während A und C von Null verschiedene endliche Werthe haben, aus den drei Grössen B, D und F wird. Nach jenen Gleichungen hat man:

(33) $$B = \frac{AC}{E}; \quad D = \frac{C^2}{E}; \quad F = \frac{A^2}{E}.$$

Daraus ergiebt sich, dass alle drei Grössen für den gegenwärtigen Fall unendlich gross werden.

§. 16. Gegenseitige Zustrahlung eines Flächenelementes und einer endlichen Fläche durch ein Element einer Zwischenfläche.

Wir wollen nun das Verhältniss der Wärmemengen, welche zwei Flächen durch Strahlung mit einander austauschen, in solcher Weise zu bestimmen suchen, dass das Resultat, unabhängig davon,

ob eine Concentration von Strahlen stattfindet, oder nicht, in allen Fällen gültig sein muss.

Der grösseren Allgemeinheit wegen seien statt der bisher betrachteten *Ebenen a* und *c*, zwei *beliebige Flächen* gegeben, welche s_a und s_c heissen mögen. Zwischen ihnen nehmen wir irgend eine dritte Fläche s_b an, welche nur die Bedingung zu erfüllen braucht, dass die Strahlen, welche von s_a nach s_c oder umgekehrt gehen, in s_b keine Concentration erleiden. Nun sei in s_a irgend ein Element ds_a gewählt, und in s_b ein Element ds_b, welches so liegt, dass die von ds_a durch ds_b gehenden Strahlen auf ihrer Fortsetzung die Fläche s_c treffen. Dann wollen wir zunächst bestimmen: *wie viel Wärme das Element ds_a durch das Element ds_b hindurch der Fläche s_c zusendet, und wie viel Wärme es durch eben jenes Element der Zwischenfläche hindurch von der Fläche s_c zurück erhält.*

Um die zuerst genannte Wärmemenge zu erhalten, brauchen wir nur zu bestimmen, wieviel Wärme das Element ds_a dem Elemente ds_b zusendet, denn nach der gemachten Annahme über die Lage des Elementes ds_b muss alle diese Wärme, nachdem sie das Element ds_b passirt hat, die Fläche s_c treffen. Diese Wärmemenge lässt sich mit Hülfe der früher entwickelten Formeln sofort ausdrücken. Wir denken uns in einem Punkte des Elementes ds_a eine Tangentialebene an die Fläche s_a gelegt, und ebenso in einem Punkte des Elementes ds_b eine Tangentialebene an s_b, und betrachten die gegebenen Flächenelemente als Elemente dieser Ebenen. Wenn wir dann in diesen Tangentialebenen die Coordinatensysteme x_a, y_a und x_b, y_b einführen, und die durch die dritte der Gleichungen (I.) bestimmte Grösse C bilden, so wird die gesuchte Wärmemenge, welche das Element ds_a nach dem Elemente ds_b, und durch dieses hindurch nach s_c sendet, dargestellt durch den Ausdruck:

$$e_a v_a^2 \frac{C}{\pi} ds_a ds_b.$$

Was nun die Wärmemenge betrifft, welche das Element ds_a durch ds_b hindurch von der Fläche s_c erhält, so findet in Bezug auf die Punkte der Fläche s_c, von welchen diese Strahlen ausgehen, im Allgemeinen nicht jenes einfache Verhalten statt, wie in jenem speciellen Falle, wo das Element ds_a ein in die Fläche s_c fallendes optisches Bild ds_c hat, und daher selbst ebenfalls das optische Bild des Elementes ds_c ist. Wählen wir in dem Zwischenelemente ds_b einen bestimmten Punkt p_b, und denken uns von allen Punkten

des Elementes ds_a Strahlen durch diesen Punkt gehend, so erhalten wir ein unendlich schmales Strahlenbüschel, welches die Fläche s_c in einem gewissen Flächenelemente schneidet. Dieses Flächenelement ist es, welches dem Elemente ds_a durch den gewählten Punkt p_b hindurch Strahlen zusendet. Wählen wir nun aber in dem Zwischenelemente ds_b einen anderen Punkt als Kreuzungspunkt des Strahlenbüchels, so erhalten wir in der Fläche s_c ein etwas anders liegendes Element. Die Strahlen, welche das Element ds_a von der Fläche s_c durch verschiedene Punkte des Zwischenelementes erhält, stammen also nicht alle von einem und demselben Elemente der Fläche s_c her.

Da nun aber die Grösse des Zwischenelementes ds_b willkürlich ist, so hindert uns nichts, dieses Element so klein zu nehmen, dass es ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, als das gegebene Element ds_a. Wenn in diesem Falle der Kreuzungspunkt des Strahlenbüschels innerhalb des Elementes ds_b seine Lage ändert, so kann dadurch das Element der Fläche s_c, welches dem Elemente ds_a entspricht, seine Lage nur so wenig ändern, dass die Unterschiede im Vergleiche mit den Dimensionen des Elementes unendlich klein sind, und daher vernachlässigt werden dürfen. Man kann somit in diesem Falle das Element ds_c, welches man erhält, wenn man einen beliebigen Punkt p_b des Elementes ds_b auswählt, und zum Kreuzungspunkte des von ds_a ausgehenden Strahlenbüschels macht, als denjenigen Theil der Fläche s_c betrachten, welcher durch ds_b hindurch mit dem Elemente ds_a Strahlen austauscht.

Die Grösse dieses Elementes ds_c können wir dem Früheren nach leicht ausdrücken. Wir denken uns, wie vorher, in dem Punkte p_b eine Tangentialebene an die Fläche s_b, und ebenso in einem Punkte des Elementes ds_a und in einem Punkte des Elementes ds_c Tangentialebenen an die Flächen s_a und s_c gelegt, und betrachten die beiden letzteren Flächenelemente als Elemente der Tangentialebenen. Führen wir dann in den drei Tangentialebenen Coordinatensysteme ein, und bilden die durch die erste und dritte der Gleichungen (I.) bestimmten Grössen A und C, so können wir nach (II.) schreiben:

$$ds_c = \frac{C}{A}\, ds_a.$$

Die Wärmemenge, welche dieses Element ds_c dem Elemente ds_b zusendet, und welche wir, wie gesagt, als diejenige ansehen

können, die das Element ds_a durch ds_b hindurch von der Fläche s_c erhält, wird dargestellt durch:

$$e_c v_c^2 \frac{A}{\pi} ds_c ds_b,$$

und wenn wir hierin für ds_c den in der vorigen Gleichung gegebenen Werth setzen, so kommt:

$$e_c v_c^2 \frac{C}{\pi} ds_a ds_b.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem oben gefundenen, welcher die Wärmemenge darstellt, die das Element ds_a durch ds_b hindurch der Fläche s_c zusendet, so sieht man, dass sich beide unter einander verhalten wie $e_a v_a^2 : e_c v_c^2$. Nimmt man nun an, dass s_a und s_c die Oberflächen zweier vollkommen schwarzer Körper von gleicher Temperatur seien, und macht für solche Flächen, wie es sich schon bei der ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung als nothwendig herausstellte, die Annahme, dass die beiden Producte $e_a v_a^2$ und $e_c v_c^2$ gleich sind, so sind auch die durch die beiden Ausdrücke dargestellten Wärmemengen gleich.

§. 17. Gegenseitige Zustrahlung ganzer Flächen.

Wählt man in der Zwischenfläche s_b statt des vorher betrachteten Elementes ein anderes, auch als unendlich klein von höherer Ordnung vorausgesetztes Element, so hat dasjenige Element der Fläche s_c, welches durch dieses Element der Zwischenfläche hindurch mit dem Elemente ds_a Strahlen austauscht, eine andere Lage, als im vorigen Falle, aber wiederum sind die beiden ausgetauschten Wärmemengen unter einander gleich; und ebenso verhält es sich mit allen anderen Elementen der Zwischenfläche.

Um die Wärmemenge zu erhalten, welche das Element ds_a der Fläche s_c nicht nur durch ein einzelnes Element der Zwischenfläche, sondern im Ganzen zusendet, und ebenso die Wärmemenge, welche es im Ganzen von s_c zurückerhält, muss man die beiden gefundenen Ausdrücke in Bezug auf die Fläche s_b integriren, und das Integral auf den Theil dieser Fläche ausdehnen, welcher von den Strahlen, die von dem Elemente ds_a nach der Fläche s_c und umgekehrt gehen, getroffen wird. Dabei versteht es sich von selbst, dass, wenn für jedes Flächenelement ds_b die beiden Diffe-

rentialausdrücke gleich sind, dann auch die Integrale gleich sein müssen.

Will man endlich die Wärmemengen haben, welche die ganze Fläche s_a mit der Fläche s_c austauscht, so muss man die beiden Ausdrücke auch in Bezug auf die Fläche s_a integriren, wodurch wiederum die Gleichheit, welche für die einzelnen Elemente ds_a besteht, nicht gestört werden kann.

Der weiter oben für speciellere Fälle gefundene Satz, dass zwei vollkommen schwarze Körper von gleicher Temperatur, sofern die Gleichung $e_a v_a^2 = e_c v_c^2$ für sie gilt, gleich viel Wärme mit einander austauschen, ergiebt sich somit auch als Resultat einer Betrachtung, welche ganz davon unabhängig ist, ob die von s_a ausgehenden Strahlen in s_c, und umgekehrt die von s_c ausgehenden Strahlen in s_a eine Concentration erleiden, oder nicht, indem nur die Bedingung gestellt wurde, dass die von s_a und s_c ausgehenden Strahlen in der Zwischenfläche s_b keine Concentration erleiden, eine Bedingung, welche sich immer erfüllen lässt, da man die Zwischenfläche beliebig wählen kann.

Aus diesem Resultate folgt natürlich auch weiter, dass, wenn ein gegebener schwarzer Körper nicht bloss mit Einem, sondern mit beliebig vielen anderen schwarzen Körpern von gleicher Temperatur in Wechselwirkung steht, er von allen zusammen gerade so viel Wärme erhält, als er ihnen zusendet.

§. 18. Berücksichtigung verschiedener Nebenumstände.

Alle vorstehenden Entwickelungen wurden unter der Voraussetzung gemacht, dass die vorkommenden Brechungen und Reflexionen ohne Verlust geschehen, und keine Absorption stattfinde. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass das gewonnene Resultat sich nicht ändert, wenn man diese Bedingung fallen lässt. Betrachtet man nämlich die verschiedenen Vorgänge, durch welche ein Strahl auf dem Wege von einem Körper zu einem anderen geschwächt werden kann, sei es dadurch, dass an einer Stelle, wo der Strahl die Gränzfläche zweier Mittel trifft, ein Theil unter Brechung in das angränzende Mittel eindringt und der andere reflectirt wird, so dass man es, mag man den einen oder den anderen Theil als die Fortsetzung des ursprünglichen Strahles betrachten, in beiden Fällen mit einem geschwächten Strahle zu

thun hat, sei es dadurch, dass der Strahl beim Durchdringen eines Mittels theilweise absorbirt wird, so gilt in jedem dieser Fälle das Gesetz, dass zwei Strahlen, welche sich auf demselben Wege hinwärts und rückwärts fortpflanzen, die Schwächung in gleichem Verhältnisse stattfindet. Die Wärmemengen, welche zwei Körper sich gegenseitig zusenden, werden daher durch solche Vorgänge stets beide in gleicher Weise geschwächt, so dass, wenn sie ohne die Schwächung gleich gewesen wären, sie auch nach der Schwächung gleich sind.

Mit den vorher erwähnten Vorgängen hängt auch ein anderer Umstand zusammen, nämlich der, dass ein Körper aus einer und derselben Richtung Strahlen erhalten kann, welche von verschiedenen Körpern herstammen. Unser Körper, welcher A heisse, kann z. B. aus einem Punkte, welcher an der Gränzfläche zweier Mittel liegt, zwei der Richtung nach zusammenfallende, aber doch von zwei verschiedenen Körpern, B und C, herstammende Strahlen erhalten, von welchen der eine aus dem angränzenden Mittel kommt, und in jenem Punkte gebrochen ist, und der andere schon vorher in demselben Mittel war, und in jenem Punkte reflectirt ist. In diesem Falle sind aber beide Strahlen durch die Brechung und die Reflexion in der Weise geschwächt, dass, wenn sie vorher beide gleich stark waren, nachher ihre Summe ebenso stark ist, wie vorher jeder einzelne. Denkt man sich dann von unserem Körper A in umgekehrter Richtung einen ebenso starken Strahl ausgehend, so wird dieser in demselben Punkte in zwei Theile getheilt, von denen der eine in das angränzende Mittel eindringt, und dann weiter nach dem Körper B geht, und der andere reflectirt wird, und nach dem Körper C geht. Die beiden Theile, welche in dieser Weise von A nach B und C gelangen, sind ebenso gross, wie die Strahlentheile, welche A von B und C erhält. Der Körper A steht also mit jedem der beiden Körper B und C in jener Wechselbeziehung, dass er, unter Voraussetzung gleicher Temperaturen, gleich viel Wärme mit ihm austauscht. Dasselbe muss wegen der Gleichheit der Wirkungen, welche zwei auf irgend einem Wege hin- und zurückgehende Strahlen erleiden, in allen anderen noch so complicirten Fällen stattfinden.

Wenn man ferner statt der vollkommen schwarzen Körper auch solche betrachtet, welche die auf sie fallenden Strahlen nur theilweise absorbiren, oder wenn man statt der homogenen Wärme solche Wärme betrachtet, welche Wellensysteme von verschiedenen

Wellenlängen gemischt enthält, oder endlich, wenn man, anstatt alle Strahlen als unpolarisirte anzusehen, auch die Polarisationserscheinungen berücksichtigt, so kommen in allen diesen Fällen immer nur solche Umstände zur Sprache, welche in gleicher Weise für die vom Körper ausgesandte Wärme gelten, wie für die, welche er von anderen Körpern empfängt.

Es ist nicht nöthig, auf alle diese Umstände hier näher einzugehen, denn diese Umstände finden auch bei der gewöhnlichen, ohne Concentration vor sich gehenden Strahlung statt, und der Zweck der vorliegenden Abhandlung bestand nur darin, die Wirkungen zu betrachten, welche durch die Concentration der Strahlen möglicher Weise entstehen können.

§. 19. Zusammenstellung der Resultate.

Die Hauptresultate der angestellten Betrachtungen können kurz folgendermaassen ausgesprochen werden.

1) Um die Wirkungen der gewöhnlichen, ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung mit dem Grundsatze, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, in Einklang zu bringen, ist es nothwendig anzunehmen, dass die Stärke der Emission eines Körpers nicht nur von seiner eigenen Beschaffenheit und seiner Temperatur, sondern auch von der Natur des umgebenden Mittels abhängt, und zwar in der Weise, dass die Emissionsstärken in verschiedenen Mitteln im umgekehrten Verhältnisse stehen mit den Quadraten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlen in den Mitteln, oder im directen Verhältnisse mit den Quadraten der Brechungscoefficienten der Mittel.

2) Wenn diese Annahme über den Einfluss des umgebenden Mittels auf die Emission richtig ist, so ist jener Grundsatz nicht nur bei der ohne Concentration stattfindenden Wärmestrahlung erfüllt, sondern er muss auch gültig bleiben, wenn die Strahlen durch Brechungen oder Reflexionen in beliebiger Weise concentrirt werden, denn die Concentration kann zwar die absolute Grösse der Wärmemengen, welche zwei Körper einander durch Strahlung mittheilen, nicht aber das Verhältniss dieser Wärmemengen ändern.

ABSCHNITT XIII.

Discussionen über die vorstehend entwickelte Form der mechanischen Wärmetheorie und ihre Begründung.

§. 1. Verschiedene Ansichten über die Beziehung zwischen Wärme und mechanischer Arbeit.

Meine Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, soweit sie in diesem Bande ihrem wesentlichen Inhalte nach wiedergegeben sind, haben vielfachen Widerspruch gefunden, und es wird vielleicht zweckmässig sein, aus den darüber geführten Discussionen hier Einiges mitzutheilen, da in ihnen manche Punkte zur Sprache gekommen sind, über welche auch jetzt noch bei den Lesern Zweifel entstehen können, deren Hebung durch die Kenntniss dessen, was darüber schon geschrieben ist, erleichtert werden kann.

Wie schon in Abschnitt III. erwähnt wurde, ist der erste bedeutsame Versuch, die Arbeitsleistung der Wärme auf ein allgemeines Princip zurückzuführen, von S. Carnot gemacht, welcher, von der Voraussetzung ausgehend, dass die Quantität der vorhandenen Wärme unveränderlich sei, annahm, das Herabsinken von Wärme von einer höheren zu einer tieferen Temperatur bringe in ähnlicher Weise mechanische Arbeit hervor, wie das Herabsinken von Wasser von einer höher gelegenen zu einer tiefer gelegenen Stelle.

Neben dieser Auffassung machte sich allmälig die Ansicht geltend, dass die Wärme eine Bewegung sei und dass zur Hervorbringung von Arbeit Wärme verbraucht werde. Diese Ansicht war seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts schon hin und wieder von einzelnen Autoren, wie Rumford, Davy und Seguin, geäussert[1]); aber erst in den vierziger Jahren dieses Jahrhunderts wurde das dieser Ansicht entsprechende Gesetz der Aequivalenz von Wärme und Arbeit von Mayer und Joule bestimmt ausgesprochen und von Letzterem durch mannigfaltige und ausgezeichnete experimentelle Untersuchungen als richtig nachgewiesen. Bald darauf wurde auch das verallgemeinerte Princip von der Erhaltung der Energie von Mayer[2]) und in besonders klarer und umfassender Weise von Helmholtz[3]) aufgestellt und auf verschiedene Naturkräfte angewandt.

Hiermit war für die Wärmelehre der Anknüpfungspunkt neuer Untersuchungen gegeben; aber die Durchführung derselben bot natürlich bei einer schon so weit ausgebildeten Theorie, welche mit allen Zweigen der Naturwissenschaft verwachsen war und das ganze physikalische Denken beeinflusste, grosse Schwierigkeiten dar. Auch war die Anerkennung, welche die Carnot'sche Behandlung der mechanischen Wirkungen der Wärme, besonders nachdem sie von Clapeyron in eine elegante analytische Form gebracht war, sich erworben hatte, für die Annahme der neuen Ansicht ungünstig. Man glaubte sich nämlich in die Alternative versetzt, entweder die Carnot'sche Theorie beizubehalten, und die neuere Ansicht, nach welcher zur Erzeugung von Arbeit Wärme verbraucht werden muss, zu verwerfen, oder umgekehrt sich zu der neueren Ansicht zu bekennen und die Carnot'sche Theorie verwerfen.

§. 2. Abhandlungen von Thomson und mir.

Sehr bestimmt spricht sich über den damaligen Stand der Sache der berühmte englische Physiker W. Thomson aus in

---

[1]) In einem 1837 publicirten Aufsatze von Mohr wird die Wärme an einigen Stellen eine Bewegung, an anderen eine Kraft genannt.

[2]) Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel; Heilbronn 1845.

[3]) Ueber die Erhaltung der Kraft; Berlin 1847.

einer interessanten Abhandlung, welche er im Jahre 1849, als die meisten der oben erwähnten Untersuchungen von Joule schon erschienen und ihm bekannt waren, unter dem Titel „*An Account of Carnot's Theory of the Motive Power of Heat; with Numerical Results deduced from Regnault's Experiments on Steam*“ publicirte [1]). In dieser Abhandlung stellt er sich noch ganz auf den Standpunkt von Carnot, dass die Wärme Arbeit leisten könne, ohne dass die Quantität der vorhandenen Wärme sich ändere. Er führt zwar eine Schwierigkeit an, welche dieser Ansicht entgegensteht, und sagt dann (S. 545): „Es möchte scheinen, dass die Schwierigkeit ganz vermieden werden würde, wenn man Carnot's Fundamental-Axiom verliesse, eine Ansicht, welche von Herrn Joule stark urgirt wird.“ Er fügt jedoch hinzu: „Wenn wir dieses aber thun, so stossen wir auf unzählige andere Schwierigkeiten, welche, ohne fernere experimentelle Untersuchung und einen vollständigen Neubau der Wärmetheorie von Grund auf, unüberwindlich sind. Es ist in der That das Experiment, auf welches wir ausschauen müssen, entweder für eine Bestätigung des Carnot'schen Axioms und eine Erklärung der Schwierigkeit, die wir betrachtet haben, oder für eine ganz neue Grundlage der Wärmetheorie.“

Zur Zeit des Erscheinens dieser Abhandlung schrieb ich meine erste Abhandlung über die mechanische Wärmetheorie, welche im Februar 1850 in der Berliner Akademie vorgetragen und im März- und Aprilheft von Poggendorff's Annalen gedruckt wurde. In dieser Abhandlung habe ich versucht, jenen Neubau zu beginnen, ohne fernere Experimente abzuwarten, und ich glaube darin die von Thomson erwähnten Schwierigkeiten soweit überwunden zu haben, dass für alle weiteren Untersuchungen dieser Art der Weg geebnet war.

Ich zeigte darin, in welcher Weise die Fundamentalbegriffe und die ganze mathematische Behandlung der Wärme abgeändert werden mussten, wenn man den Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit annahm, und wies ferner nach, dass man auch die Carnot'sche Theorie nicht ganz zu verwerfen brauchte, sondern einen von dem Carnot'schen nur wenig abweichenden, aber auf andere Art begründeten Satz annehmen konnte, welcher sich mit dem Satze von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit vereinigen liess, um mit ihm zusammen die Grundlage der neuen

---

[1]) *Transact. of the Royal Soc. of Edinb. Vol. XVI., p. 541.*

Theorie zu bilden. Diese Theorie entwickelte ich dann speciell für vollkommene Gase und gesättigte Dämpfe und erhielt dadurch eine Reihe von Gleichungen, welche in derselben Form jetzt allgemein angewandt werden und oben im zweiten und sechsten Abschnitte mitgetheilt sind.

§. 3. Abhandlung von Rankine und spätere Abhandlung von Thomson.

In demselben Monate (Februar 1850), in welchem meine Abhandlung in der Berliner Akademie vorgetragen wurde, wurde auch in der Edinburger *Royal Society* eine sehr werthvolle Abhandlung von Rankine vorgetragen, welche dann in den *Transactions* dieser Gesellschaft veröffentlicht ist[1]).

Rankine stellt darin die Hypothese auf, dass die Wärme in einer wirbelnden Bewegung der Molecüle bestehe, und leitet daraus in sehr geschickter Weise eine Reihe von Sätzen über das Verhalten der Wärme ab, welche mit den von mir aus dem *ersten* Hauptsatze abgeleiteten übereinstimmen.

Der *zweite* Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ist in dieser Abhandlung von Rankine noch nicht behandelt, sondern erst in einer anderen Abhandlung, welche ein Jahr später (April 1851) in der Edinburger *Royal Society* vorgetragen wurde[2]). Er sagt darin selbst[3]), er habe zuerst gegen die Richtigkeit der Schlussweise, durch welche ich diesen Satz aufrecht erhalten habe, Zweifel gehegt, sei dann aber durch W. Thomson, dem er seine Zweifel mitgetheilt habe, veranlasst, den Gegenstand näher zu untersuchen. Dabei habe er gefunden, dass dieser Satz nicht als ein unabhängiges Princip in der Wärmetheorie zu behandeln sei, sondern dass er als eine Folge aus denjenigen Gleichungen abgeleitet werden könne, welche in der ersten Section seiner früheren Abhandlung gegeben seien. Er theilt dann den neuen Beweis des Satzes mit, welcher aber, wie weiter unten noch gezeigt werden soll, für gewisse und gerade sehr wichtige Fälle mit seinen eigenen an anderen Stellen ausgesprochenen Ansichten im Widerspruche steht.

---

1) Bd. XX, S. 147. Sie ist 1854 mit einigen Abänderungen noch einmal abgedruckt im *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. VII, p. 1, 111 u. 172.*

2) *Edinb. Trans. XX, p. 205; Phil. Mag. S. IV, Vol. VII, p. 249.*

3) *Phil. Mag. Vol. VII, p. 250.*

Rankine hat die Abhandlung von 1851 seiner früheren Abhandlung wegen der Verwandtschaft des Inhaltes als fünfte Section hinzugefügt. Dadurch ist bei einigen Autoren der Irrthum entstanden, als ob diese neue Abhandlung schon ein Theil jener früheren Abhandlung gewesen wäre und demnach Rankine gleichzeitig mit mir einen Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie gegeben hätte. Aus dem Vorstehenden ist aber ersichtlich, dass sein Beweis (abgesehen davon, in wie weit er genügend ist), erst ein Jahr nach dem meinigen gegeben ist.

Ebenfalls im Jahre 1851 (im März) wurde auch von W. Thomson eine zweite Abhandlung über die Wärmetheorie der Edinburger *Royal Society* vorgelegt [1]). In dieser Abhandlung verlässt er seinen früheren Standpunkt in Bezug auf die Carnot'sche Theorie, und schliesst sich meiner Auffassung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie an. Er hat dabei die Betrachtungen erweitert. Während ich mich bei der mathematischen Behandlung des Gegenstandes auf die Betrachtung der Gase, der Dämpfe und des Verdampfungsprocesses beschränkte, und nur hinzufügte, man werde leicht sehen, wie sich entsprechende Anwendungen auch auf andere Fälle machen lassen, hat Thomson eine Reihe allgemeinerer, vom Aggregatzustande der Körper unabhängiger Gleichungen entwickelt, und ist erst dann zu specielleren Anwendungen übergegangen.

In einem Punkte aber bleibt auch diese spätere Abhandlung hinter der meinigen zurück. Thomson hält nämlich auch hier noch für gesättigten Dampf am Mariotte'schen und Gay-Lassac'schen Gesetze fest, indem er eine auf permanente Gase bezügliche Hypothese, welche ich bei meinen Entwickelungen zu Hülfe genommen hatte [2]), beanstandet. Er sagt darüber [3]): „Ich kann nicht einsehen, dass irgend eine Hypothese der Art, wie die von Clausius bei seinen Untersuchungen über diesen Gegenstand zu Grunde gelegte, welche, wie er zeigt, zu Bestimmungen der Dichtigkeiten des gesättigten Dampfes bei verschiedenen Temperaturen führt, die enorme Abweichungen von den Gas-Gesetzen der Veränderung

---

[1]) *Edinb. Trans. Vol. XX, p. 261*; wieder abgedruckt im *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. IV, p. 8, 105 und 168.* Deutsch in Krönig's Journ. für Physik des Auslandes Bd. III, S. 233.

[2]) Nämlich die in Abschnitt II, §. 2 besprochene Nebenannahme.

[3]) *Edinb. Trans. Vol. XX, p. 277; Phil. Mag. Vol. IV, p. 111*; und Krönig's Journal Bd. III, S. 260.

mit Temperatur und Druck ergeben, wahrscheinlicher ist, oder wahrscheinlich der Richtigkeit näher kommt, als dass die Dichtigkeit des gesättigten Dampfes diesen Gesetzen folgt, wie es gewöhnlich von ihr angenommen wird. Im gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft würde es vielleicht unrichtig sein, zu sagen, dass eine Hypothese wahrscheinlicher sei, als die andere."

Erst mehrere Jahre später, nachdem er sich durch gemeinsam mit Joule angestellte Versuche davon überzeugt hatte, dass die von mir angenommene Hypothese in den von mir selbst schon bezeichneten Grenzen richtig ist, hat auch er zur Bestimmung der Dichtigkeiten des gesättigten Dampfes dasselbe Verfahren, wie ich, angewandt [1]).

Rankine und Thomson haben die im Vorigen angegebene Stellung, welche unsere ersten Arbeiten über die mechanische Wärmetheorie zu einander einnahmen, so viel ich weiss, immer auf das Bereitwilligste anerkannt. Thomson sagt in seiner Abhandlung [2]): „Die ganze Theorie der bewegenden Kraft der Wärme gründet sich auf die beiden folgenden Sätze, welche beziehentlich von Joule und von Carnot und Clausius herstammen". Demgemäss führt er darauf den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie unter der Bezeichnung „*Prop. II.* (Carnot and Clausius)" an. Nachdem er sodann einen von ihm selbst gefundenen Beweis dieses Satzes mitgetheilt hat, fährt er fort [3]): „Es ist nicht mit dem Wunsche eine Priorität zu reclamiren, dass ich diese Auseinandersetzungen mache, da das Verdienst, den Satz zuerst auf richtige Principien gegründet zu haben, vollständig Clausius gebührt, welcher seinen Beweis desselben im Monat Mai des vorigen Jahres im zweiten Theile seines Aufsatzes über die bewegende Kraft der Wärme publicirte."

§. 4. Einwendungen von Holtzmann.

Von anderen Seiten dagegen fand meine Abhandlung, an welche sich in demselben und den darauf folgenden Jahren noch

---

1) *Phil. Trans. 1854, p. 321.*

2) *Edinb. Trans. Vol. XX, p. 264*; *Phil. Mag. Vol. IV, p. 11*; Krönig's Journal III, S. 238.

3) An den obigen Orten S. 266, 14 und 242.

eine Reihe anderer, zur Vervollständigung der Theorie dienender Abhandlungen anschlossen, wie schon gesagt, vielfachen und zum Theil heftigen Widerspruch.

Die ersten Einwendungen rührten von Holtzmann her. Dieser hatte im Jahre 1845 eine kleine Schrift[1]) publicirt, in welcher es anfangs scheint, als wolle er den Gegenstand von dem Gesichtspunkte aus betrachten, dass zur Erzeugung von Arbeit nicht bloss eine Aenderung in der *Vertheilung* der Wärme, sondern auch ein wirklicher *Verbrauch* von Wärme nöthig sei, und dass umgekehrt durch Verbrauch von Arbeit wiederum Wärme *erzeugt* werden könne. Er sagt (S. 7): „die Wirkung der zu dem Gase getretenen Wärme ist somit entweder Temperaturerhöhung, verbunden mit Vermehrung der Elasticität, oder eine mechanische Arbeit, oder eine Verbindung von beiden, und eine mechanische Arbeit ist das Aequivalent der Temperaturerhöhung. Die Wärme kann man nur durch ihre Wirkungen messen; von den beiden genannten Wirkungen passt hierzu besonders die mechanische Arbeit, und diese soll in dem Folgenden hierzu gewählt werden. Ich nenne Wärmeeinheit die Wärme, welche bei ihrem Zutritte zu Gas die mechanische Arbeit a zu leisten vermag, d. h. um bestimmte Maasse zu gebrauchen, die a Kilogramme auf 1 Meter erheben kann". Später (S. 12) bestimmt er auch den Zahlenwerth der Constanten a auf dieselbe Weise, wie es schon früher von Mayer geschehen ist und oben in Abschnitt II. §. 5 auseinandergesetzt wurde, und erhält eine Zahl, die ganz dem von Joule auf verschiedene andere Weisen bestimmten mechanischen Aequivalente der Wärme entspricht. Bei der weitern Ausführung der Theorie aber, nämlich bei der Entwickelung der Gleichungen, durch welche die von ihm gezogenen Schlüsse vermittelt werden, verfährt er ebenso wie Clapeyron, so dass darin doch wieder stillschweigend die Annahme liegt, dass die Quantität der vorhandenen Wärme unveränderlich sei, und dass diejenige Wärmemenge, welche ein Körper aufgenommen hat, während er aus einem gegebenen Anfangszustande in seinen gegenwärtigen Zustand übergegangen ist, sich als Function der Veränderlichen, welche den Zustand des Körpers bestimmen, darstellen lasse.

Nachdem ich nun in meiner ersten Abhandlung auf die in

[1]) Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe; von C. Holtzmann. Mannheim 1845; auch Pogg. Ann. Bd. 72a.

jenem Verfahren liegende Inconsequenz aufmerksam gemacht und den Gegenstand in anderer Weise behandelt hatte, schrieb Holtzmann einen Artikel[1]), in welchem er die Unzulässigkeit meiner Behandlungsweise und speciell der Annahme, dass bei der Hervorbringung von mechanischer Arbeit Wärme verbraucht werde, nachzuweisen suchte.

Der erste von ihm erhobene bestimmte Einwand war mathematischer Natur. Er machte nämlich eine ähnliche Entwickelung, wie ich sie in meiner Abhandlung gemacht hatte, um bei einem aus unendlich kleinen Veränderungen eines Körpers bestehenden einfachen Kreisprocesse den Ueberschuss der von dem Körper aufgenommenen über die von ihm abgegebene Wärme zu bestimmen und mit der geleisteten Arbeit zu vergleichen. Da nun aber bei einem solchen Kreisprocesse sowohl die geleistete Arbeit, als auch jener Wärmeüberschuss unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung sind, so muss in der ganzen Entwickelung darauf geachtet werden, dass alle vorkommenden Grössen zweiter Ordnung, soweit sie sich nicht gegenseitig aufheben, Berücksichtigung finden. Dieses hatte Holtzmann verabsäumt und dadurch war er zu einer Schlussgleichung gelangt, welche in sich selbst einen Widerspruch enthielt, und in welcher er daher einen Beweis für die Unzulässigkeit dieser ganzen Behandlungsweise der Sache gefunden zu haben glaubte. Diesen Einwand konnte ich in meiner Erwiderung[2]) natürlich leicht widerlegen.

Als einen ferneren gegen meine Theorie sprechenden Umstand führte er an, dass nach meinen Formeln die specifische Wärme eines vollkommenen Gases von dem Drucke, unter dem es steht, unabhängig sein müsste, während doch nach den Versuchen von Suermann sowohl wie nach denen von De la Roche und Bérard die specifische Wärme der Gase mit abnehmendem Drucke zunähme.

Ueber diesen Widerspruch zwischen meiner Theorie und den damals bekannten und für richtig gehaltenen Versuchen schrieb ich in meiner Erwiderung: „In dieser Beziehung muss ich zunächst daran erinnern, dass, wenn jene Beobachtungen wirklich streng richtig wären, sie noch nicht gegen den Grundsatz über die Aequivalenz von Wärme und Arbeit sprechen würden, sondern nur gegen

[1]) Pogg. Ann. Bd. 82, S. 445.
[2]) Ebendas. Bd. 83, S. 118.

die von mir gemachte Nebenannahme, dass ein permanentes Gas, wenn es sich bei constanter Temperatur ausdehnt, nur so viel Wärme verschluckt, als zu der *äusseren* Arbeit, die es dabei leistet, verbraucht wird. Ferner ist es aber hinlänglich bekannt, wie unzuverlässig die Bestimmungen der specifischen Wärme der Gase überhaupt noch sind, und um so mehr die wenigen Beobachtungen, welche bis jetzt bei verschiedenem Drucke angestellt wurden. Ich konnte mich daher nicht veranlasst sehen, wegen dieser Beobachtungen, obwohl sie mir schon bei der Abfassung meiner früheren Arbeit wohl bekannt waren, jene Nebenannahme aufzugeben, indem die anderen Gründe, welche *dafür* sprechen, dass sie in den von mir dort angegebenen Grenzen richtig sei, durch diesen *dagegen* sprechenden Grund durchaus nicht aufgewogen werden".

Diese Bemerkung fand ihre volle Bestätigung durch die einige Jahre später veröffentlichten Versuche von Regnault über die specifische Wärme der Gase, welche in der That zu dem Resultate führten, dass jene früheren Beobachtungen ungenau gewesen waren, und die specifische Wärme der permanenten Gase vom Drucke nicht merklich abhängt.

§. 5. Einwendungen von Decher.

Ein anderer, sehr energischer Angriff gegen meine Theorie wurde im Jahre 1858 von Professor G. Decher gemacht in einer in Dingler's Polytechnischem Journal[1]) erschienenen Abhandlung „über das Wesen der Wärme".

Herr Decher bezeichnet darin die mathematischen Entwickelungen, welche in der ersten Hälfte meiner Abhandlung von 1850 und in einer Abhandlung von 1854 vorkommen, als Misshandlung der Analysis, Pfuscherei und Unsinn, versieht die Gleichungen und Sätze, welche er daraus citirt, mit einfachen oder doppelten Ausrufungszeichen, und sagt zum Schlusse, nachdem er die Unhaltbarkeit der von mir gewonnenen Resultate, seiner Ansicht nach, hinlänglich bewiesen hat[2]): „Dies nun sind die Ergebnisse, durch welche der Fundamentalsatz der neueren Wärmetheorie begründet und seine Uebereinstimmung mit der Erfahrung nachgewiesen wer-

---

[1]) Bd. 148, S. 1, 81, 161 und 241.

[2]) A. a. O. S. 256.

den soll; sie zeigen, im klaren Lichte betrachtet, dass die viel gerühmte Arbeit des Herrn Clausius, auf welcher dieser selbst und andere Physiker wie auf einem sicher begründeten Fundamente weiter gebaut haben, nicht mehr ist, als eine taube Nuss, welche äusserlich viel verspricht, aber keinen reellen Inhalt hat".

Von der zweiten Hälfte meiner Abhandlung von 1850, welche sich auf den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie bezieht, sagt Herr Decher (S. 163), dass er sich, nachdem er die erste Hälfte kennen gelernt habe, zur weiteren Beachtung der zweiten nicht veranlasst gesehen habe.

Bei näherer Betrachtung der von Herrn Decher gegen meine mathematischen Entwickelungen erhobenen Einwände erkennt man bald, dass sie dadurch veranlasst sind, dass Herr Decher die Bedeutung der von mir aufgestellten Differentialgleichungen, welche nicht allgemein integrabel sind, sondern sich erst dann integriren lassen, wenn noch eine weitere Relation zwischen den Veränderlichen angenommen wird, nicht richtig verstanden hat. Er hat die Grösse, auf welche diese Differentialgleichungen sich beziehen, nämlich die von einem Körper beim Uebergange aus einem gegebenen Anfangszustande in seinen gegenwärtigen Zustand aufgenommene Wärmemenge, trotz allem, was ich darüber gesagt hatte, noch immer als eine Function der Veränderlichen, welche den Zustand des Körpers bestimmen, angesehen. Er spricht sich darüber nach Anführung der von mir für Gase aufgestellten Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = A\,\frac{R}{v},$$

worin A das calorische Aequivalent der Arbeitseinheit, also den reciproken Werth von E bedeutet, auf S. 243 folgendermaassen aus: „In der Gleichung (1) sind die Formen $\left(\frac{dQ}{dv}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dt}\right)$ ganz bestimmt die Ableitungen einer bestimmten Function Q von v und t je nach v und t als einzige Veränderliche genommen, und wie auch diese Function beschaffen sein mag, und welche Abhängigkeit zwischen v und t gedacht werden mag, die rechte Seite jener Gleichung muss immer Null sein".

Da ich aus dieser selbst bei einem Mathematiker von Fach wahrgenommenen unrichtigen Auffassung die Ueberzeugung gewann, dass die Bedeutung und Behandlung jener Art von Differentialgleichungen, obwohl sie schon längst durch Monge festgestellt

war, doch nicht so allgemein bekannt geworden war, wie ich vorausgesetzt hatte, so behandelte ich in meiner Antwort[1]), nachdem ich einige andere von Decher angeregte Punkte kurz besprochen hatte, diesen Gegenstand etwas vollständiger und gab eine mathematische Auseinandersetzung desselben, welche mir geeignet schien, ähnlichen Missverständnissen für die Zukunft vorzubeugen. Diese Auseinandersetzung habe ich später der Sammlung meiner Abhandlungen als mathematische Einleitung voraufgeschickt und auch in die mathematische Einleitung der vorliegenden zweiten Auflage habe ich das Wesentlichste davon wieder mit aufgenommen.

§. 6. Grundsatz, auf welchem mein Beweis des zweiten Hauptsatzes beruht.

Die späteren Einwendungen gegen meine Theorie und die Abweichungen späterer Entwickelungen von den meinigen beziehen sich hauptsächlich auf die Art, wie ich den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie bewiesen habe.

Ich habe nämlich, wie in Abschnitt III. mitgetheilt ist, zum Beweise dieses Satzes den Grundsatz aufgestellt:

Die Wärme kann nicht von selbst (oder ohne Compensation) aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen.

Dieser Grundsatz ist von dem wissenschaftlichen Publikum sehr verschieden aufgenommen. Die Einen schienen ihn als so selbstverständlich zu betrachten, dass sie es für unnöthig hielten, ihn als besonderen Grundsatz auszusprechen, die Anderen zogen umgekehrt seine Richtigkeit in Zweifel.

§. 7. Zeuner's erste Behandlung des Gegenstandes.

Die am Schlusse des vorigen Paragraphen zuerst erwähnte Auffassung findet sich in der von Zeuner im Jahre 1860 herausgegebenen sehr verdienstlichen Schrift „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie“.

Zeuner theilt in dieser Schrift meinen Beweis des zweiten Hauptsatzes im Wesentlichen in der Form mit, in welcher Reech

[1]) Dingler's Polytechnisches Journal Bd. 150, S. 29.

ihn wiedergegeben hat[1]). In einem Punkte aber weicht seine Darstellung von jener ab. Reech nämlich führt den Satz, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, ausdrücklich als einen von mir aufgestellten Grundsatz an, und basirt darauf den Beweis. Zeuner dagegen erwähnt diesen Satz gar nicht, sondern zeigt nur, dass, wenn für irgend zwei Körper der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie nicht gültig wäre, man durch zwei mit diesen beiden Körpern in entgegengesetzter Weise ausgeführte Kreisprocesse ohne eine sonstige Veränderung Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übertragen könnte, und fährt dann fort[2]): „Da wir beide Processe beliebig oft wiederholen können, indem wir in der bezeichneten Weise die beiden Körper abwechselnd anwenden, so würde daraus hervorgehen, dass wir mit Nichts, ohne Aufwand von Arbeit oder Wärme, fortwährend Wärme von einem Körper von niederer zu einem Körper von höherer Temperatur überführen könnten; was eine Ungereimtheit wäre.“

Dass die Unmöglichkeit, ohne eine sonstige Veränderung Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper überzuführen, so ohne Weiteres evident sei, wie es hier in der kurzen Bemerkung: „was eine Ungereimtheit wäre“, angedeutet ist, werden, wie ich glaube, wenige Leser zugeben. Bei der Wärmeleitung und der unter gewöhnlichen Umständen stattfindenden Wärmestrahlung kann man allerdings sagen, dass diese Unmöglichkeit durch die alltägliche Erfahrung feststehe. Aber schon bei der Wärmestrahlung kann die Frage entstehen, ob es nicht vielleicht durch künstliche Concentration der Wärmestrahlen mit Hülfe von Brennspiegeln oder Brenngläsern möglich wäre, eine höhere Temperatur zu erzeugen, als die Körper haben, welche die Strahlen aussenden, und dadurch zu bewirken, dass die Wärme in einen wärmeren Körper übergehe. Ich habe es daher für nöthig gehalten, diesen Gegenstand in einem besonderen Aufsatze zu behandeln, dessen Inhalt im vorigen Abschnitte mitgetheilt ist. Noch complicirter wird die Sache in solchen Fällen, wo Wärme in Arbeit und Arbeit in Wärme verwandelt wird, sei es durch Wirkungen der Art wie die der Reibung, des Luftwiderstandes und des elektrischen

---

[1]) *Récapitulation très-succincte des recherches algébriques faites sur la théorie des effects mécaniques de la chaleur par différents auteurs; Journ. de Liouville II. sér. t. I, p. 58.*

[2]) S. 24 seines Buches.

Leitungswiderstandes, sei es dadurch, dass ein oder mehrere Körper solche Zustandsänderungen erleiden, die mit theils positiver, theils negativer, innerer und äusserer Arbeit verbunden sind, und bei denen daher, wie man im gewöhnlichen Sprachgebrauche zu sagen pflegt, Wärme *latent* oder *frei* wird, welche Wärme die veränderlichen Körper anderen Körpern von verschiedenen Temperaturen entziehen und mittheilen können.

Wenn man für alle solche Fälle, wie complicirt die Vorgänge auch immer sein mögen, behauptet, dass ohne eine andere bleibende Veränderung, welche als eine Compensation anzusehen ist, niemals Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übertragen werden kann, so glaube ich, dass man diesen Satz nicht als einen ganz von selbst verständlichen behandeln darf, sondern ihn vielmehr als einen neu aufgestellten Grundsatz, von dessen Annahme oder Nichtannahme die Gültigkeit des Beweises abhängt, anführen muss.

§. 8. Zeuner's spätere Behandlung des Gegenstandes.

Nachdem ich gegen jene von Zeuner angewandte Ausdrucksweise den im vorigen Paragraphen mitgetheilten Einwand in einem im Jahre 1863 publicirten Aufsatze erhoben hatte, hat er in der im Jahre 1866 erschienenen zweiten Auflage seines Buches zur Begründung des zweiten Hauptsatzes einen anderen Weg eingeschlagen.

Indem er den Zustand eines Körpers als durch den Druck p und das Volumen v bestimmt annimmt, bildet er für die Wärmemenge dQ, welche der Körper während einer unendlich kleinen Veränderung aufnimmt, die Differentialgleichung:

$$dQ = A(Xdp + Ydv), \tag{2}$$

worin X und Y Functionen von p und v darstellen, und A das calorische Aequivalent der Arbeitseinheit bedeutet, welche Differentialgleichung bekanntlich, so lange p und v als von einander unabhängige Veränderliche betrachtet werden, nicht integrabel ist. Dann fährt er auf Seite 41 fort:

„Es sei nun aber S eine neue Function von p und v, deren Form zwar bis jetzt ebenso wenig bekannt sein mag, wie die der Functionen X und Y, der wir aber eine Bedeutung beilegen wollen, die sogleich aus den weiteren Betrachtungen hervorgehen

wird. Multiplicirt und dividirt man die rechte Seite vorstehender Gleichung mit S, so ergiebt sich:

$$(3) \qquad dQ = AS\left[\frac{X}{S}dp + \frac{Y}{S}dv\right].$$

Man kann nun offenbar S so wählen, dass der Ausdruck in der Klammer *ein vollständiges Differential* wird, mit anderen Worten, es soll der Werth $\frac{1}{S}$ der integrirende Factor oder wie sich auch sagen lässt, es soll S *der integrirende Divisor* des Ausdruckes in der Klammer der Gleichung (2) sein."

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass in der aus (3) abgeleiteten Gleichung:

$$(4) \qquad \frac{dQ}{S} = A\left[\frac{X}{S}dp + \frac{Y}{S}dv\right]$$

die ganze rechte Seite ein vollständiges Differential ist, und dass somit für einen Kreisprocess die Gleichung

$$(5) \qquad \int \frac{dQ}{S} = 0$$

gelten muss. Auf diese Weise gelangt Zeuner zu einer Gleichung, welche der im vierten Abschnitte unter (VII.) angeführten Gleichung

$$\int \frac{dQ}{\tau} = 0$$

ähnlich ist.

Die Aehnlichkeit ist aber nur eine äusserliche. Das Wesentliche der letzteren Gleichung besteht nämlich darin, dass die Grösse τ eine Function *der Temperatur allein* ist, und dass ferner diese Temperaturfunction *von der Natur des betrachteten Körpers unabhängig, also für alle Körper gleich* ist. Die Grösse S dagegen ist von Zeuner als eine Function der *beiden* Veränderlichen p und v, von welchen der Zustand des Körpers abhängt, eingeführt, und da ferner die in der Gleichung (2) vorkommenden Functionen X und Y für verschiedene Körper verschieden sind, so muss man vorläufig auch von der Grösse S annehmen, *dass sie für verschiedene Körper verschieden sein könne.* So lange dieses von der Grösse S gilt, ist durch die Gleichung (5) für den Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie noch gar nichts gewonnen, denn dass es überhaupt einen integrirenden Factor, den man mit $\frac{1}{S}$ bezeichnen kann, geben muss, mittelst dessen der in der Glei-

chung (2) in Klammer stehende Ausdruck zu einem vollständigen Differential gemacht werden kann, ist ganz selbstverständlich.

Demnach ist bei der Zeuner'schen Beweisführung das ganze Gewicht darauf zu legen, wie er nun weiter zu dem Schlusse gelangt, *dass S eine blosse Temperaturfunction und zwar eine für alle Körper gleiche Temperaturfunction sein muss*, welche er dann als das wahre Maass der Temperatur bezeichnen kann.

Er lässt dazu einen Körper verschiedene Veränderungen erleiden, welche so stattfinden, dass der Körper, während S einen constanten Werth hat, Wärme aufnimmt, und während S einen anderen constanten Werth hat, Wärme abgiebt, und welche zusammen einen mit Arbeitsgewinn oder Arbeitsverbrauch verbundenen Kreisprocess bilden. Diesen Vorgang vergleicht er mit dem Heben oder Senken eines Gewichtes von einem Niveau zu einem anderen und der damit verbundenen mechanischen Arbeit, und sagt dann auf S. 68: „Der weitere Vergleich führt zu dem interessanten Resultate, dass wir die Function S *als eine Länge*, *als eine Höhe* auffassen können, und dass der Ausdruck

$$\frac{Q}{AS}$$

als ein *Gewicht* angesehen werden kann; ich werde daher auch in der Folge den vorstehenden Werth das *Wärmegewicht* nennen."

Da hier für eine Grösse, welche S enthält, ein Name eingeführt wird, in welchem nichts vorkommt, was sich auf die Natur des betrachteten Körpers bezieht, so scheint dabei stillschweigend die durch die frühere Definition in keiner Weise begründete Voraussetzung gemacht zu sein, dass S eine von der Natur des betrachteten Körpers unabhängige Grösse sei.

Zeuner führt dann jenen Vergleich zwischen den auf die Schwerkraft und den auf die Wärme bezüglichen Vorgängen noch weiter aus, und überträgt einige für die Schwerkraft geltende Sätze auf die Wärme, indem er dabei, wie vorher angegeben, S als Höhe und $\frac{Q}{AS}$ als Gewicht auffasst. Nachdem er dann endlich noch gesagt hat, dass die auf solche Weise erhaltenen Sätze sich bestätigen, wenn man unter S die Temperatur versteht, fährt er auf Seite 74 fort: „Wir sind daher berechtigt, den weiteren Untersuchungen die Hypothese zu Grunde zu legen, *dass die Function S das wahre Temperaturmaass darstellt.*"

Es ergiebt sich hieraus, dass in den Betrachtungen, welche Zeuner in der zweiten Auflage seines Buches zur Begründung des zweiten Hauptsatzes anstellt, als wesentliche Grundlage nur die Analogie zwischen der Arbeitsleistung durch die Schwerkraft und durch die Wärme dient, und im Uebrigen dasjenige, was bewiesen werden müsste, theils stillschweigend vorausgesetzt, theils ausdrücklich als Hypothese angenommen wird.

§. 9. Rankine's Behandlung des Gegenstandes.

Ich wende mich nun zu den Autoren, welche der Ansicht waren, dass mein Grundsatz nicht hinlänglich zuverlässig, oder selbst, dass er unrichtig sei.

Ich muss in dieser Beziehung zunächst die schon oben angedeutete Behandlungsart, welche Rankine geglaubt hat an die Stelle der meinigen setzen zu müssen, etwas näher besprechen.

Rankine unterscheidet, wie auch ich es gethan habe, in der Wärme, welche man einem Körper mittheilen muss, um seine Temperatur zu erhöhen, zwei verschiedene Theile, nämlich den Theil, welcher zur Vermehrung der im Körper wirklich vorhandenen Wärme dient, und den Theil, welcher zu Arbeit verbraucht wird. Der letztere Theil umfasst die zu innerer und zu äusserer Arbeit verbrauchte Wärme zusammen.

Für die zu Arbeit verbrauchte Wärme wendet Rankine einen Ausdruck an, welchen er in der ersten Section seiner Abhandlung aus der Hypothese der Molecularwirbel abgeleitet hat. Auf diese Ableitungsweise brauche ich hier nicht näher einzugehen, da schon der Umstand, dass sie auf einer eigenthümlichen Hypothese über die Beschaffenheit der Molecüle und über die Art ihrer Bewegungen beruht, hinreichend erkennen lässt, dass man es dabei mit complicirten Betrachtungen zu thun haben muss, welche manchen Zweifeln über den Grad ihrer Zuverlässigkeit Raum bieten. Ich habe mich in meinen Abhandlungen bei der Entwickelung der Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie nicht auf specielle Ansichten über die Molecularconstitution der Körper, sondern nur auf gewisse allgemeine Grundsätze gestützt, und demgemäss würde ich, selbst wenn der eben genannte Umstand der einzige wäre, welchen man gegen Rankine's Beweis anführen könnte, doch glauben, meine Behandlungsart des Gegenstandes als die geeignetere

festhalten zu müssen. Aber die Bestimmung des zweiten Theiles der dem Körper mitzutheilenden Wärme, nämlich des Theiles, welcher zur Vermehrung der im Körper wirklich vorhandenen Wärme dient, ist noch viel unsicherer.

Rankine stellt die Vermehrung der im Körper vorhandenen Wärmemenge, wenn seine Temperatur t sich um dt ändert, mag das Volumen des Körpers sich dabei gleichzeitig auch ändern, oder nicht, einfach durch das Product $\mathfrak{k}dt$ dar, und behandelt die hierin vorkommende Grösse $\mathfrak{k}$, welche er die wahre specifische Wärme (*the real specific heat*) nennt, in seinem Beweise *als eine vom Volumen unabhängige Grösse.* Nach einem ausreichenden Grunde für dieses Verfahren sucht man aber in seiner Abhandlung vergebens; vielmehr kommen Angaben vor, welche damit geradezu im Widerspruche stehen.

In der Einleitung zu seiner Abhandlung stellt er in Gleichung (XIII.) einen Ausdruck für die wahre specifische Wärme $\mathfrak{k}$ auf, welcher einen mit k bezeichneten Factor enthält, und von diesem sagt er[1]): *The coefficient k (which enters into the value of specific heat) being the ratio of the vis viva of the entire motion impressed on the atomic atmospheres by the action of their nuclei, to the vis viva of a peculiar kind of motion, may be conjectured to have a specific value for each substance depending in a manner yet unknown on some circumstance in the constitution of its atoms. Although it varies in some cases for the same substance in the solid, liquid and gaseous states, there is no experimental evidence that it varies for the same substance in the same condition.* Hiernach ist also Rankine der Ansicht, dass die wahre specifische Wärme einer und derselben Substanz in verschiedenen Aggregatzuständen verschieden sein könne; und auch dafür, dass sie in demselben Aggregatzustande als unveränderlich anzunehmen sei, führt er als Grund nur an, dass kein experimenteller Beweis für das Gegentheil vorliege.

In einer späteren Schrift von Rankine „*A Manual of the Steam Engine and other Prime Movers, London and Glasgow* 1859“ findet sich auf Seite 307 über diesen Gegenstand ein noch bestimmterer Ausspruch, worin es heisst: *a change of real specific heat, sometimes considerable, often accompanies the change between any two of those conditions* (nämlich der drei Aggregatzustände).

---

1) *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. VII, p. 10.*

Wie grosse Unterschiede Rankine bei der wahren specifischen Wärme einer und derselben Substanz in verschiedenen Aggregatzuständen für möglich hält, geht daraus hervor, dass er (auf derselben Seite) sagt, beim flüssigen Wasser sei die durch Beobachtung bestimmte specifische Wärme, welche er die scheinbare specifische Wärme nennt, nahe gleich der wahren specifischen Wärme. Da nun Rankine sehr wohl weiss, dass die beobachtete specifische Wärme des flüssigen Wassers doppelt so gross ist, als die des Eises, und mehr als doppelt so gross, als die des Dampfes, und da die wahre specifische Wärme des Eises und des Dampfes jedenfalls nur kleiner und nicht grösser sein kann, als die beobachtete, so folgt daraus, dass Rankine annehmen muss, die wahre specifische Wärme des flüssigen Wassers übertreffe diejenige des Eises und des Dampfes um das Doppelte oder mehr.

Stellt man sich nun die Frage, wie nach dieser Auffassung bei einem Körper, dessen Temperatur t um dt, und dessen Volumen v um dv wächst, die dabei stattfindende Zunahme der im Körper wirklich vorhandenen Wärmemenge ausgedrückt werden müsste, so ergiebt sich Folgendes.

Für den Fall, dass der Körper bei der Volumenänderung keine Aenderung des Aggregatzustandes erleidet, würde man die Zunahme der vorhandenen Wärmemenge zwar, wie Rankine es gethan hat, durch ein einfaches Product von der Form $\mathfrak{k}dt$ darstellen können, aber man müsste dem Factor $\mathfrak{k}$ für verschiedene Aggregatzustände verschiedene Werthe zuschreiben.

In solchen Fällen aber, wo der Kŏrper bei der Volumenänderung auch seinen Aggregatzustand ändert, (also z. B. in dem oft betrachteten Falle, wo eine Quantität eines Stoffes theils im flüssigen, theils im dampfförmigen Zustande gegeben ist, und wo bei der Volumenänderung sich die Grösse dieser beiden Theile ändert, indem entweder von der Flüssigkeit noch ein Theil verdampft, oder von dem Dampfe sich ein Theil niederschlägt), würde man die mit einer gleichzeitigen Temperatur- und Volumenänderung verbundene Zunahme der vorhandenen Wärmemenge nicht mehr durch ein einfaches Product $\mathfrak{k}dt$ darstellen können, sondern müsste dazu einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{k}dt + \mathfrak{k}_1 dv$$

anwenden. Wenn nämlich die wahre specifische Wärme eines Stoffes in verschiedenen Aggregatzuständen verschieden wäre, so

müsste man mit Nothwendigkeit schliessen, dass auch die in ihm vorhandene Wärmemenge von seinem Aggregatzustande abhänge, so dass gleiche Quantitäten des Stoffes im festen, flüssigen und luftförmigen Zustande verschiedene Mengen von Wärme enthalten. Es müsste somit in einem Falle, wo ohne Temperaturänderung ein Theil des Stoffes seinen Aggregatzustand ändert, auch die in dem Stoffe im Ganzen vorhandene Wärmemenge sich ändern.

Hieraus folgt, dass Rankine die Art, wie er die Zunahme der vorhandenen Wärmemenge ausdrückt, und den Ausdruck in seinem Beweise behandelt, nach seinen eigenen sonstigen Aussprüchen nur für solche Fälle als zulässig betrachten darf, wo keine Aenderungen des Aggregatzustandes vorkommen, und dass er daher seinem Beweise auch nur für diese Fälle Gültigkeit zuschreiben kann. Für alle Fälle, wo Aenderungen des Aggregatzustandes vorkommen, bliebe der Satz also unbewiesen; und doch sind diese Fälle von besonderer Wichtigkeit, indem gerade sie es sind, auf welche man den Satz bisher am meisten angewandt hat.

Ja man muss noch weiter gehen und sagen, dass hierdurch der Beweis auch für solche Fälle, wo keine Aenderungen des Aggregatzustandes vorkommen, alle Zuverlässigkeit verliert. Wenn Rankine annimmt, dass die wahre specifische Wärme in verschiedenen Aggregatzuständen verschieden sein kann, so sieht man gar nicht ein, aus welchem Grunde man sie in demselben Aggregatzustande als unveränderlich ansehen muss. Man weiss, dass bei festen und flüssigen Körpern, auch ohne Aenderung des Aggregatzustandes, Aenderungen in den Cohäsionsverhältnissen eintreten können, und dass bei gasförmigen Körpern ausser den grossen Volumenverschiedenheiten auch der Unterschied vorkommt, dass sie, je nachdem sie mehr oder weniger weit von ihrem Condensationspunkte entfernt sind, mehr oder weniger genau dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folgen. Weshalb soll man nun, wenn Aenderungen des Aggregatzustandes einen Einfluss auf die wahre specifische Wärme haben können, nicht jenen Veränderungen ebenso gut einen, wenn auch geringeren, Einfluss der Art zuschreiben dürfen? Die Voraussetzung, dass die wahre specifische Wärme in demselben Aggregatzustande unveränderlich sei, ist also bei Rankine nicht nur unbegründet gelassen, sondern sie würde, wenn die sonstigen von ihm gemachten Annahmen richtig wären, sogar im hohen Grade unwahrscheinlich sein.

Rankine hat den vorstehend mitgetheilten Bemerkungen über seinen Beweis, welche schon in einem im Jahre 1863 von mir veröffentlichten Aufsatze[1]) vorkamen, nicht widersprochen, und hat vielmehr in einem darauf bezüglichen späteren Artikel[2]) seine früher mehrfach ausgesprochene Ansicht, dass die wahre specifische Wärme eines Körpers in verschiedenen Aggregatzuständen verschieden sein könne, wodurch die Gültigkeit seines Beweises auf solche Fälle beschränkt wird, in denen keine Aenderung des Aggregatzustandes vorkommt, ausdrücklich aufrecht erhalten.

§. 10. Einwendung von Hirn.

Einen noch bestimmteren Einwand gegen meinen Grundsatz, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, hat Hirn in seinem 1862 erschienenen Werke „*Exposition analytique et experimentale de la théorie mécanique de la chaleur*“ und in zwei daran sich anschliessenden Artikeln im *Cosmos*[3]) erhoben, indem er eine eigenthümliche Operation beschrieben hat, welche ein auf den ersten Blick allerdings überraschendes Resultat giebt. Auf eine Erwiderung von meiner Seite[4]) hat er dann seinen Einwand dahin erläutert[5]), dass er dadurch nur auf einen *scheinbaren* Widerspruch habe aufmerksam machen wollen, während er im Wesentlichen mit mir übereinstimme, und in demselben Sinne hat er sich dann auch in der zweiten und dritten Auflage seines schätzbaren Werkes ausgesprochen.

Dessenungeachtet glaube ich den Einwand und meine Widerlegung desselben hier mittheilen zu dürfen, weil die in ihm ausgedrückte Auffassung des Gegenstandes in der That eine naheliegende ist, welche sich leicht auch anderweitig geltend machen könnte. Ein unter solchen Umständen erhobener Einwand hat seine volle wissenschaftliche Berechtigung, und wenn er in so klarer und präciser Weise gemacht wird, wie es im vorliegenden Falle von Hirn durch Anführung jener sinnreich erdachten Operation

---

1) Pogg. Ann. Bd. 120, S. 426.
2) *Phil. Mag. Ser. IV., Vol. XXX., p. 410.*
3) *Tome XXII. (premier semestre 1863) p. 283 und 413.*
4) A. a. O. p. 560.
5) A. a. O. p. 734.

geschehen ist, so kann das für die Wissenschaft nur nützlich sein, denn dadurch, dass der scheinbar vorhandene Widerspruch bestimmt und augenfällig dargelegt wird, wird die Auseinandersetzung des Gegenstandes sehr erleichtert, und es kann auf die Art der Vortheil erreicht werden, dass eine Schwierigkeit, die sonst vielleicht noch zu manchen Missverständnissen Veranlassung geben, und wiederholte längere Discussionen nöthig machen würde, mit einem Male und für immer beseitigt wird. Ich bin daher, indem ich den Gegenstand noch einmal zur Sprache bringe, weit davon entfernt, Herrn Hirn aus seinem Einwande einen Vorwurf machen zu wollen, sondern glaube vielmehr, dass er dadurch seine sonstigen Verdienste um die mechanische Wärmetheorie noch vermehrt hat.

Die erwähnte Operation, an welche Hirn seine Betrachtungen geknüpft hat, ist folgende.

Es seien zwei Cylinder von gleichem Querschnitte, A und B in der nebenstehenden Fig. 32, gegeben, welche unten durch eine verhältnissmässig enge Röhre in Verbindung stehen, und in welchen luftdicht schliessende Stempel beweglich sind. Die Stempelstangen sollen mit Zähnen versehen sein, welche von beiden Seiten in die Zähne eines zwischen ihnen befindlichen Zahnrades eingreifen, so dass, wenn der eine Stempel hinunter geht, der andere um eben so viel heraufgehen muss. Der unter den Stempeln befindliche Raum in den beiden Cylindern, mit Einschluss der Verbindungsröhre, muss also bei der Bewegung der Stempel unveränderlich bleiben, indem mit einer Abnahme des Raumes in dem einen Cylinder eine eben so grosse Zunahme im andern verbunden ist.

Fig. 32.

Wir denken uns zuerst den Stempel in B ganz unten befindlich, und daher den in A möglichst weit oben, und nehmen an, der Cylinder A sei mit einem vollkommenen Gase von beliebiger Dichtigkeit angefüllt, dessen Temperatur t_0 heissen möge. Nun soll der Stempel in A sich allmälig abwärts, und demgemäss der in B sich aufwärts bewegen, so dass das Gas nach und nach aus dem Cylinder A in den Cylinder B getrieben wird. Die Verbindungsröhre, durch welche das Gas strömen muss, soll dabei constant auf einer Tem-

peratur t_1 erhalten werden, die höher ist als t_0, so dass jedes Gasquantum, welches die Röhre durchströmt, dabei auf die Temperatur t_1 erwärmt wird, und mit dieser Temperatur in den Cylinder B tritt. Die Wände der beiden Cylinder dagegen sollen für Wärme undurchdringlich sein, so dass das Gas innerhalb der Cylinder weder Wärme erhalten noch abgeben kann, sondern nur beim Durchströmen der Verbindungsröhre Wärme von Aussen zugeführt erhält. Um in Bezug auf die Temperaturen ein bestimmtes Beispiel zu haben, wollen wir annehmen, die Anfangstemperatur des Gases im Cylinder A sei diejenige des Gefrierpunktes 0^0, und die Temperatur der Verbindungsröhre sei 100^0, indem die Röhre z. B. vom Dampfe kochenden Wassers umspült werde.

Es lässt sich nun ohne Schwierigkeit übersehen, was das Resultat dieser Operation sein wird.

Die erste kleine Quantität Gas, welche die Verbindungsröhre passirt, erwärmt sich dabei von 0^0 auf 100^0, und dehnt sich zugleich um so viel aus, wie es dieser Erwärmung entspricht, nämlich um angenähert $^{100}/_{273}$ ihres ursprünglichen Volumens. Dadurch wird das noch im Cylinder A befindliche Gas etwas zusammengedrückt und der in beiden Cylindern stattfindende Druck etwas erhöht. Die folgende kleine Quantität Gas, welche durch die Röhre strömt, dehnt sich ebenfalls aus, und drückt dadurch das in beiden Cylindern befindliche Gas zusammen. Ebenso trägt jede folgende überströmende Gasmenge durch ihre Ausdehnung dazu bei, nicht nur das noch in A befindliche Gas noch weiter zusammenzudrücken, sondern auch das schon in B befindliche, welches sich vorher ausgedehnt hatte, wieder mehr und mehr zusammenzudrücken, so dass seine Dichtigkeit sich allmälig wieder der ursprünglichen nähert. Die Zusammendrückung bewirkt in beiden Cylindern eine Erwärmung des Gases, und da die Gasquantitäten, welche nach und nach in den Cylinder B treten, bei ihrem Eintritte alle die Temperatur 100^0 haben, so müssen sie nachträglich Temperaturen über 100^0 annehmen, und zwar muss dieser Temperaturüberschuss um so grösser sein, je mehr die betreffende Quantität nachträglich wieder zusammengedrückt wird.

Betrachtet man daher den Zustand am Schlusse der Operation, nachdem alles Gas aus A nach B getrieben ist, so muss das in der obersten Schicht dicht unter dem Stempel befindliche Gas, welches zuerst übergetreten ist, und daher die grösste nachträgliche Zusammendrückung erlitten hat, am wärmsten sein. Die

folgenden Schichten sind der Reihe nach weniger warm bis zur untersten, welche gerade die Temperatur 100⁰ besitzt, die sie beim Ueberströmen angenommen hat. Es ist für unsern vorliegenden Zweck nicht nöthig, die Temperaturen der verschiedenen Schichten einzeln zu kennen, sondern es genügt, die *Mitteltemperatur* zu kennen, welche zugleich diejenige Temperatur ist, die entstehen würde, wenn die in den verschiedenen Schichten herrschenden Temperaturen sich durch Leitung oder Vermischung der Gasquantitäten zu einer gemeinsamen Temperatur ausglichen. Diese Mitteltemperatur beträgt etwa 120⁰.

In einem der später im *Cosmos* erschienenen Artikel hat Hirn diese Operation noch dahin vervollständigt, dass er annimmt, das Gas in B werde nach seiner Erwärmung mit Quecksilber von 0⁰ in Berührung gebracht, und dadurch wieder bis 0⁰ abgekühlt; dann werde es unter denselben Umständen, unter denen es von A nach B gelangt war, von B nach A zurückgetrieben und dabei in gleicher Weise erwärmt; dort werde es wieder durch Quecksilber abgekühlt; darauf abermals von A nach B getrieben u. s. f., so dass man einen periodischen Vorgang erhalte, bei dem das Gas immer wieder in seinen Anfangszustand zurückkehre, und alle von der Wärmequelle abgegebene Wärme schliesslich in das zur Abkühlung benutzte Quecksilber übergehe. Indessen wollen wir auf diese Erweiterung des Verfahrens hier nicht eingehen, sondern uns auf die Betrachtung der vorher beschriebenen einfachen Operation beschränken, durch welche das Gas von 0⁰ auf eine Mitteltemperatur von 120⁰ erwärmt wird, indem diese Operation schon das Wesentliche, worauf der Einwand von Hirn sich stützt, enthält.

Bei dieser Operation ist äusserlich weder Arbeit gewonnen noch verloren, denn da der Druck in den beiden Cylindern immer gleich ist, so werden beide Stempel in jedem Momente mit gleicher Kraft nach oben gedrückt, und diese Kräfte heben sich an dem Zahnrade, in welches die Zähne der Stempelstangen eingreifen, auf, so dass, abgesehen von der Reibung, die geringste Kraft genügt, um die Drehung des Zahnrades im einen oder anderen Sinne zu veranlassen, und dadurch einen Stempel hinunter und den anderen herauf zu treiben. Der Ueberschuss der Wärme in dem Gase kann also nicht durch äussere Arbeit erzeugt sein.

Der Vorgang ist, wie man leicht sieht, folgender. Indem eine gegen die ganze vorhandene Gasmenge als sehr klein vorausgesetzte Quantität des Gases sich in der Röhre erwärmt, und

sich dabei ausdehnt, muss sie von der Wärmequelle soviel Wärme erhalten, wie zur Erwärmung *unter constantem Drucke* nothwendig ist. Von dieser Wärmemenge dient ein Theil zur Vermehrung der wirklich im Gase vorhandenen Wärme, und ein anderer Theil wird zu der Ausdehnungsarbeit verbraucht. Da aber die Ausdehnung des in der Röhre befindlichen Gases eine Zusammendrückung des in den Cylindern befindlichen zur Folge hat, so muss hier eben so viel Wärme erzeugt werden, als dort verbraucht wird. Jener zweite Theil der von der Wärmequelle abgegebenen Wärme, welcher sich in der Röhre in Arbeit umgesetzt hatte, kommt somit in den Cylindern wieder als Wärme zum Vorschein, und dient dazu, das noch in A befindliche Gas über seine Anfangstemperatur 0° zu erwärmen, und das schon in B befindliche Gas, welches beim Eintritte die Temperatur 100° hatte, über diese Temperatur zu erwärmen, und dadurch den oben erwähnten Temperaturüberschuss hervorzubringen.

Demnach kann man, ohne auf die Zwischenvorgänge Rücksicht zu nehmen, sagen, dass die ganze Wärmemenge, welche das Gas zu Ende der Operation mehr enthält, als zu Anfang, aus der an der Verbindungsröhre angebrachten Wärmequelle stammt. Dadurch erhält man das eigenthümliche Resultat, dass durch einen Körper von 100°, nämlich durch den die Röhre umspülenden Wasserdampf, das eingeschlossene Gas auf über 100°, und zwar, sofern wir nur die Mitteltemperatur ins Auge fassen, auf 120° erwärmt ist. Hierin soll nun ein Widerspruch mit dem Grundsatze, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, liegen, indem die von dem Dampfe an das Gas abgegebene Wärme aus einem Körper von 100° in einen Körper von 120° übergegangen sei.

Dabei ist aber ein Umstand unbeachtet gelassen. Wenn das Gas schon zu Anfang eine Temperatur von 100° oder darüber gehabt hätte, und es dann durch den Dampf, welcher nur die Temperatur von 100° besitzt, zu einer noch höheren Temperatur erwärmt wäre, so läge darin allerdings ein Widerspruch gegen meinen Grundsatz. So verhält sich die Sache aber nicht. Damit das Gas zu Ende der Operation wärmer als 100° sei, muss es nothwendig zu Anfang kälter als 100° sein, und in unserem Beispiele, wo es am Schlusse die Temperatur 120° hat, hatte es zu Anfang die Temperatur 0°. Die Wärme, welche der Dampf dem Gase mitgetheilt hat, hat also einestheils dazu gedient, das Gas von 0° bis

100^0 zu erwärmen, und anderntheils dazu, es von 100^0 auf 120^0 zu bringen.

Da es sich nun in meinem Grundsatze um die Temperaturen handelt, welche die Körper, zwischen denen der Wärmeübergang stattfindet, in dem Momente haben, wo sie die Wärme abgeben oder aufnehmen, und nicht um die, welche sie nachträglich besitzen, so muss man den bei dieser Operation stattfindenden Wärmeübergang folgendermaassen auffassen. Der eine Theil der vom Dampfe abgegebenen Wärme ist in das Gas übergegangen, so lange seine Temperatur noch unter 100^0 war, ist also aus dem Dampfe in einen kälteren Körper übergegangen; und nur der andere Theil der Wärme, welcher dazu gedient hat, das Gas von 100^0 an noch weiter zu erwärmen, ist aus dem Dampfe in einen wärmeren Körper übergegangen.

Vergleicht man dieses mit jenem Grundsatze, nach welchem, wenn ohne eine Verwandlung von Arbeit in Wärme oder eine Veränderung in der Molecularanordnung eines Körpers, Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen soll, dann nothwendig in derselben Operation auch Wärme aus einem wärmeren in einen kälteren Körper übergehen muss, so sieht man leicht, dass vollständige Uebereinstimmung herrscht. Das Eigenthümliche in der von Hirn ersonnenen Operation besteht nur darin, dass in ihr nicht zwei *verschiedene* Körper vorkommen, von denen der eine kälter und der andere wärmer ist, als die Wärmequelle, sondern dass *ein und derselbe* Körper, nämlich das Gas, in einem Theile der Operation die Rolle des kälteren, und im anderen Theile der Operation die Rolle des wärmeren Körpers spielt. Hierin liegt aber keine Abweichung von meinem Satze, sondern es ist nur ein specieller Fall von den vielen möglichen Fällen.

Auch Dupré hat ähnliche Einwände gegen meinen Grundsatz erhoben, wie Hirn, auf welche ich hier aber nicht näher eingehen will, da sie nichts wesentlich neues enthalten.

§. 11. Einwendungen von Wand.

Einige Jahre später wurde derselbe Satz wieder angegriffen von Th. Wand in einer ausgedehnten Abhandlung, welche unter dem Titel „Kritische Darstellung des zweiten Satzes der mechani-

schen Wärmetheorie“ in Carl's Repertorium der Experimental-Physik[1]) erschien.

Wand fasst das Schlussresultat der Betrachtungen seiner Abhandlung in folgende drei Aussprüche[2]) zusammen.

1. „*Der zweite Satz der mechanischen Wärmetheorie, d. i. der Satz, dass kein aufsteigender Wärmeübergang ohne Verrichtung von Arbeit oder ohne einen entsprechenden absteigenden Wärmeübergang möglich sei, ist falsch.*“

2. „*Die aus diesem Satze gezogenen Folgerungen sind nur angenäherte empirische Wahrheiten, welche nur so weit Geltung beanspruchen können, als sie durch Versuche bestätigt werden.*“

3. „*Für Berechnungen zu technischen Zwecken kann man den zweiten Satz als richtig ansehen, da die Versuche für die zu Arbeits- und Kälteerzeugung benützten Stoffe eine sehr nahe Uebereinstimmung mit diesem Satze nachweisen.*“

Jch muss gestehen, dass ich es bedenklich finden würde, Aussprüche dieser Art neben einander zu stellen. Wenn man einen Satz in so vielen Fällen mit den Thatsachen übereinstimmend gefunden hat, dass man sich zu dem Ausspruche gezwungen sieht, für Berechnungen zu technischen Zwecken könne er als richtig angesehen werden, so sollte man sich, wie ich meine, schwer dazu entschliessen, ihn dessenungeachtet für falsch zu erklären, da die Vermuthung, dass die scheinbar noch vorhandenen Widersprüche sich bei genauerer Betrachtung der Sache auch aufklären lassen werden, zu nahe liegt.

Unter den Gründen, welche Wand gegen den Satz geltend macht, sind, wenn wir von den auf die innere Arbeit und die elektrischen Erscheinungen bezüglichen Betrachtungen für jetzt absehen, weil diese Gegenstände im vorliegenden Bande noch nicht behandelt wurden, vorzugsweise folgende zu erwähnen.

Auf Seite 314 heisst es:

„Wenn man behauptet, dass bei der Ueberführung einer gewissen Wärmequantität von einer niederen zu einer höheren Temperatur eine gewisse Quantität Arbeit nothwendiger Weise vernichtet werden muss, so muss man consequenter Weise auch behaupten, dass beim Herabsinken desselben Wärmequantums von einer höheren zu einer niederen Temperatur wieder dieselbe Arbeit zum Vorschein kommt, sei es nun, dass dieses Herabfallen durch

[1]) Bd. IV. (1868) S. 281 und 369.

[2]) A. a. O. S. 400.

blosse Leitung oder durch einen umkehrbaren Kreisprocess geschieht. Das ist aber nicht der Fall, indem das Herabfallen von Wärme durch Leitung ohne irgend eine andere Veränderung vor sich geht. Der zweite Satz kann somit für die Temperaturausgleichungen durch blosse Leitung kein Aequivalent verlangen und dies ist in Beziehung auf Logik eine der schwächsten Seiten des zweiten Satzes, die zu nachstehender Inconvenienz führt."

Der in dieser Stelle zur Sprache gebrachte Umstand, dass nur der aufsteigende Wärmeübergang der Compensation bedarf, während der absteigende Wärmeübergang auch ohne Compensation stattfinden kann, ist im Obigen vielfach besprochen und in Abschnitt X. allgemeiner dahin ausgedrückt, dass negative Verwandlungen nicht ohne positive, wohl aber positive Verwandlungen ohne negative geschehen können. Dieser Umstand giebt allerdings dem zweiten Hauptsatze eine Form, die weniger einfach ist, als die des ersten, dass er aber der Logik widerspräche, möchte wohl schwer nachweisbar sein.

Was ferner die am Schlusse jener Stelle erwähnte Inconvenienz anbetrifft, so gelangt Herr Wand zu derselben durch folgende Betrachtungen. Er nimmt an, es werde ein einfacher Kreisprocess ausgeführt, bei welchem die beiden Körper, zwischen denen der Wärmeübergang stattfindet, und welche er den erwärmenden und den erkältenden Körper nennt, Temperaturen haben, die dicht bei 0° liegen, und nur um eine unendlich kleine Differenz, welche er mit dt bezeichnet, von einander verschieden sind. Wir wollen, da die Bezeichnung unwesentlich ist, statt des Zeichens dt, welches in der folgenden mathematischen Entwickelung noch einmal mit anderer Bedeutung vorkommen wird, lieber das Zeichen δ wählen, und somit den beiden Körpern die (vom Gefrierpunkte an gemessenen) Temperaturen 0 und δ zuschreiben. Herr Wand setzt ferner noch fest, dass der Kreisprocess seiner Grösse und seinem Sinne nach so eingerichtet werde, dass dabei die Wärmemenge 1 vom wärmeren zum kälteren Körper übergehe, woraus dann folgt, dass die Wärmemenge $\frac{\delta}{273}$ durch den Kreisprocess in Arbeit verwandelt wird. Dann fährt er fort:

„Ist der Kreisprocess beendigt, so erwärme ich den ganzen Apparat sammt dem erwärmenden und erkältenden Körper um 100°; alsdann bleibt die Temperaturdifferenz δ zwischen dem erwärmenden und erkältenden Körper unverändert. Wenn man

nun die gewonnene Arbeit auf dem Wege des umgekehrten Kreisprocesses vernichten will, so muss man, um dies zu erreichen, dem kälteren Körper die Wärme $\frac{373}{273}$ entziehen. Der kältere Körper verliert also die Wärme $\frac{100}{273}$ und giebt sie an den wärmeren Körper ab, und wenn nun nach dem umgekehrten Kreisprocesse wieder alles auf die Anfangstemperatur 0° erkaltet wird, so haben wir wieder den Anfangszustand; es wurde weder Arbeit geleistet, noch verzehrt, und doch hat ein Uebergang von Wärme aus dem während des ganzen zusammengesetzten Processes kälter gebliebenen zweiten Körper in den wärmer gebliebenen ersten Körper stattgefunden."

„Hiermit ist allerdings der zweite Satz nicht widerlegt. Denn um dieses Resultat zu erzielen, müssten die Apparate beständig abwechselnd erhitzt und erkältet werden, d. h. es müsste Wärme von wärmeren zu kälteren Körpern übergehen; allein dieser Uebergang geschah durch Leitung, und da hierfür kein Aequivalent verlangt werden kann, so folgt aus dem hier beschriebenen Vorgang, dass es für die Vertheilung der Wärme keineswegs gleichgültig ist, ob man nichts thut, oder einen zusammengesetzten Kreisprocess, wie der hier beschriebene, ausführt."

Es handelt sich also hier um zwei bei verschiedenen Temperaturen ausgeführte entgegengesetzte Kreisprocesse, bei denen die geleistete und verbrauchte Arbeit sich aufhebt, aber mehr Wärme vom kälteren zum wärmeren Körper, als umgekehrt, übergeht, und Herr Wand meint, *dass der übrig bleibende Wärmeübergang vom kälteren zum wärmeren Körper ohne Compensation stattgefunden habe.*

Dabei hat er aber gewisse, in der ziemlich complicirten Operation vorkommende Temperaturdifferenzen unbeachtet gelassen. Er lässt nämlich nach dem ersten Kreisprocesse, bei dem der wärmere Körper Wärme abgegeben und der kältere Wärme aufgenommen hat, den ganzen Apparat sammt den beiden Körpern um 100° erwärmen, und nach dem zweiten Kreisprocesse, bei dem der kältere Körper Wärme abgegeben und der wärmere Wärme aufgenommen hat, den ganzen Apparat sammt den beiden Körpern um 100° abkühlen. Nun ändern aber die beiden Körper durch die Wärmeabgabe und Wärmeaufnahme ihre Temperaturen etwas, und die Wärmereservoire, welche ihre Erwärmung und Abkühlung um 100°

bewirken, erhalten daher während der Abkühlung die Wärme nicht bei denselben Temperaturen zurück, bei denen sie sie bei der Erwärmung geliefert haben, und hierdurch entstehen Wärmeübergänge, welche Herr Wand nicht in Rechnung gebracht hat.

Freilich sind die vorkommenden Temperaturdifferenzen sehr gering, da die beiden Körper so gross gewählt werden müssen, dass die durch den Kreisprocess in ihnen verursachten Temperaturänderungen gegen den Unterschied ihrer ursprünglichen Temperaturen sehr klein bleiben. Dafür sind aber auch die Wärmemengen, welche die Körper bei ihrer Erwärmung und Abkühlung um 100^0 den Wärmereservoiren entziehen und wieder zurückgeben, sehr gross, und da man bei der Bestimmung der Wärmeübergänge die Temperaturdifferenzen mit den betreffenden Wärmemengen zu multipliciren hat, so gelangt man zu Grössen, welche gerade ausreichend sind, um den zwischen den Körpern selbst übrig gebliebenen Wärmeübergang zu compensiren.

Um dieses Letztere nachzuweisen, wollen wir die Rechnung wirklich ausführen.

Was zunächst den zwischen den beiden Körpern selbst übrig gebliebenen Wärmeübergang anbetrifft, so hat dieser, da die Temperaturen der Körper 0 und δ sind, und die Wärmemenge gleich $\frac{100}{273}$ ist, den Aequivalenzwerth:

$$\frac{100}{273}\left(\frac{1}{273+\delta}-\frac{1}{273}\right),$$

oder unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in Bezug auf δ:

$$-\frac{100}{(273)^3}\delta.$$

Es kommt nun darauf an, den Aequivalenzwerth derjenigen Wärmeübergänge zu bestimmen, welche bei der Erwärmung und Abkühlung der Körper um 100^0 eintreten. Dazu haben wir nach Abschnitt IV. §. 5 jedes von einem der beiden Körper aus einem Wärmereservoir aufgenommene Wärmeelement (wobei abgegebene Wärmeelemente als aufgenommene negative Wärmeelemente gerechnet werden), durch die absolute Temperatur zu dividiren, welche der Körper im Momente der Aufnahme hat, und dann die negativen Integrale für die Erwärmung und Abkühlung zu bilden.

Wir wollen die Masse jedes der beiden Körper mit M und seine specifische Wärme, welche wir als constant voraussetzen, mit

C bezeichnen, dann ist die Wärmemenge, welche er während der Temperaturerhöhung um dt aufnimmt, gleich $MCdt$, und dieses Product wollen wir als Ausdruck des Wärmeelementes anwenden. Dabei wollen wir zur Bequemlichkeit noch für den reciproken Werth von MC ein besonderes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$\varepsilon = \frac{1}{MC}, \tag{6}$$

so dass nun das Wärmeelement durch $\frac{1}{\varepsilon}dt$ dargestellt wird. Das Product MC muss als sehr gross und daher die Grösse ε als sehr klein angenommen werden, und zwar so, dass die Letztere selbst gegen den schon sehr kleinen Temperaturunterschied δ noch sehr klein ist.

Betrachten wir nun den ersten Kreisprocess, so hatte vor demselben der kältere Körper die Temperatur 0 und der wärmere die Temperatur δ. Während des Kreisprocesses empfängt der erstere die Wärmemenge 1 und verliert der letztere die Wärmemenge $1 + \frac{\delta}{273}$. Diese Wärmemengen müssen durch MC dividirt, oder mit ε multiplicirt werden, um die durch sie bewirkten Temperaturänderungen der Körper zu erhalten, und somit hat nach dem Kreisprocesse der kältere Körper die Temperatur ε und der wärmere die Temperatur $\delta - \left(1 + \frac{\delta}{273}\right)\varepsilon$. Von diesen Temperaturen aus sollen nun beide um 100° erwärmt werden.

Das auf die Erwärmung des kälteren Körpers bezügliche negative Integral ist:

$$A = -\int_{\varepsilon}^{100+\varepsilon} \frac{\frac{1}{\varepsilon}dt}{273 + t}.$$

Indem man hierin die Veränderliche τ mit der Bedeutung

$$\tau = t - \varepsilon$$

einführt, erhält man:

$$A = -\int_{0}^{100} \frac{\frac{1}{\varepsilon}d\tau}{273 + \tau + \varepsilon}.$$

Nun kann man, wenn man bei der Entwickelung nach ε die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, setzen:

$$\frac{1}{273+\tau+\varepsilon}=\frac{1}{273+\tau}-\frac{\varepsilon}{(273+\tau)^2},$$

wodurch man erhält:

$$(7) \qquad A=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{100}\frac{d\tau}{273+\tau}+\int_0^{100}\frac{d\tau}{(273+\tau)^2}.$$

Das auf die Erwärmung des wärmeren Körpers bezügliche negative Integral lautet zunächst:

$$B=-\int_{\delta-\left(1+\frac{\delta}{273}\right)\varepsilon}^{100+\delta-\left(1+\frac{\delta}{273}\right)\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varepsilon}dt}{273+t}$$

und hieraus erhält man in entsprechender Weise wie vorher:

$$(8) \qquad B=-\frac{1}{\varepsilon}\int_\delta^{100+\delta}\frac{d\tau}{273+\tau}-\left(1+\frac{\delta}{273}\right)\int_\delta^{100+\delta}\frac{d\tau}{(273+\tau)^2}.$$

Während des zweiten Kreisprocesses giebt der kältere Körper die Wärmemenge $\frac{373}{273}$ ab, und der wärmere Körper empfängt die Wärmemenge $\frac{373}{273}+\frac{\delta}{273}$. Die Temperaturen der beiden Körper nach dem zweiten Kreisprocesse sind daher:

$$100+\varepsilon-\frac{373}{273}\varepsilon=100-\frac{100}{273}\varepsilon$$

$$100+\delta-\left(1+\frac{\delta}{273}\right)\varepsilon+\left(\frac{373}{273}+\frac{\delta}{273}\right)\varepsilon=100+\delta+\frac{100}{273}\varepsilon.$$

Von diesen Temperaturen aus sollen beide Körper um 100° abgekühlt werden. Das auf diese Abkühlung bezügliche negative Integral ist für den kälteren Körper:

$$C=-\int_{100-\frac{100}{273}\varepsilon}^{-\frac{100}{273}\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varepsilon}dt}{273+t}=\int_{-\frac{100}{273}\varepsilon}^{100-\frac{100}{273}\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varepsilon}dt}{273+t},$$

woraus sich bei entsprechender Behandlung, wie oben, ergiebt:

$$(9)\qquad C = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{100}\frac{d\tau}{273+\tau} + \frac{100}{273}\int_0^{100}\frac{d\tau}{(273+\tau)^2}.$$

Ebenso ergiebt sich für die Abkühlung des wärmeren Körpers:

$$(10)\qquad D = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{100+\delta}\frac{d\tau}{273+\tau} - \frac{100}{273}\int_{\delta}^{100+\delta}\frac{d\tau}{(273+\tau)^2}.$$

Durch Addition der vier Grössen A, B, C und D erhält man den Aequivalenzwerth aller bei der Erwärmung und Abkühlung eingetretenen Wärmeübergänge. Dabei heben sich die mit dem Factor $\frac{1}{\varepsilon}$ behafteten Integrale gegenseitig auf, und von den anderen lassen sich je zwei zusammenziehen, wodurch entsteht:

$$(11)\qquad A+B+C+D = \frac{373}{273}\int_0^{100}\frac{d\tau}{(273+\tau)^2} - \left(\frac{373}{273}+\frac{\delta}{273}\right)\int_{\delta}^{100+\delta}\frac{d\tau}{(273+\tau)^2}.$$

Durch die Ausführung der Integrationen geht die rechte Seite dieser Gleichung zunächst über in:

$$\frac{373}{273}\left(-\frac{1}{373}+\frac{1}{273}\right)-\left(\frac{373}{273}+\frac{\delta}{273}\right)\left(-\frac{1}{373+\delta}+\frac{1}{273+\delta}\right),$$

und wenn man hierin das zweite Product nach δ bis zur ersten Ordnung entwickelt, so heben sich wieder die meisten Glieder auf, und der Ausdruck des Aequivalenzwerthes der bei der Erwärmung und Abkühlung eingetretenen Wärmeübergänge lautet endlich:

$$\frac{100}{(273)^3}\delta.$$

Dieser Ausdruck erfüllt in der That die Bedingung, dass er dem Aequivalenzwerthe jenes zwischen den beiden Körpern selbst übrig gebliebenen Wärmeüberganges gleich und entgegengesetzt ist. Jener Wärmeübergang ist also nicht uncompensirt, wie Herr Wand meint, sondern vollständig compensirt, ganz so, wie der zweite Hauptsatz es verlangt. Man sieht also, dass auch die von Herrn Wand erdachte Operation nicht die geringste Veranlassung zu einem Einwande gegen jenen Satz darbietet.

Einen anderen Einwand gegen den Satz entnimmt Herr Wand aus folgenden Betrachtungen.

Er stellt sich die Frage, ob der Satz aus den Vorstellungen,

welche man sich von dem Wesen und der Wirkung der Wärme bilden kann, nach mechanischen Principien abzuleiten ist. Dazu wendet er zunächst die von mir und Anderen verfochtene Hypothese über die Molecularbewegung gasförmiger Körper an, und findet, dass diese in der That zu dem betreffenden Satze führt. Er sagt dann aber weiter, es genüge nicht, zu beweisen, dass eine einzelne Hypothese dazu führt, man müsse vielmehr beweisen, dass alle möglichen mechanischen Hypothesen über das Wesen der Wärme dazu führen. Demgemäss stellt er nun als weiteres Beispiel eine andere Hypothese auf, welche seiner Meinung nach geeignet sein soll, die Erscheinungen der Ausdehnung und der Vermehrung des Druckes durch die Wärme nachzuahmen, und nach welcher eine Reihe von elastischen Kugeln, von denen je zwei durch eine elastische Feder verbunden sind, so schwingen, dass sie sich stets alle in gleichen Phasen befinden. Aus dieser Hypothese gelangt er zu einer Gleichung, welche von derjenigen, die er als Criterium für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes gewählt hat, abweicht, und daraus zieht er den Schluss: „*Der zweite Satz lässt sich also aus den Principien der Mechanik allgemein nicht ableiten.*“

Einem solchen Schlusse gegenüber kann man aber die Frage stellen, ob denn in der That jene hypothetisch von ihm angenommene Bewegung der wirklich stattfindenden Bewegung, welche wir Wärme nennen, in solcher Weise entspricht, dass für beide dieselben Gleichungen gelten müssen, und so lange das nicht bewiesen ist, kann man auch den Schluss nicht als beweisend ansehen.

Endlich betrachtet Herr Wand noch den in der Natur vorkommenden Cyclus von Vorgängen, dass beim Wachsen der Pflanzen unter dem Einflusse der Wärme- und Lichtstrahlen der Sonne Kohlensäure und Wasser zersetzt werden und Sauerstoff ausgeschieden wird, und dass die so gebildeten organischen Substanzen später beim Verbrennen, oder indem sie einem thierischen Organismus zur Nahrung dienen, sich wieder mit Sauerstoff zu Kohlensäure und Wasser verbinden und dabei Wärme erzeugen. Er sagt, diese Verwandlungsart der Sonnenwärme schlage nach seiner Ansicht dem zweiten Satze geradezu ins Gesicht.

Gegen die Betrachtungen, welche er hierüber anstellt, würde sich manches einwenden lassen; aber ich glaube, dass ein Vorgang, in dem noch so vieles unerklärt ist, wie in dem unter dem Einflusse der Sonnenstrahlen stattfindenden Wachsen der Pflanzen, überhaupt nicht geeignet ist, als Beweis für oder gegen den betreffenden Satz angewandt zu werden.

§. 12. Einwendungen von Tait.

Zum Schlusse muss ich noch die in neuerer Zeit von dem englischen Mathematiker Tait gegen meine Theorie erhobenen Einwendungen erwähnen, welche mich sowohl durch ihren Inhalt, als auch durch ihre Form einigermaassen überrascht haben.

Ich hatte in einem im Jahre 1872 erschienenen Artikel „Zur Geschichte der mechanischen Wärmetheorie“ [1]) gesagt, das von Tait veröffentlichte Buch „*Sketch of Thermodynamics*“ verdanke seine Entstehung ganz unzweifelhaft vorwiegend dem Zwecke, die mechanische Wärmetheorie so viel, wie möglich, für die englische Nation in Anspruch zu nehmen, für welche Behauptung ich die bestimmtesten Gründe anführen kann, und im weiteren Verlaufe jenes Artikels hatte ich gesagt, Herr Tait habe eine von mir aufgestellte Formel W. Thomson zugeschrieben, und als Ort, wo Thomson sie gegeben haben solle, einen Aufsatz citirt, in welchem sich weder diese, noch irgend eine ihr gleichbedeutende Formel befinde. Ich erwartete nun, dass Herr Tait, wenn er meinen Artikel beantwortete, vorzugsweise diese beiden Punkte besprechen werde, von denen besonders der letztere der Aufklärung sehr bedarf. Es erschien nun in der That eine Antwort [2]), und zwar eine in ziemlich gereiztem Tone geschriebene, aber zu meinem Erstaunen waren jene beiden Punkte darin gar nicht erwähnt, sondern es war der ganzen Sache eine andere Wendung gegeben.

Während nämlich in seinem vorher erwähnten Buche meine Untersuchungen über die mechanische Wärmetheorie, wenn auch, meiner Ansicht nach, nicht in die richtige Stellung zu denen der englischen Autoren gebracht, so doch ziemlich weitläufig und im Allgemeinen anerkennend besprochen waren, wurde hier auf einmal ihre Richtigkeit bestritten, indem der von mir aufgestellte Grundsatz, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, für falsch erklärt wurde. Zum Beweise hierfür wurden zwei auf thermoelektrische Ströme bezügliche Erscheinungen angeführt. Ich habe aber in einer bald darauf veröffentlichten Erwiderung [3]) leicht nachweisen können,

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 145, S. 132. — [2]) Pogg. Ann. Bd. 145, S. 496 und *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. 43.* — [3]) Pogg. Ann. Bd. 146, S. 308 und *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. 43.*

dass diese Erscheinungen meinem Grundsatze durchaus nicht widersprechen, und die eine sogar so augenfällig mit ihm übereinstimmt, dass sie als ganz geeignetes Beispiel zu seiner Erläuterung und Bestätigung dienen kann. Da im vorliegenden Bande von elektrischen Erscheinungen noch nicht die Rede gewesen ist, so ist hier nicht der Ort, auf diesen Gegenstand näher einzugehen, sondern ich muss mir seine Besprechung für den zweiten Band meines Werkes vorbehalten.

Ferner sagte Herr Tait in seiner Antwort noch, ich habe durch die Einführung dessen, was ich *innere Arbeit* und *Disgregation* nenne, der Wissenschaft einen erheblichen Schaden zugefügt, machte aber zur Begründung dieses Ausspruches nur die kurze Bemerkung: „*In our present ignorance of the nature of matter, such ideas can do only harm.*“

Was Herr Tait gegen den Begriff der *inneren Arbeit* hat, ist mir nicht verständlich. Seit ich in meiner ersten Abhandlung über die mechanische Wärmetheorie die von der Wärme bei der Zustandsänderung eines Körpers geleistete Arbeit in *äussere* und *innere* Arbeit unterschieden und dann gezeigt habe, dass diese beiden Arbeitsgrössen in ihrem Verhalten wesentlich von einander abweichen, ist diese Unterscheidung, soviel ich weiss, von allen Autoren, welche über die mechanische Wärmetheorie geschrieben haben, in gleicher Weise angewandt.

Was ferner das in einem anderen Bande dieses Werkes zu besprechende Verfahren, die vereinigte innere und äussere Arbeit in Rechnung zu bringen, und den dabei von mir eingeführten Begriff der *Disgregation* anbetrifft, so haben in neuerer Zeit auch rein mechanische Untersuchungen zu einer Gleichung geführt, welche der von mir in der Wärmelehre aufgestellten, worin die Disgregation vorkommt, ganz ähnlich ist, und wenn diese Untersuchungen auch noch nicht als abgeschlossen zu betrachten sind, so lassen sie doch, wie es mir scheint, schon jetzt erkennen, dass die Einführung dieses Begriffes durch die Natur der Sache geboten war.

Demnach glaube ich auch die Einwendungen des Herrn Tait ebenso getrost, wie diejenigen von Holtzmann, Decher u. s. w. der Beurtheilung der Leser anheim geben zu dürfen.

DIE

MECHANISCHE

WÄRMETHEORIE

VON

R. CLAUSIUS.

ZWEITE

umgearbeitete und vervollständigte Auflage des unter dem Titel „Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie“ erschienenen Buches.

ZWEITER BAND.

Anwendung der der mechanischen Wärmetheorie zu Grunde liegenden Principien auf die Electricität.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1879.

DIE MECHANISCHE BEHANDLUNG DER ELECTRICITÄT

VON

R. CLAUSIUS.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1879.

VORREDE.

Die durch die erneute Auflage meines Buches über die mechanische Wärmetheorie veranlasste Ueberarbeitung meiner früheren electrischen Untersuchungen hat mich zu neuen Untersuchungen geführt, welche eine wesentliche Vervollständigung der früheren bilden, und daher neben diesen mit aufgenommen werden mussten. Besonders ist in dieser Beziehung die Behandlung der electrodynamischen Erscheinungen zu erwähnen, welche in der ersten Auflage fehlte, in der gegenwärtigen aber einen beträchtlichen Raum einnimmt. Dadurch ist der auf die Electricität bezügliche Theil des Werkes so angewachsen, dass es zweckmässig erschien, aus ihm einen besonderen Band zu bilden, und die noch übrigen Theile der mechanischen Wärmetheorie für einen dritten Band vorzubehalten.

Zugleich sind die so vervollständigten Entwickelungen nicht mehr bloss als eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die electrischen Erscheinun-

gen, sondern als eine zum Theil von der Wärmelehre unabhängige mechanische Behandlung der Electricität zu betrachten. Aus diesem Grunde habe ich geglaubt, dem Titel, welcher sie als zweiten Band der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet, noch einen anderen Titel hinzufügen zu dürfen, welcher sie als mechanische Behandlung der Electricität bezeichnet, um dadurch anzudeuten, dass dieser Band auch als ein von den anderen Bänden der mechanischen Wärmetheorie unabhängiges, für sich bestehendes Werk gelten kann.

Bonn, im November 1878.

R. Clausius.

INHALT.

Abschnitt I.

Abschnitt II.

Abschnitt III.

Abschnitt IV.

Abschnitt V.

Abschnitt VI.

Abschnitt VII.

Abschnitt VIII.

Abschnitt IX.

Abschnitt X.

Abschnitt XI.

Berichtigung.

Seite 61, Zeile 8 von unten ist statt (43) zu lesen: (44).

Bemerkung über die Bezeichnungsweise.

Es ist in diesem Bande für die partiellen Differentialcoëfficienten die von Jacobi eingeführte Bezeichnungsweise, in welcher die aufrechten *d* durch runde ∂ ersetzt sind, in Anwendung gebracht, weil dadurch an einigen Stellen die Auseinandersetzung an Klarheit gewann. Die dadurch entstandene kleine Abweichung von der Bezeichnungsweise des ersten Bandes werden die Leser wohl kaum bemerken, da jeder Mathematiker daran gewöhnt ist, beim Lesen verschiedener Abhandlungen bald die eine, bald die andere Bezeichnungsweise angewandt zu sehen.

ABSCHNITT I.

Einleitung in die mathematische Behandlung der Electricität.

§. 1. Die Potentialfunction.

In den mathematischen Betrachtungen über Electricität handelt es sich zunächst darum, zu bestimmen, in welcher Weise irgend eine Electricitätsmenge, welche man einem leitenden Körper mittheilt, sich in oder auf demselben anordnet, sei es, dass der Körper von allen anderen leitenden Körpern weit entfernt ist, so dass keine fremden electrischen Kräfte auf ihn einwirken können, sei es, dass er sich in der Nähe anderer leitender Körper befindet, die entweder ebenfalls isolirt und mit gegebenen Electricitätsmengen versehen sein oder mit der Erde in Verbindung stehen können. Diese Bestimmung, sowie die sonstigen auf das Verhalten der Electricität bezüglichen Rechnungen werden sehr erleichtert durch die Einführung einer gewissen Function, welche, nachdem sie schon früher von verschiedenen Mathematikern, wie Laplace und Poisson, angewandt war, i. J. 1828 von George Green unter dem Namen *Potentialfunction* speciell behandelt [1]), und etwas später auch von Gauss zum Gegenstande sehr werthvoller mathematischer Entwickelungen gemacht ist [2]).

---

[1]) An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism; by George Green. Nottingham 1828. Wieder abgedruckt in Crelle's Journ. Bd. 44 und 47.

[2]) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.

Ich habe über diese Function, welche in der mathematischen Physik von ausserordentlicher Wichtigkeit ist, eine Schrift veröffentlicht, welche eben jetzt in dritter, an verschiedenen Stellen vermehrter Auflage erschienen ist [1]). In dieser Schrift habe ich die Haupteigenschaften der Function und einer aus ihr durch Integration abgeleiteten Grösse, nämlich des *Potentials*, näher besprochen. Ich kann mich daher hier darauf beschränken, einige Sätze, welche zum Verständnisse dieser Einleitung und der folgenden Entwickelungen nöthig sind, kurz zu erwähnen, indem ich in Bezug auf die Beweise der Sätze und ihre weiteren Ausführungen auf jene Schrift verweisen kann.

Der Einfachheit wegen werde ich die Betrachtungen hier immer speciell auf Electricität beziehen, obwohl, wie man leicht sehen wird, das Gesagte sich mit geringen Modificationen auch auf andere Agentien, die nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehend oder abstossend wirken, übertragen lässt.

§. 2. Annahme zweier Electricitäten und Ausdruck ihrer Kräfte.

Die mathematischen Untersuchungen über Electrostatik pflegen von der Hypothese auszugehen, dass es zwei verschiedene Electricitäten gebe, deren Kräfte darin bestehen, dass zwei Mengen von gleicher Electricität sich abstossen und zwei Mengen von entgegengesetzten Electricitäten sich anziehen. Damit ist aber nicht gesagt, dass die Resultate dieser Untersuchungen in solcher Weise an die Hypothese geknüpft seien, dass sie mit derselben stehen und fallen; vielmehr lässt sich mit Bestimmtheit sagen, dass dieselben Resultate ihrem wesentlichen Inhalte nach auch dann gültig bleiben müssen, wenn jene Hypothese durch irgend eine andere ersetzt wird, welche ebenfalls geeignet ist, die experimentell bekannten electrischen Kräfte zu erklären. Gerade aus diesem Grunde haben die mathematischen Physiker kein Bedenken getragen, sich dieser Hypothese zu bedienen, und die Untersuchung, ob die Hypothese wirklich im wörtlichen Sinne als richtig zu betrachten ist, der Zukunft zu überlassen.

---

[1]) Die Potentialfunction und das Potential, ein Beitrag zur mathematischen Physik. Leipzig bei J. A. Barth.

Es mögen nun zwei Electricitätsmengen gegeben sein, die durch q und q' bezeichnet werden sollen, in der Weise, dass diese Grössen als mathematisch positiv oder negativ betrachtet werden, je nachdem die Electricitätsmengen der einen oder anderen Art angehören. Denken wir uns diese beiden Electricitätsmengen in zwei Puncten concentrirt, so muss die Kraft, welche sie auf einander ausüben, erstens proportional jeder der beiden Mengen, also proportional dem aus den beiden Mengen gebildeten Producte sein, und zweitens ist sie, wie experimentell hinlänglich festgestellt ist, als umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung anzunehmen. Wir können also, wenn r die Entfernung der beiden Puncte von einander bedeutet, die Kraft durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$\text{Kraft} = \varepsilon \frac{qq'}{r^2},$$

worin ε einen constanten Factor bedeutet, welcher von dem Maasse abhängt, nach dem man die Electricitätsmengen messen will.

Wir wollen für unsere Betrachtungen folgendes Maass annehmen. Als Einheit der Electricität soll diejenige Menge gelten, welche auf eine gleich grosse Menge in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt. In diesem Falle wird der constante Factor seinem absoluten Werthe nach gleich Eins. Es bleibt aber noch zu entscheiden, ob wir ihn gleich $+1$ oder gleich -1 setzen wollen. Dazu muss der Unterschied zwischen anziehender und abstossender Kraft in Betracht gezogen werden, indem, wenn die eine dieser Kräfte als positiv betrachtet wird, die andere als negativ in Rechnung zu bringen ist. Wir wollen uns in dieser Beziehung dahin entscheiden, eine Abstossung als positiv und eine Anziehung als negativ zu rechnen, weil die Abstossung auf Vergrösserung und die Anziehung auf Verkleinerung von r hinwirkt. Dann müssen wir bei der Betrachtung von Electricität, weil gleichartige Electricitätsmengen sich abstossen, den constanten Factor positiv machen, und haben ihn also nach der obigen Feststellung seines absoluten Werthes gleich $+1$ zu setzen. Der Ausdruck der Kraft, welchen die Mengen q und q' auf einander ausüben, wird somit:

$$\frac{qq'}{r^2}.$$

§. 3. Ausdruck der Potentialfunction.

Nun möge weiter angenommen werden, dass nicht bloss Eine in einem Puncte concentrirte Electricitätsmenge q' auf die Menge q wirke, sondern dass beliebig viele in verschiedenen Puncten concentrirte Electricitätsmengen q', q_1', q_2' etc. gegeben seien, welche gemeinsam auf q wirken, oder auch, dass die die Wirkung ausübende Electricität, anstatt in einzelnen Puncten concentrirt zu sein, über eine Linie, eine Fläche oder einen körperlichen Raum stetig verbreitet sei. Um in diesem Falle die betreffende Kraft nach Stärke und Richtung in möglichst einfacher Weise bestimmen zu können, bilden wir zunächst eine Grösse, welche folgendermaassen definirt werden möge.

Der Punct, wo sich die Electricitätsmenge q befindet, welche die Wirkung erleidet, sei mit p bezeichnet, und die Abstände dieses Punctes von den Puncten, wo die Electricitätsmengen q', q_1', q_2' etc. concentrirt sind, mögen r, r_1, r_2 etc. heissen. Dann wird die in Rede stehende Grösse, welche mit V bezeichnet zu werden pflegt, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$V = \frac{q'}{r} + \frac{q_1'}{r_1} + \frac{q_2'}{r_2} + \text{etc.} \tag{1}$$

oder, wenn man die Summe durch ein Summenzeichen andeutet:

$$V = \sum \frac{q'}{r}. \tag{2}$$

Wenn die die Wirkung ausübende Electricität nicht in einzelnen Puncten concentrirt, sondern über eine Linie, eine Fläche oder einen körperlichen Raum stetig verbreitet ist, so denke man sich dieselbe in Elemente dq' zerlegt, bezeichne mit r den Abstand eines Elementes vom Puncte p und bilde dann statt der in der vorigen Gleichung angedeuteten Summe das entsprechende Integral, nämlich:

$$V = \int \frac{dq'}{r}. \tag{3}$$

Dieser letztere Ausdruck von V ist der allgemeinere, und schliesst auch den vorigen in sich ein, denn man kann offenbar auch in dem Falle, wo endliche Electricitätsmengen in einzelnen Puncten concentrirt sind, eine Integration ausführen.

Es versteht sich übrigens dem Obigen nach von selbst, dass man nicht nur für Electricität, sondern auch für jedes andere nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehend oder abstossend wirkende Agens einen Ausdruck dieser Art bilden kann, wobei man den in der allgemeinen Kraftformel vorkommenden Coëfficienten ε, dessen Werth von der für das Agens gewählten Maasseinheit abhängt, und den wir bei der Electricität durch 1 ersetzt haben, der Allgemeinheit wegen vorläufig beibehalten kann.

Die so bestimmte Grösse V ist es, welche Green die *Potentialfunction* genannt hat. Gauss hat später dieselbe Grösse einfach *Potential* genannt; indessen ist diese Benennung mit einem Uebelstande behaftet. Es giebt nämlich noch eine andere sehr wichtige Grösse, von der weiter unten die Rede sein wird, welche man *das Potential einer Menge auf eine andere* oder, nach Umständen, *das Potential einer Menge auf sich selbst* nennt. Man würde also bei der Annahme der Gauss'schen Benennungsweise für zwei Begriffe, die zwar verwandt, aber nicht gleich sind, dasselbe Wort *Potential* gebrauchen. Aus diesem Grunde habe ich in meinen auf Electricität bezüglichen Abhandlungen und in der oben citirten Schrift für die durch die Gleichung (3) definirte Grösse wieder den von Green vorgeschlagenen Namen *Potentialfunction* gewählt, und den Namen *Potential* nur für jene andere, aus der Potentialfunction durch Integration abgeleitete Grösse angewandt.

§. 4. Bestimmung der Kraftcomponenten mit Hülfe der Potentialfunction.

Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen besprochenen Function bestimmt sich nun die in irgend einem Puncte p wirkende Kraft folgendermaassen.

Wir wollen zunächst annehmen, die im Puncte p gedachte Electricitätsmenge, welche die Wirkung erleidet, und welche oben mit q bezeichnet wurde, sei eine *positive Electricitätseinheit*. Die auf diese Electricitätseinheit ausgeübte Kraft denken wir uns in drei in die Richtungen dreier rechtwinkliger Coordinaten fallende Componenten zerlegt, welche mit X, Y, Z bezeichnet werden mögen. Wenn wir dann V (die Potentialfunction der die Wirkung ausübenden Electricität an dem betreffenden Puncte) als Function der Coordinaten x, y, z des Punctes betrachten, so haben wir:

$$(4) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Eben so einfach, wie die Kraftcomponenten nach den drei Coordinatenrichtungen, lässt sich auch die Kraftcomponente nach irgend einer beliebigen anderen Richtung ausdrücken. Denken wir uns durch den Punkt p eine beliebige Linie gezogen, und bezeichnen den auf dieser Linie gemessenen Abstand des Punctes p von irgend einem anderen als Anfangspunct gewählten Puncte der Linie mit s, und dem entsprechend die unendlich kleine Zunahme, welche V erleidet, wenn der betrachtete Punct p sich auf dieser Linie um das Wegelement ds fortbewegt, mit $\frac{\partial V}{\partial s} ds$, so wird die in die Richtung dieser Linie fallende Kraftcomponente, welche S heissen möge, bestimmt durch die Gleichung:

$$(5) \qquad S = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Sollte sich im Puncte p nicht gerade eine Electricitäts*einheit*, sondern eine beliebige andere Electricitätsmenge befinden, welche die Wirkung erleidet, und welche, wie früher, mit q bezeichnet werden möge, in der Weise, dass q sowohl eine positive als auch eine negative Grösse darstellen kann, so lauten die Ausdrücke der Kraftcomponenten, welche diese Electricitätsmenge nach den Coordinatenrichtungen x, y, z und nach der beliebigen Richtung s erleidet:

$$-q\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -q\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -q\frac{\partial V}{\partial z} \text{ und } -q\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Wenn man in der eben angegebenen Weise die in die drei Coordinatenrichtungen fallenden Kraftcomponenten ausgedrückt hat, so kann man daraus natürlich auch die ganze Kraft nach Grösse und Richtung leicht bestimmen.

§. 5. Das Potentialniveau.

Bildet man eine Gleichung von der Form

$$V = A,$$

worin A eine Constante bedeutet, so ist dieses die Gleichung einer Fläche, welche die Eigenschaft hat, dass für jeden in ihr liegenden Punct die Kraft, welche eine dort gedachte Electricitäts-

menge erleiden würde, auf der Fläche senkrecht ist. Die Fläche hat also in Bezug auf die hier betrachtete electrische Kraft dieselbe Bedeutung, wie die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit in Bezug auf die Schwerkraft, und man nennt daher eine solche Fläche eine *Niveaufläche.*

Nimmt man für die Potentialfunction einen anderen constanten Werth an, indem man z. B. setzt:

$$V = B,$$

so wird dadurch eine andere Niveaufläche bestimmt, und auf diese Weise kann man unendlich viele Niveauflächen erhalten. Wir wollen demgemäss den Werth, welchen die Potentialfunction in irgend einem Puncte des Raumes hat, und durch welchen die durch diesen Punct gehende Niveaufläche bestimmt wird, kurz das *Potentialniveau* dieses Punctes nennen.

Bei der Electricität (und ebenso bei jedem anderen Agens, welches theils anziehende, theils abstossende Kräfte ausübt) können die Potentialniveaux sowohl positiv als auch negativ sein, und die Räume, in denen das Eine und das Andere stattfindet, werden durch eine Niveaufläche mit dem Potentialniveau Null von einander getrennt.

Denken wir uns nun in irgend einem Puncte des Raumes eine positive Electricitätseinheit concentrirt, und betrachten die Kraft, welche auf diese wirkt, in der Weise, dass wir für jede von dem Puncte ausgehende Richtung die in dieselbe fallende Kraftcomponente bestimmen, so lässt sich allgemein Folgendes sagen. Nach den Richtungen, nach welchen das Potentialniveau abnimmt, ist die Kraftcomponente positiv, und nach den Richtungen, nach welchen das Potentialniveau zunimmt, ist die Kraftcomponente negativ, und dem absoluten Werthe nach ist die Kraftcomponente um so grösser, je schneller in der betrachteten Richtung das Potentialniveau sich ändert, da dem Obigen nach die Kraftcomponente durch den betreffenden negativ genommenen Differentialcoëfficienten des Potentialniveaus dargestellt wird.

§. 6. Differentialausdruck zweiter Ordnung, welcher die Vertheilung des wirksamen Agens im Raume bestimmt.

Ausser der Eigenschaft, die Kraftcomponenten auf eine so einfache Art darzustellen, hat die Potentialfunction noch eine andere sehr wichtige Eigenschaft, welche hier zunächst für ein be-

liebiges nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehend oder abstossend wirkendes Agens ausgesprochen, und dann sofort speciell auf Electricität angewandt werden soll.

Wenn der Punct p in einem Raume gelegen ist, in welchem sich von dem Agens, dessen Potentialfunction durch V dargestellt wird, nichts befindet, so gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

Wenn dagegen der Punct p sich in einem Raume befindet, welcher von dem wirksamen Agens oder von einem Theile desselben stetig erfüllt ist, so nimmt die Gleichung eine andere Gestalt an. Wir wollen die Dichtigkeit des Agens an der betreffenden Stelle des Raumes mit k bezeichnen (so dass die in einem Raumelemente $d\tau$ befindliche Menge des Agens durch $k\,d\tau$ dargestellt wird), dann gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varepsilon k. \tag{7}$$

Diese letztere Gleichung ist die allgemeinere und umfasst die vorige, denn, wenn der Punct p sich ausserhalb des von dem wirksamen Agens erfüllten Raumes befindet, so ist dort $k = 0$, und dadurch geht die Gleichung (7) in (6) über. Aus der Gleichung (7) ergiebt sich, dass man vermöge der Potentialfunction nicht nur die Kräfte, welche das wirksame Agens ausübt, sondern auch die Vertheilung des Agens selbst bestimmen kann.

Da der vorstehende Differentialausdruck sehr häufig vorkommt, so hat man für ihn das einfache Zeichen $\varDelta V$ eingeführt. Danach lauten die beiden vorigen Gleichungen:

$$\varDelta V = 0 \tag{6a}$$

$$\varDelta V = -4\pi\varepsilon k. \tag{7a}$$

Setzt man für den Coëfficienten ε den Werth 1, welchen wir bei der Electricität, gemäss der für dieselbe gewählten Maasseinheit, in Anwendung gebracht haben, so geht die Gleichung (7a) über in

$$\varDelta V = -4\pi k. \tag{8}$$

§. 7. Gleichgewichtszustand der Electricität.

Es möge nun, wie es im Anfange dieser Einleitung gesagt wurde, angenommen werden, es sei irgend ein aus einem leiten-

.en Stoffe bestehender, aber von Nichtleitern umgebener Körper egeben, und demselben sei eine beliebige Electricitätsmenge mitetheilt, die sich entweder für sich allein, oder unter dem Einlusse fremder, auf anderen Körpern befindlicher Electricitätsnengen in das Gleichgewicht zu setzen habe. Es fragt sich dann, vie man die für dieses Gleichgewicht zu erfüllende Bedingung am infachsten mathematisch ausdrücken kann, und wo sich dabei die getrennt vorhandene Electricität befinden muss. Dabei mag benerkt werden, dass man voraussetzt, im unelectrischen Zustande enthalte ein Körper in jedem seiner Elemente gleiche Mengen positiver und negativer Electricität, während im electrischen Zustande in oder an dem Körper Stellen vorkommen, wo ein Ueberschuss an positiver oder negativer Electricität vorhanden sei. Einen solchen irgendwo vorhandenen Ueberschuss an positiver oder negativer Electricität wollen wir, wie es vorher geschehen ist, *getrennte* Electricität nennen.

In einem leitenden Körper kann Bewegung der Electricität stattfinden; in dieser Beziehung sind aber verschiedene Annahmen möglich. Man kann sich entweder denken, dass beide Electricitäten beweglich seien, oder dass nur Eine, welche dann als die positive gelten soll, beweglich und die andere fest an die ponderablen Atome gebunden sei. Für die Electrostatik macht es keinen wesentlichen Unterschied, welche dieser beiden Annahmen man macht, für die Electrodynamik aber entsteht daraus eine Verschiedenheit von Belang, und dort werden wir daher speciell darüber zu sprechen haben.

Wenn nun in dem leitenden Körper Gleichgewicht sein soll, so müssen im Innern desselben an jeder Stelle die von den verschiedenen Theilen der vorhandenen Electricität ausgeübten Kräfte sich gegenseitig aufheben, so dass ihre Resultante Null ist, denn wenn an irgend einer Stelle eine Resultante von angebbarem Werthe bestände, so würde sich die hier vorhandene positive Electricität in der Richtung der Resultante und die negative Electricität, falls auch sie beweglich ist, in der entgegengesetzten Richtung bewegen, was der gemachten Voraussetzung, dass Gleichgewicht stattfinden soll, widerspräche. In der Bedingung, dass die Resultante Null sein muss, ist zugleich mit einbegriffen, dass, wenn man sich die Resultante in drei nach den Coordinatenrichtungen gehende Componenten zerlegt denkt, auch diese Componenten

einzeln Null sein müssen. Es müssen also überall im Innern des leitenden Körpers folgende drei Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

und hieraus ergiebt sich als Gleichgewichtsbedingung, *dass die Potentialfunction V innerhalb des leitenden Körpers einen constanten Werth haben muss.*

Dem eben Gesagten nach lassen sich auch die folgenden drei Gleichungen bilden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

und wenn man diese auf die Gleichung (8) anwendet, so findet man, dass im Innern des leitenden Körpers überall

$$k = 0$$

sein muss. Man gelangt also auf diese Weise zu dem wichtigen Schlusse, dass im Gleichgewichtszustande sich in dem Körper, soweit er leitend ist, nirgends getrennte Electricität befinden kann, sondern dass nur an der Oberfläche, wo der leitende Körper von Nichtleitern begrenzt ist, getrennte Electricität angehäuft sein kann.

Man muss sich also an der Oberfläche eine sehr dünne Schicht mit der getrennten Electricität erfüllt denken. Eine genaue Bestimmung der Dicke dieser Schicht würde sich ohne näheres Eingehen auf das Wesen der Electricität und auf die Natur der leitenden nnd nichtleitenden Medien, an deren Trennungsfläche die Electricität angehäuft ist, nicht wohl ausführen lassen. Man pflegt sich daher mit dem Resultate, dass die Dicke sehr gering sein muss, zu begnügen, und bei den meisten Betrachtungen sieht man von der Dicke der Schicht ganz ab, und betrachtet einfach die Electricität als auf einer Fläche befindlich.

§. 8. Differentialausdruck, welcher die Vertheilung des wirksamen Agens auf einer Fläche bestimmt.

Da man es in der Electricitätslehre, wie eben erwähnt wurde, mit einem Falle zu thun hat, wo man, wenigstens bei mathematischen Untersuchungen, anzunehmen pflegt, dass das wirksame

Agens (nämlich die getrennte Electricität) nicht einen körperlichen Raum ausfüllt, sondern sich auf einer Fläche befindet, so muss hier noch ein auf diesen Fall bezüglicher wichtiger Satz angeführt werden.

Durch einen Punct einer solchen Fläche, welche das Agens enthält, sei eine senkrecht gegen die Fläche gerichtete Gerade gezogen, und auf dieser Geraden denke man sich den Punkt p, auf welchen die Potentialfunction sich bezieht, beweglich. Der Abstand des Punctes p von der Fläche, welcher an der einen Seite der Fläche als positiv und an der anderen Seite als negativ zu betrachten ist, sei mit n bezeichnet. Wenn wir nun den auf diese Gerade bezüglichen Differentialcoëfficienten $\frac{\partial V}{\partial n}$ bilden, dessen negativer Werth die in die Normalrichtung fallende Componente der Kraft darstellt, so hat derselbe an den beiden Seiten der Fläche verschiedene Werthe, indem er beim Hindurchgehen des Punctes durch die Fläche eine sprungweise Aenderung seines Werthes erleidet, deren Grösse von der an der betreffenden Stelle der Oberfläche stattfindenden Dichtigkeit abhängt. Sei die Flächendichtigkeit an dieser Stelle mit h bezeichnet (so dass ein dort befindliches Flächenelement $d\omega$ die Menge $h\,d\omega$ des Agens enthält), und seien ferner die beiden Werthe, welche der Differentialcoëfficient $\frac{\partial V}{\partial n}$ annimmt, wenn der Punct p an der positiven und an der negativen Seite bis dicht an die Fläche heranrückt, mit $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}$ bezeichnet, so gilt die Gleichung:

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h.$$

Wendet man diese Gleichung speciell auf Electricität an, so ist wieder, wie bisher, $\varepsilon = 1$ zu setzen, und es kommt:

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi h.$$

Wenn die betrachtete Fläche die Grenzfläche eines leitenden Körpers bildet, so weiss man, dass im Inneren eines leitenden Körpers bis dicht an die Oberfläche die Potentialfunction V constant

ist. Demnach hat man, wenn die Normale nach Aussen positiv und nach Innen negativ gerechnet wird,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = 0,$$

und die vorige Gleichung geht daher über in:

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = -4\pi h.$$

Hierdurch ist die Beziehung zwischen der dicht an der Oberfläche eines leitenden Körpers wirkenden Normalkraft und der daselbst stattfindenden electrischen Dichtigkeit gegeben.

§. 9. Anordnung der Electricität auf einer Kugel und auf einem Ellipsoid.

Wir wollen nun für einzelne Fälle betrachten, in welcher Weise die Electricität sich auf der Oberfläche eines leitenden Körpers anordnet.

Die Bedingung, aus welcher diese Anordnung zu bestimmen ist, ist immer die, dass die Potentialfunction der gesammten Electricität in jedem leitenden Körper constant sein muss, woraus dann folgt, dass die Resultante der electrischen Kräfte Null ist.

Als einfachsten Fall wollen wir annehmen, es sei ein leitender Körper von der Gestalt einer *Kugel* gegeben, diesem sei eine gewisse Electricitätsmenge Q, die positiv oder negativ sein kann, mitgetheilt, und ausser dieser Electricitätsmenge seien in der Nähe keine getrennten Electricitäten vorhanden, welche auf dieselbe einwirken könnten.

In diesem Falle kann man sofort daraus, dass die Kugel nach allen Seiten symmetrisch ist, schliessen, dass die Electricität sich *gleichförmig* über die Oberfläche verbreiten muss. Da nun die Grösse der Oberfläche, wenn a den Radius der Kugel bedeutet, durch $4\pi a^2$ dargestellt wird, so erhalten wir für die mit h bezeichnete Flächendichtigkeit der Electricität die Gleichung:

$$(12) \qquad h = \frac{Q}{4\pi a^2}.$$

Ein zweiter etwas allgemeinerer Fall, welcher den vorigen als speciellen Fall in sich schliesst, und welcher ebenfalls zu einem sehr einfachen Resultate führt, ist der, wenn der leitende Körper

die Gestalt eines *Ellipsoids* hat. Für diesen Fall hat Poisson zur Bestimmung der electrischen Dichtigkeit an den verschiedenen Puncten der Oberfläche folgende Regel gegeben, deren Richtigkeit sich leicht nachweisen lässt.

Man denke sich um das gegebene Ellipsoid ein zweites ähnliches und concentrisches Ellipsoid mit gleichgerichteten Axen beschrieben, welches seiner Grösse nach nur sehr wenig von dem gegebenen verschieden sei, so dass zwischen beiden Ellipsoidflächen eine sehr dünne Schicht eingeschlossen sei, und diese Schicht denke man sich gleichförmig mit Electricität ausgefüllt. Die unter diesen Umständen über irgend einem Oberflächenelemente befindliche Electricitätsmenge ist gleich derjenigen, welche im Gleichgewichtszustande auf dem Oberflächenelemente vorhanden sein muss.

Aus dieser Regel lässt sich der mathematische Ausdruck der Flächendichtigkeit an verschiedenen Stellen leicht ableiten. Betrachten wir irgend ein Element $d\omega$ der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids, und nennen die Dicke der Schicht an dieser Stelle γ, so ist $\gamma d\omega$ der unendlich keine Theil der Schicht, welcher sich über diesem Oberflächenelemente befindet. Ferner wollen wir die Raumdichtigkeit, welche man erhält, wenn man sich die Schicht gleichförmig von der gegebenen Electricitätsmenge erfüllt denkt, mit k bezeichnen. Dann befindet sich über dem Flächenelemente $d\omega$ die Electricitätsmenge $k\gamma d\omega$. Nun wird aber andererseits, wenn wir mit h die Flächendichtigkeit der Electricität an der betreffenden Stelle bezeichnen, die auf dem Flächenelemente $d\omega$ befindliche Electricitätsmenge durch $h d\omega$ dargestellt. Aus der Vergleichung dieser beiden Ausdrücke folgt, dass man zu setzen hat:

$$h = k\gamma.$$

Seien nun a, b, c die Halbaxen des gegebenen Ellipsoids, und $a(1+\delta)$, $b(1+\delta)$, $c(1+\delta)$, worin δ eine sehr kleine Grösse ist, die Halbaxen des construirt gedachten concentrischen Ellipsoids. Wenn man dann nach dem betrachteten Puncte der Oberfläche vom Mittelpuncte aus einen Leitstrahl zieht, dessen Länge u heissen möge, und diesen Leitstrahl bis zur concentrischen Ellipsoidfläche fortgesetzt denkt, so wird seine Länge bis zum Durchschnitte mit dieser zweiten Fläche durch $u(1+\delta)$ dargestellt. Das zwischen beiden Flächen liegende Stück des Leitstrahles hat also die Länge $\delta . u$. Multiplicirt man diese Grösse

mit dem Cosinus des Winkels, welchen der Leitstrahl mit der an der betreffenden Stelle auf der Oberfläche errichteten Normale bildet, so erhält man die dort stattfindende Dicke der Schicht. Es kommt also, wenn man diesen Winkel mit φ bezeichnet:

$$\gamma = \delta \,.\, u \cos \varphi.$$

Dieses in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt:

$$h = k\delta \,.\, u \cos \varphi. \tag{13}$$

Hier kann man zunächst das Product $k\delta$ bestimmen. Das Volumen des gegebenen Ellipsoids ist $\frac{4}{3}\pi a b c$. Entsprechend ist das Volumen des construirt gedachten concentrischen Ellipsoids $\frac{4}{3}\pi a b c\,(1 + \delta)^3$, wofür man, da δ als sehr klein vorausgesetzt ist, schreiben kann: $\frac{4}{3}\pi a b c\,(1 + 3\delta)$. Zieht man nun das erste Volumen vom zweiten ab, so erhält man das Volumen der zwischen beiden Flächen befindlichen Schicht, nämlich:

$$4\pi a b c \,.\, \delta.$$

Da nun die Raumdichtigkeit innerhalb dieser Schicht mit k bezeichnet ist, so kann man, wenn die gegebene, unserem Ellipsoid mitgetheilte Electricitätsmenge Q heisst, schreiben:

$$Q = 4\pi a b c \,.\, \delta \,.\, k,$$

und daraus folgt:

$$k\delta = \frac{Q}{4\pi a b c}.$$

Dieses in den in (13) gegebenen Ausdruck von h eingesetzt, giebt:

$$h = \frac{Q}{4\pi a b c}\, u \cos \varphi. \tag{14}$$

Es bleibt nun nur noch das Product $u \cos \varphi$ auszudrücken. Seien x, y, z die Coordinaten des betrachteten Oberflächenpunctes, wo man die Dichtigkeit bestimmen will, so werden die Cosinus der Winkel, welche der Leitstrahl mit den Coordinatenaxen bildet, ausgedrückt durch

$$\frac{x}{u},\ \frac{y}{u},\ \frac{z}{u}.$$

Ferner werden die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bildet, ausgedrückt durch:

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}};\quad \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}};\quad \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Hieraus folgt, dass man für den Cosinus des Winkels φ, den der Leitstrahl mit der Normale bildet, folgenden Ausdruck erhält:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{u\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Der Zähler dieses Bruches hat einen sehr einfachen Werth. Es gilt nämlich für einen Punct der Oberfläche eines Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{15}$$

Setzen wir diesen Werth ein und multipliciren ausserdem die Gleichung mit u, so kommt:

$$u\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Durch Anwendung dieses Werthes auf die Gleichung (14) erhalten wir den gesuchten mathematischen Ausdruck der Flächendichtigkeit h, nämlich:

$$h = \frac{Q}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \tag{16}$$

Aus diesem Ausdrucke kann man noch mit Hülfe der Gleichung (15) eine der Coordinaten eliminiren. Man kann z. B. nach (15) setzen:

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$h = \frac{Q}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2 - a^2}{a^4} x^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^4} y^2}}. \tag{17}$$

§. 10. Anordnung der Electricität auf einer elliptischen Platte.

Aus dem vorigen Resultate lässt sich als specieller Fall noch ein Resultat ableiten, welches von besonderem Interesse ist.

Man betrachtet oft den Fall, wo der leitende Körper, dem man Electricität mittheilt, die Form einer dünnen Platte hat, wobei man als Grenzfall auch die Platte als unendlich dünn annehmen kann. Es fragt sich dann, wie sich auf einer solchen Platte die Electricität vertheilt. Für Platten von elliptischer Gestalt kann man nun die Vertheilung der Electricität dem Vorigen nach ohne Weiteres hinschreiben, wenn man eine elliptische Platte als ein sehr flaches Ellipsoid ansieht.

Sei die Halbaxe c als diejenige angenommen, welche sehr klein geworden ist, so wollen wir die Gleichung (17) in folgender Form schreiben:

$$(18)\qquad h = \frac{Q}{4\pi a b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}}.$$

Hierin ist von den beiden unter dem Wurzelzeichen stehenden Grössen

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ und } c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

im Allgemeinen die letztere gegen die erstere als sehr klein anzusehen, und nur in der Nähe des Randes, wo die erstere sich dem Werthe Null nähert, gewinnt dadurch die letztere an Bedeutung.

Nimmt man die Platte als unendlich dünn an, so dass die mit dem Factor c^2 behaftete Grösse als ganz verschwindend zu betrachten sei, so hat man zu setzen:

$$(19)\qquad h = \frac{Q}{4\pi a b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Ist die Platte kreisförmig, so muss man $b = a$ setzen. Zugleich kann man dann, wenn r den Abstand des betrachteten Punctes vom Mittelpuncte bedeutet, schreiben: $x^2 + y^2 = r^2$, wodurch die Gleichungen (18) und (19) übergehen in:

$$h = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{c^2 r^2}{a^4}}} \tag{20}$$

$$h = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}. \tag{21}$$

Diese letzteren Gleichungen lassen die Zunahme der Dichtigkeit der Electricität von der Mitte nach dem Rande zu besonders deutlich erkennen. Man sieht dass sie zuerst langsam und dann immer schneller wächst, je näher man dem Rande kommt. Bei einer unendlich dünnen Platte würde am Rande selbst, also für $r = a$, die Dichtigkeit unendlich gross sein. Daraus folgt aber nicht, dass die auf der Platte befindliche Electricität in so überwiegender Menge am Rande angehäuft sein würde, dass man dagegen die auf den mittleren Partien der Platte befindliche Menge vernachlässigen dürfte.

Um hierüber ein bestimmtes Urtheil zu gewinnen, wollen wir uns die ganze Kreisfläche durch einen mit dem Radius b, der kleiner als a ist, geschlagenen concentrischen Kreis in zwei Theile getheilt denken, in die innere Kreisfläche mit dem Radius b und in die zwischen ihrer Peripherie und dem Rande der Platte gelegene ringförmige Fläche, und wollen die auf beiden Theilen befindlichen Electricitätsmengen bestimmen. Dieselben mögen durch R und S bezeichnet werden, wobei die beiden einander unendlich nahe gegenüberliegenden parallelen Grenzflächen der Platte gemeinsam betrachtet, und die auf ihnen befindlichen Electricitätsmengen zusammengefasst sein sollen. Dann haben wir zu setzen:

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{Q}{2\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = Q\left(1 - \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right) \\ S &= \frac{Q}{2\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_b^a \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = Q\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Setzen wir z. B. $b = \frac{4}{5}a$, so ist:

$$R = \tfrac{2}{5}Q \text{ und } S = \tfrac{3}{5}Q,$$

und setzen wir $b = \frac{12}{13}a$, so ist:

$$R = \tfrac{8}{13}Q \text{ und } S = \tfrac{5}{13}Q.$$

Es sind auch experimentelle Untersuchungen über die Zunahme der Dichtigkeit auf einer mit Electricität geladenen metallenen Kreisplatte von Coulomb angestellt, deren Resultate Biot in seinem *Traité de Physique, T. II, p.* 277 (deutsche Bearbeitung von Fechner, Bd. II, S. 191), mittheilt. Diese mögen hier ebenfalls Platz finden und mit den Werthen, welche sich für den Fall, dass die Platte unendlich dünn gewesen wäre, aus der obigen Formel ergeben würden, verglichen werden. Dabei ist zu bemerken, dass bei einer unendlich dünnen Platte eine schnellere Zunahme der Dichtigkeit von der Mitte nach dem Rande hin stattfinden müsste, als bei einer Platte von endlicher Dicke, dass dieser Unterschied besonders in der Nähe des Randes beträchtlich wird, und dass am Rande selbst keine Vergleichung mehr möglich ist, indem die unendlich dünne Platte dort eine unendlich grosse Dichtigkeit haben würde, während bei einer Platte von endlicher Dicke ein bestimmter endlicher Werth entstehen muss, der bei solcher Dicke, wie sie eine gewöhnliche Condensatorplatte hat, und wie sie wahrscheinlich (obwohl keine Angabe darüber vorliegt) auch die Coulomb'sche Platte gehabt hat, nicht einmal sehr gross sein kann. Unter Berücksichtigung dieser Umstände wird man die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen genügend finden. Der Radius der Platte war 5″.

Abstand vom Rande der Platte	Beobachtete Dichtigkeit	Berechnete Dichtigkeit
5″	1	1
4″	1·001	1·020
3″	1·005	1·090
2″	1·17	1·250
1″	1·52	1·667
0·5″	2·07	2·294
0	2·90	∞

§. 11. Der Green'sche Satz.

Bevor wir nun dazu übergehen, das Verhalten electrischer Körper unter dem Einflusse anderer in der Nähe befindlicher und

somit influenzirend wirkender Körper zu betrachten, wird es zweckmässig sein, einige allgemeine Sätze über die Potentialfunction vorauszuschicken, von denen diejenigen, welche in meinem Buche über die Potentialfunction behandelt sind, hier nur kurz angeführt zu werden brauchen.

Zunächst ist ein von Green aufgestellter geometrischer Satz, welcher in der Potentialtheorie vielfältige Anwendung findet, zu erwähnen.

Es seien U und V zwei Functionen der Raumcoordinaten, von denen wir vorläufig voraussetzen wollen, dass innerhalb eines zur Betrachtung gegebenen Raumes die Functionen selbst und ihre ersten und zweiten Ableitungen nirgends unendlich gross werden. Ferner werde zur Abkürzung ein Summenzeichen eingeführt, welches auch im Folgenden vielfach Anwendung finden wird. Wenn nämlich eine Summe von drei Gliedern vorkommt, welche sich auf die drei Coordinatenrichtungen beziehen, im Uebrigen aber ganz gleich sind, so soll nur das auf die x-Richtung bezügliche Glied wirklich hingeschrieben und davor das Summenzeichen gesetzt werden, wie aus Folgendem zu ersehen ist:

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Dann gelten nach Green folgende Gleichungen:

$$(23)\quad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau = -\int U \frac{\partial V}{\partial n}\, d\omega - \int U \Delta V d\tau$$

$$(24)\quad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau = -\int V \frac{\partial U}{\partial n}\, d\omega - \int V \Delta U d\tau$$

$$(25)\quad \int U \frac{\partial V}{\partial n}\, d\omega + \int U \Delta V d\tau = \int V \frac{\partial U}{\partial n}\, d\omega + \int V \Delta U d\tau.$$

Hierin soll $d\tau$ ein Raumelement sein, und die Integrale nach τ sollen sich über den ganzen gegebenen Raum erstrecken. Ferner soll $d\omega$ ein Element der Oberfläche des Raumes sein und in den Differentialcoëfficienten $\frac{\partial U}{\partial n}$ und $\frac{\partial V}{\partial n}$ soll n die auf der Oberfläche errichtete, nach Innen zu als positiv gerechnete Normale bedeuten. Die Integrale nach ω sollen sich über die ganze Oberfläche des gegebenen Raumes erstrecken.

Diese drei Gleichungen bilden den Ausdruck des Green'schen Satzes.

Die Gleichungen können noch nach einer gewissen Richtung hin erweitert werden. Wir wollen nämlich die Bedingung, dass die Functionen U und V und ihre ersten und zweiten Ableitungen in dem ganzen Raume nirgends unendlich gross werden, fallen lassen, und statt dessen annehmen, dass die Functionen Glieder enthalten können, welche die Form der Potentialfunction eines in dem Raume befindlichen Agens haben, welches nicht stetig durch den Raum verbreitet zu sein braucht, sondern auch auf Flächen, auf Linien oder in Puncten angehäuft sein kann. Es seien also für U und V folgende Formen angenommen:

$$(26) \qquad \begin{cases} U = u + \int \frac{d\mathfrak{q}}{r} \\ V = v + \int \frac{dq}{r}. \end{cases}$$

Hierin sollen u und v Functionen bedeuten, welche die obige Bedingung erfüllen, dass sie und ihre ersten und zweiten Differentialcoëfficienten in dem ganzen Raume endlich bleiben. Unter $d\mathfrak{q}$ und dq sollen die Elemente von Agentien verstanden sein, welche man sich in dem Raume befindlich und beliebig darin angeordnet denken kann, und für welche die Maasseinheiten so gewählt werden sollen, wie es bei der Electricität geschehen ist, so dass $\varepsilon = 1$ zu setzen ist. Endlich soll r den Abstand eines solchen Elementes von dem Puncte (x, y, z) darstellen. Wenn nun z. B. in einem Puncte p' eine endliche Menge $\mathfrak{q}$ oder q eines Agens befindlich ist, so lautet der betreffende Theil des einen oder anderen Integrals $\frac{\mathfrak{q}}{r}$ oder $\frac{q}{r}$, und diese Brüche und ihre Differentialcoëfficienten werden bei unendlicher Annäherung an den Punct p' unendlich gross. Dasselbe findet statt, wenn sich eine endliche Menge des Agens auf einer Linie befindet, während in dem Falle, wo sich eine endliche Menge des Agens auf einer Fläche befindet, zwar nicht für das Integral selbst und seine Differentialcoëfficienten erster Ordnung, wohl aber für seine Differentialcoëfficienten zweiter Ordnung unendliche Werthe entstehen. Nur wenn das Agens mit endlicher Raumdichtigkeit durch den Raum verbreitet ist, bleibt das Integral mit seinen Differentialcoëfficienten erster und zweiter Ordnung überall endlich, und in diesem Falle ist es daher gleichgültig, ob man das Integral in u resp. in v mit einbegreifen oder besonders hinschreiben will.

Für diese unter (26) gegebenen allgemeineren Formen der Functionen U und V lauten die den Green'schen Satz ausdrückenden Gleichungen folgendermaassen:

$$(27)\quad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} d\tau = -\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - \int U \varDelta v d\tau + 4\pi \int U dq$$

$$(28)\quad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} d\tau = -\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega - \int V \varDelta u d\tau + 4\pi \int V dq$$

$$(29)\quad \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int U \varDelta v d\tau - 4\pi \int U dq$$

$$= \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega + \int V \varDelta u d\tau - 4\pi \int V dq.$$

§. 12. Bestimmung des von einer Fläche eingeschlossenen Agens.

Um eine erste sehr einfache Anwendung des Green'schen Satzes zu machen, wollen wir für U den constanten Werth 1 annehmen. Daraus ergiebt sich für die Differentialcoëfficienten von U und somit für die ganze linke Seite der Gleichung (27) der Werth 0 und die Gleichung geht über in:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int \varDelta v d\tau - 4\pi \int dq = 0.$$

Ferner wollen wir unter V die Potentialfunction eines Agens verstehen, welches sich theils innerhalb, theils ausserhalb der geschlossenen Fläche befinden und beliebig vertheilt sein kann. Indem wir dann für V die unter (26) gegebene allgemeine Form

$$V = v + \int \frac{dq}{r}$$

anwenden, wollen wir uns die Potentialfunction des äusseren Agens durch v und die des inneren Agens durch $\int \frac{dq}{r}$ dargestellt denken. Dann ist für den ganzen von der Fläche eingeschlossenen Raum $\varDelta v = 0$, und die obige Gleichung vereinfacht sich somit in:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - 4\pi \int dq = 0.$$

Das zweite hierin vorkommende Integral ist nichts weiter, als die ganze Menge des von der Fläche eingeschlossenen Agens, und wir erhalten somit, indem wir diese Menge mit Q bezeichnen:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = 4\pi Q \tag{30}$$

oder:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega. \tag{30a}$$

Sollte die Fläche selbst mit einer endlichen Menge Agens belegt sein, so würde $\frac{\partial V}{\partial n}$ an der Innen- und Aussenseite der Fläche verschiedene Werthe haben, und je nachdem man den inneren oder äusseren Werth in dem Integrale anwendete, würde man die Menge des Agens ohne oder mit Zurechnung der auf der Fläche befindlichen Menge erhalten.

§. 13. Das Green-Dirichlet'sche Princip und die Green'sche Function.

Die weiteren Anwendungen des Green'schen Satzes werden besonders fruchtbar, wenn man ihn mit einem gewissen anderen Satze in Verbindung bringt. Dieser ist in der für den betreffenden Zweck geeigneten Form ebenfalls zuerst von Green ausgesprochen, aber nicht streng mathematisch bewiesen, sondern nur auf Gründe, welche man vom physicalischen Gesichtspuncte aus als sicher zu betrachten pflegt, zurückgeführt. Dirichlet hat ihm später eine allgemeinere Form gegeben, und ihn streng mathematisch bewiesen. In dieser Form, in welcher man ihn das Dirichlet'sche Princip zu nennen pflegt, lautet er: Es giebt für einen beliebigen begrenzten Raum immer eine und nur Eine Function u von x, y, z, die selbst und deren Differentialcoëfficienten erster Ordnung stetig sind, die innerhalb jenes ganzen Raumes die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt, und die endlich in jedem Puncte der Oberfläche einen vorgeschriebenen Werth hat.

Den Beweis dieses Satzes will ich hier nicht aufnehmen, sondern verweise in dieser Beziehung auf mein oben citirtes Buch über die Potentialfunction. Hier wird es genügen, die von Green für den beschränkteren Satz angeführten Gründe mitzutheilen.

Green stellt nicht die allgemeine Bedingung, dass die Function u an der Oberfläche einen für jeden Punct beliebig vorgeschriebenen Werth habe, sondern giebt den Werth, den sie haben soll, bestimmt an. Sei nämlich innerhalb des gegebenen Raumes irgend ein Punct p' ausgewählt, und der Abstand des betrachteten Punctes der Oberfläche von diesem Puncte mit r bezeichnet, so soll u an dem Oberflächen-Puncte den Werth $-\frac{1}{r}$ haben, so dass die Summe $u+\frac{1}{r}$ gleich Null ist.

Den Beweis von der eindeutigen Existenz dieser Function u führt Green so. Man betrachte die Oberfläche des gegebenen Raumes als eine für Electricität leitende Fläche, welche durch einen unendlich dünnen Draht mit der Erde in Verbindung stehe. Ferner denke man sich im Puncte p' eine Einheit positiver Electricität concentrirt. Diese wird durch Influenz bewirken, dass positive Electricität von der Fläche in die Erde abströmt und die Fläche eine so angeordnete negativ electrische Ladung erhält, dass die gesammte Potentialfunction auf allen Theilen der Fläche den in der Erde stattfindenden Werth Null hat. Die gesammte Potentialfunction besteht aber erstens aus der Potentialfunction der in p' concentrirten Electricitätseinheit, nämlich $\frac{1}{r}$, und zweitens aus der Potentialfunction der auf der Fläche durch Influenz angesammelten Electricität. Nennen wir also die letztere Potentialfunction u, so ist auf allen Theilen der Fläche die Gleichung

$$u+\frac{1}{r}=0$$

erfüllt, und ebenso genügt diese mit u bezeichnete Potentialfunction in dem ganzen gegebenen Raume der in Bezug auf die Stetigkeit gestellten Bedingung und der Gleichung $\Delta u=0$. Nimmt man es nun als selbstverständlich an, dass es, wenn in irgend einem Puncte p' eine Electricitätseinheit concentrirt ist, immer eine und nur Eine Vertheilung von Electricität auf der Fläche giebt, welche der für das Gleichgewicht nöthigen Bedingung, dass die gesammte Potentialfunction auf der Fläche überall gleich Null ist, entspricht, so ist damit die eindeutige Existenz der Function u bewiesen, und ihr zugleich dadurch, dass sie die Potentialfunction der unter den genannten Umständen auf der Fläche angesammelten Electricität sein soll, eine bestimmte physicalische Bedeutung gegeben.

Auch für einen nicht in dem von der Fläche eingeschlossenen Raume, sondern in dem die Fläche umgebenden Raume gelegenen Punct p' stellt Green die entsprechenden Betrachtungen an, dass er sich in p' eine positive Electricitätseinheit concentrirt denkt, welche die als leitend und mit der Erde verbunden angenommene Fläche negativ electrisch macht, und dass er dann die Potentialfunction der auf der Fläche befindlichen negativen Electricität als die Function u ansieht. Diese Function erfüllt dann wieder die Bedingung, dass sie an allen Puncten der Fläche gleich $-\frac{1}{r}$ ist, und hat ausserdem die Eigenschaft, dass in unendlicher Entfernung R vom Anfangspuncte der Coordinaten u und $\frac{\partial u}{\partial R}$ unendlich kleine Grössen von den Ordnungen $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{R^2}$ werden, was für solche Betrachtungen, bei denen man, um einen allseitig begrenzten Raum zu haben, zu der gegebenen Fläche noch eine unendlich grosse Kugelfläche als zweite Grenzfläche hinzunimmt, wesentlich ist.

Die in dieser Weise für den inneren oder äusseren Raum bestimmte Function u pflegt man die Green'sche Function zu nennen.

§. 14. Bestimmung der Potentialfunction eines durch eine Fläche abgegrenzten Agens aus den in der Fläche stattfindenden Werthen.

Wir wollen nun annehmen, es sei eine geschlossene Fläche gegeben, welche einen ein Agens enthaltenden Raum von einem leeren Raume abgrenze, indem entweder der äussere Raum das Agens enthalte und der innere leer sei, oder umgekehrt der innere Raum das Agens enthalte und der äussere leer sei. Auf der Fläche selbst kann sich in beiden Fällen ebenfalls eine endliche Menge des Agens befinden. Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, ob die Potentialfunction, wenn sie an der Grenzfläche bekannt ist, sich auch in dem ganzen leeren Raume bestimmen lässt.

Zunächst möge der innere Raum als der leere betrachtet werden. Indem wir auf diesen die Green'sche Gleichung (29) anwenden, wollen wir unter V die zu bestimmende Potentialfunction verstehen. Da diese Function und ihre ersten und zweiten Ablei-

tungen in dem von Agens freien inneren Raume überall endlich bleiben müssen, so kann man in dem unter (26) gegebenen allgemeinen Ausdrucke von V, nämlich $v + \int \frac{dq}{r}$, das Integral mit dq fortlassen und v mit V als gleichbedeutend betrachten. Was ferner die Function U anbetrifft, so wollen wir, nachdem wir irgend einen in dem Raume gelegenen Punct p' mit den Coordinaten x', y', z' ausgewählt haben, unter r den Abstand des Punctes (x, y, z) von diesem Puncte und unter u die Green'sche Function verstehen, und dann setzen:

$$U = u + \frac{1}{r}.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem unter (26) gegebenen allgemeinen Ausdrucke $u + \int \frac{d\mathfrak{q}}{r}$ ergiebt sich, dass in dem letzteren $d\mathfrak{q}$ als das Element einer im Puncte p' concentrirten Einheit des Agens anzusehen ist, woraus folgt, dass das in der Green'schen Gleichung vorkommende Integral $\int V d\mathfrak{q}$ in diesem Falle nichts anderes ist, als der im Puncte p' stattfindende Werth von V, welchen wir mit V' bezeichnen wollen. Die Green'sche Gleichung (29) nimmt also folgende Form an:

$$\int \left(u + \frac{1}{r}\right) \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \int \left(u + \frac{1}{r}\right) \Delta V d\tau$$

$$= \int V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega + \int V \Delta u \, d\tau - 4\pi V'.$$

Da nun das Agens, von welchem V die Potentialfunction ist, sich nur im äusseren Raume oder auf der Oberfläche, und das Agens, von welchem u die Potentialfunction ist, sich nur auf der Oberfläche befindet, so ist für den ganzen inneren Raum

$$\Delta V = 0 \text{ und } \Delta u = 0.$$

Ferner muss an der Oberfläche die für die Green'sche Function geltende Bedingungsgleichung

$$u + \frac{1}{r} = 0$$

erfüllt sein. Die obige Gleichung vereinfacht sich also in

$$\int V \frac{\partial\left(u+\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega - 4\pi V' = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial\left(u+\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega. \tag{31}$$

Bedenkt man nun, dass u eine, wenn auch nicht bekannte, so doch vollkommen bestimmte Function ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass, wenn die Potentialfunction V an der Oberfläche bekannt ist, dadurch auch ihr Werth an jedem beliebigen Puncte p' im Innern des von der Fläche eingeschlossenen Raumes bestimmt ist, ohne dass dazu die Art der Vertheilung des Agens gegeben zu sein braucht. Zur wirklichen Berechnung von V' bedarf es erst noch der Ableitung der dem speciellen Falle entsprechenden Form von u.

Es möge nun zweitens der äussere Raum als der leere betrachtet werden, in welchem die Potentialfunction des von der Fläche eingeschlossenen Agens bestimmt werden soll. Damit dieser Raum allseitig begrenzt sei, denken wir uns um den Anfangspunct der Coordinaten mit einem unendlich grossen Radius R eine Kugelfläche geschlagen, so dass der zu betrachtende Raum zwischen der gegebenen geschlossenen Fläche und der unendlich grossen Kugelfläche liegt.

In diesem Raume wählen wir wieder irgend einen Punct p' aus, und können dann, ganz wie vorher die Gleichung (31) ableiten, worin aber für diesen Fall das Flächenintegral, wenigstens vorläufig, nicht bloss auf die gegebene Fläche, sondern auch auf die unendlich grosse Kugelfläche zu beziehen ist.

Was zunächst den auf die gegebene Fläche bezüglichen Theil des Integrals betrifft, so sind darüber noch einige Bemerkungen zu machen. In dem unter dem Integralzeichen stehenden Differentialcoëfficienten

$$\frac{\partial\left(u+\frac{1}{r}\right)}{\partial n}$$

muss, den früheren Festsetzungen gemäss, die Normale nach der Seite des betrachteten Raumes zu als positiv gerechnet werden. Während sie also im vorigen Falle nach Innen als positiv gerech-

net werden musste, muss sie im jetzigen Falle nach Aussen als positiv gerechnet werden. Da ferner dieser Differentialcoëfficient an beiden Seiten der Fläche verschiedene Werthe hat, so muss darauf geachtet werden, dass immer der Werth anzuwenden ist, welcher an der Seite des betrachteten Raumes gilt. Während also im vorigen Falle der an der Innenseite geltende Werth angewandt werden musste, muss im jetzigen Falle der an der Aussenseite geltende Werth angewandt werden.

Was ferner den auf die unendlich grosse Kugelfläche bezüglichen Theil des Integrals betrifft, so lässt sich dieser sehr einfach abmachen. Gegen den unendlich grossen Radius der Kugelfläche sind alle endlichen Entfernungen zu vernachlässigen, und man kann daher an der Kugelfläche für $\frac{1}{r}$ und V die Werthe in Anwendung bringen, welche man erhalten würde, wenn der Punct p' und das ganze von der gegebenen Fläche eingeschlossene Agens, dessen Menge wir mit Q bezeichnen wollen, sich im Mittelpuncte der Kugelfläche befände, nämlich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \text{ und } V = \frac{Q}{R},$$

und für die Differentialcoëfficienten nach n kann man, da die nach Innen gehende Normale die entgegengesetzte Richtung des Radius hat, setzen:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial R} \text{ und } \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{R^2}.$$

Endlich kann man das Flächenelement $d\omega$ der Kugelfläche durch das Product $R^2 d\sigma$ ersetzen, worin $d\sigma$ das Element des körperlichen Winkels bedeutet. Dadurch erhält man für den auf die Kugelfläche bezüglichen Theil des Integrals die Gleichung:

$$\begin{aligned}\int V \frac{\partial\left(u + \frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega &= \int \frac{Q}{R}\left(-\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\right) R^2 d\sigma \\ &= Q\int\left(-R\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R}\right) d\sigma.\end{aligned}$$

Da nun nach dem, was in §. 13 über u gesagt wurde, $\frac{\partial u}{\partial R}$ eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ ist, so ist das Product

$R \frac{\partial u}{\partial R}$ noch eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{R}$, und der ganze auf die Kugelfläche bezügliche Theil des Integrals ist somit unendlich klein und kann vernachlässigt werden. Man braucht also in der Gleichung (31), mag man sie auf den inneren oder äusseren Raum anwenden, das Integral nur über die gegebene Fläche auszudehnen.

Unter Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse können wir folgenden, für beide Fälle geltenden Satz aussprechen: Durch die Werthe, welche die Potentialfunction in der gegebenen Fläche hat, sind auch die Werthe, welche sie in dem ganzen resp. inneren oder äusseren leeren Raume hat, vollständig bestimmt.

Befindet sich das Agens nur auf der Fläche selbst, so gilt der Satz für den inneren und äusseren Raum gleichzeitig, und man kann ihn dann so aussprechen: Wenn für ein über eine geschlossene Fläche verbreitetes Agens die Potentialfunction in der Fläche selbst gegeben ist, so ist sie dadurch auch in dem ganzen inneren und äusseren Raume bestimmt.

Endlich möge noch bemerkt werden, dass die Sätze, welche hier für eine einzelne geschlossene Fläche ausgesprochen sind, sich in leicht ersichtlicher Weise auch auf mehrere geschlossene Flächen ausdehnen lassen.

§. 15. Flächenbelegung, welche einer in der Fläche gegebenen Potentialfunction entspricht.

Aus dem im vorigen Paragraphen abgeleiteten Satze ergiebt sich sofort auch der folgende Satz: Für eine geschlossene Fläche giebt es stets eine und auch nur Eine Vertheilung von Agens auf der Fläche selbst, deren Potentialfunction in jedem Puncte der Fläche einen vorgeschriebenen Werth hat.

Wenn nämlich für eine Flächenbelegung der Werth der Potentialfunction in allen Puncten der Fläche gegeben ist, so ist damit nach dem vorigen Paragraphen auch die Potentialfunction im ganzen inneren und äusseren Raume bestimmt, und mit der Potentialfunction sind es auch ihre Differentialcoëfficienten. Den-

ken wir uns nun an irgend einem Puncte der Oberfläche eine Normale errichtet, welche nach der einen Seite als positiv und nach der anderen als negativ gerechnet wird, so gilt gemäss (9) in §. 8, wenn darin $\varepsilon = 1$ gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}\right],$$

worin h die auf den betreffenden Punct bezügliche Flächendichtigkeit derjenigen Flächenbelegung bedeutet, von welcher V die Potentialfunction ist. Folglich ist die Flächendichtigkeit für jeden Punct der Fläche vollkommen bestimmt, und damit ist der obige Satz bewiesen.

Hieraus lässt sich sofort noch ein weiterer Schluss ziehen. Wenn eine geschlossene Fläche einen mit Agens erfüllten Raum von einem leeren abgrenzt, indem entweder der äussere Raum das Agens enthält und der innere leer ist, oder der innere das Agens enthält und der äussere leer ist, so ist, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, durch die Werthe, welche die Potentialfunction des Agens an der Grenzfläche hat, auch die Potentialfunction in dem ganzen leeren Raume bestimmt. Da nun stets eine und nur Eine Flächenbelegung möglich ist, deren Potentialfunction an der Fläche selbst irgend welche vorgeschriebene Werthe hat, so muss auch eine und nur Eine Flächenbelegung möglich sein, deren Potentialfunction an der Fläche die der Potentialfunction des gegebenen Agens zukommenden Werthe hat, und somit auch in dem ganzen leeren Raume mit der Potentialfunction des gegebenen Agens übereinstimmt.

Demnach lässt sich folgender, oft zur Vereinfachung anwendbarer Satz aussprechen: Wenn in einem Raume, welcher durch eine geschlossene Fläche von dem übrigen Raume abgegrenzt ist, sich ein Agens in beliebiger Vertheilung befindet, welches zum Theil auch auf der Fläche selbst gelagert sein kann, so giebt es stets eine und nur Eine Flächenbelegung, welche in dem ganzen übrigen Raume dieselbe Potentialfunction hat, wie das gegebene Agens.

§. 16. Bestimmung der Potentialfunction und der Flächendichtigkeit bei electrischen leitenden Körpern aus der Green'schen Function.

An die vorigen Schlüsse mögen noch einige weitere angeknüpft werden, welche sich speciell auf Electricität beziehen.

Es sei ein für Electricität leitender Körper A gegeben, welcher mit Electricität geladen sei, und es soll die Potentialfunction im äusseren Raume bestimmt werden. Dazu haben wir allgemein die Gleichung (31), nämlich:

$$V' = \frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial\left(u + \frac{1}{r}\right)}{\partial n}\, d\omega.$$

Nun ist aber im Innern und somit auch an der ganzen Oberfläche eines leitenden Körpers die Potentialfunction constant und kann daher aus dem Integralzeichen herausgenommen werden. Wir erhalten also, indem wir den constanten Werth, welchen wir das Potentialniveau des Körpers A nennen wollen, mit V_a bezeichnen:

$$V' = \frac{V_a}{4\pi}\int \frac{\partial\left(u + \frac{1}{r}\right)}{\partial n}\, d\omega. \tag{32}$$

Hieraus ergiebt sich, dass für jedes Potentialniveau des Körpers die Potentialfunction in dem ganzen äusseren Raume aus der Function u bestimmt werden kann.

Wenn die Potentialfunction in dem ganzen äusseren Raume bestimmt ist, so ist es auch der in der Nähe der Fläche geltende Werth von $\frac{\partial V}{\partial n}$, und mit Hülfe dieses wiederum kann man, nach Gleichung (11), die Flächendichtigkeit h ausdrücken, so dass also auch die Art, wie die dem Körper mitgetheilte Electricität sich über seine Oberfläche verbreitet, aus der Function u bestimmt werden kann.

Sind statt Eines Körpers A deren mehrere A, B, C etc. gegeben, so erhält man ganz entsprechend:

$$(33)\quad V' = \frac{V_a}{4\pi}\int\frac{\partial\left(u+\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\omega_a + \frac{V_b}{4\pi}\int\frac{\partial\left(u+\frac{1}{r}\right)}{dn}d\omega_b + \frac{V_c}{4\pi}\int\frac{\partial\left(u+\frac{1}{r}\right)}{dn}d\omega_c + \text{etc.},$$

worin $d\omega_a$, $d\omega_b$, $d\omega_c$ etc. Oberflächenelemente der Körper A, B, C etc. bedeuten und die einzelnen Integrale sich auf die Oberflächen der einzelnen Körper beziehen. Die Function u ist in diesem Falle natürlich so zu bestimmen, dass alle gegebenen Körper gleichzeitig berücksichtigt werden. Man denke sich nämlich alle diese Körper durch unendlich dünne Drähte mit der Erde verbunden, und nehme im Puncte p' eine positive Electricitätseinheit an, welche auf allen Körpern durch Influenz eine Ladung mit negativer Electricität verursacht, dann ist die Potentialfunction dieser gesammten negativen Electricität die Function u.

§. 17. Wirkung einer leitenden Schaale und eines leitenden Schirmes.

Es sei ein von einer inneren und einer äusseren Oberfläche begränzter schaalenförmiger Körper aus einem die Electricität leitenden Stoffe gegeben. Dann können wir drei Räume unterscheiden, den inneren Hohlraum, den äusseren umgebenden Raum und den von dem Körper selbst erfüllten Raum.

Der innere Hohlraum möge nun irgend welche mit Electricität geladene Körper einschliessen, und es soll untersucht werden, welchen electrischen Zustand diese in der Schaale hervorrufen, und wie sie nach Aussen wirken.

Wir betrachten zunächst die innere Oberfläche der Schaale. Unendlich nahe an derselben, aber noch in dem Hohlraume, denken wir uns den Differentialcoëfficienten $\frac{\partial V}{\partial n}$ gebildet, wobei die Normale nach dem Hohlraume zu als positiv gerechnet werden möge. In Bezug auf diesen Differentialcoëfficienten gilt folgende, in §. 12 unter (30) gegebene Gleichung:

$$\int\frac{\partial V}{\partial n}d\omega = 4\pi Q,$$

worin das Integral sich auf die den Hohlraum begrenzende Fläche,

also auf die innere Oberfläche unserer Schaale bezieht, und Q die gesammte von der Fläche eingeschlossene Electricitätsmenge, also die Electricitätsmenge, mit welcher die in dem Hohlraume befindlichen electrischen Körper geladen sind, bedeutet. Ferner ist der hier betrachtete Differentialcoëfficient $\frac{\partial V}{\partial n}$ derselbe, welcher in §. 8 mit $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ bezeichnet ist, und für welchen die dort unter (11) gegebene Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = -4\pi h$$

gilt, worin h die Flächendichtigkeit der Electricität bedeutet. Durch Einsetzung des hier rechts stehenden Werthes in die vorige Gleichung erhält man:

$$\int h\, d\omega = -Q, \tag{34}$$

d. h. auf der inneren Oberfläche der Schaale befindet sich eine Electricitätsmenge, welche der auf den eingeschlossenen electrischen Körpern befindlichen gleich und entgegengesetzt ist.

Bei diesem Resultate ist es ganz gleichgültig, ob die Schaale mit der Erde in Verbindung steht und dadurch auf dem Potentialniveau Null erhalten ist, oder ob sie isolirt und auf irgend ein anderes Potentialniveau gebracht ist. Dieses hat nur Einfluss auf die Electricitätsmenge, welche sich auf der äusseren Oberfläche lagert.

Wir wollen nun die Potentialfunction in dem die Schaale umgebenden äusseren Raume betrachten. Für irgend einen Punct p' dieses Raumes gilt, wenn wir das Potentialniveau der Schaale mit V_a bezeichnen, die im vorigen Paragraphen unter (32) gegebene Gleichung:

$$V' = \frac{V_a}{4\pi} \int \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r}\right)}{\partial n}\, d\omega.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die äussere Potentialfunction vollkommen bestimmt ist, sobald das Potentialniveau der Schaale gegeben ist, ohne dass über die Art, wie die in dem Hohlraume befindlichen Körper gestaltet, angeordnet und mit Electricität geladen sind, etwas bekannt zu sein braucht.

Wenn die Schaale mit der Erde in leitender Verbindung steht, so ist $V_a = 0$, und dann ist auch für jeden Punct p' des äusseren Raumes $V' = 0$. Daraus ergiebt sich, dass die in dem Hohlraum befindlichen electrischen Körper nach Aussen hin gar keine Wirkung ausüben. Ihre Wirkung ist durch die entgegengesetzte Electricität, welche durch Influenz an der inneren Oberfläche der Schaale angesammelt ist, vollständig aufgehoben.

Wir wollen uns nun, statt der die electrischen Körper ganz umgebenden Schaale, eine verhältnissmässig grosse aus einem leitenden Stoffe bestehende Platte denken, welche vor die electrischen Körper gestellt sei, und jenseit deren die Potentialfunction bestimmt werden solle. Ohne auf eine specielle Betrachtung dieses Falles einzugehen, kann man soviel ohne Weiteres übersehen, dass die Platte, wenn sie hinlänglich gross ist, eine ähnliche, wenn auch nicht so vollständige Wirkung ausüben muss, wie die Schaale und dass also die Potentialfunction jenseit der Platte fast nur von dem Potentialniveau der Platte abhängen kann. Steht die Platte mit der Erde in leitender Verbindung, so muss die Potentialfunction jenseit der Platte sehr nahe den constanten Werth Null haben, indem die auf der Platte durch Influenz angesammelte entgegengesetzte Electricität die Wirkung der electrischen Körper fast vollständig compensirt. Eine in dieser Weise wirkende Platte pflegt man einen electrischen Schirm zu nennen.

§. 18. Ein allgemeiner Satz in Bezug auf Influenzwirkungen.

Zum Schluss dieser allgemeinen Betrachtungen möge noch ein vor Kurzem von mir in Wiedemann's Annalen[1]) mitgetheilter Satz angeführt werden, welcher sich auf die gegenseitige Influenz beliebig vieler leitender Körper bezieht, und mehrere, von verschiedenen Autoren aufgestellte Reciprocitätssätze als specielle Fälle in sich enthält.

Es sei irgend eine Anzahl leitender Körper C_1, C_2, C_3 etc. gegeben, welche influenzirend auf einander wirken. Diese sollen in zwei verschiedenen Weisen geladen werden. Bei der ersten Ladung seien die auf den einzelnen Körpern befindlichen Electricitätsmengen:

$$Q_1, \; Q_2, \; Q_3 \text{ etc.}$$

[1]) Bd. 1, S. 493.

und die dadurch entstehenden Potentialniveaux der Körper:

$$V_1, V_2, V_3 \text{ etc.},$$

und bei der zweiten Ladung seien die Electricitätsmengen und Potentialniveaux:

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3 \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3 \text{ etc.}$$

Dann gilt folgende Gleichung:

$$(35)\quad V_1\mathfrak{Q}_1 + V_2\mathfrak{Q}_2 + V_3\mathfrak{Q}_3 + \text{etc.} = \mathfrak{V}_1 Q_1 + \mathfrak{V}_2 Q_2 + \mathfrak{V}_3 Q_3 + \text{etc.}$$

oder kürzer geschrieben:

$$(35\text{a})\qquad \Sigma V\mathfrak{Q} = \Sigma \mathfrak{V} Q.$$

Zum Beweise dieser Gleichung denken wir uns um einen in der Nähe der Körper gelegenen Punct eine unendlich grosse Kugelfläche geschlagen, und wenden auf den zwischen den Körpern und der Kugelfläche liegenden unendlichen Raum die dritte Green'sche Gleichung an, indem wir unter den beiden darin vorkommenden Functionen, welche wir mit V und $\mathfrak{V}$ bezeichnen wollen, die der ersten und zweiten Ladung entsprechende Potentialfunction verstehen. Da diese beiden Potentialfunctionen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in dem betrachteten Raume überall endlich bleiben, so können wir die Green'sche Gleichung in der unter (25) gegebenen Form schreiben, nämlich:

$$\int V \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\, d\omega + \int V \varDelta \mathfrak{V}\, d\tau = \int \mathfrak{V} \frac{\partial V}{\partial n}\, d\omega + \int \mathfrak{V} \varDelta V\, d\tau.$$

Da ferner in dem betrachteten Raume keine Electricität vorhanden sein soll, so gelten in demselben überall die Gleichungen:

$$\varDelta V = 0 \text{ und } \varDelta \mathfrak{V} = 0,$$

wodurch die vorige Gleichung sich reducirt auf:

$$(36)\qquad \int V \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\, d\omega = \int \mathfrak{V} \frac{\partial V}{\partial n}\, d\omega.$$

In dieser Gleichung haben sich die Integrale über die Oberflächen aller gegebenen Körper und über die unendlich grosse Kugelfläche zu erstrecken. Die auf die letztere Fläche bezüglichen Theile der Integrale sind aber aus den Gründen, welche für einen ähnlichen Fall schon in §. 14 besprochen wurden, unendlich klein und können daher vernachlässigt werden, so dass die Integratio-

nen nur auf die Oberflächen der gegebenen Körper ausgedehnt zu werden brauchen.

Auf der Oberfläche jedes Körpers ist die Potentialfunction constant, und kann daher für den Theil des Integrals, welcher sich auf ihn bezieht, aus dem Integralzeichen genommen werden. Demnach können wir die vorige Gleichung so schreiben:

$$V_1\int\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}d\omega_1+V_2\int\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}d\omega_2+V_3\int\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}d\omega_3+\text{etc.}$$
$$=\mathfrak{V}_1\int\frac{\partial V}{\partial n}d\omega_1+\mathfrak{V}_2\int\frac{\partial V}{\partial n}d\omega_2+\mathfrak{V}_3\int\frac{\partial V}{\partial n}d\omega_3+\text{etc.},$$

worin $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$ etc. Oberflächenelemente der Körper C_1, C_2, C_3 etc. sein und die verschiedenen Integrale sich auf die Oberflächen der einzelnen Körper beziehen sollen.

Nun ist, wie im vorigen Paragraphen, an allen Oberflächen, gemäss der Gleichung (11), zu setzen:

$$\frac{\partial V}{\partial n}=-4\pi h \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}=-4\pi\mathfrak{h},$$

worin h und $\mathfrak{h}$ die Flächendichtigkeiten bei den beiden Ladungen bedeuten sollen. Es kommt also:

$$V_1\int\mathfrak{h}\,d\omega_1+V_2\int\mathfrak{h}\,d\omega_2+V_3\int\mathfrak{h}\,d\omega_3+\text{etc.}$$
$$=\mathfrak{V}_1\int h\,d\omega_1+\mathfrak{V}_2\int h\,d\omega_2+\mathfrak{V}_3\int h\,d\omega_3+\text{etc.}$$

Die hierin noch vorkommenden Integrale sind aber nichts weiter, als die auf den einzelnen Körpern befindlichen Electricitätsmengen, und wir erhalten somit die zu beweisende Gleichung

$$V_1\mathfrak{Q}_1+V_2\mathfrak{Q}_2+V_3\mathfrak{Q}_3+\text{etc.}=\mathfrak{V}_1Q_1+\mathfrak{V}_2Q_2+\mathfrak{V}_3Q_3+\text{etc.}$$

Diese Gleichung lässt sich unter gewissen, oft stattfindenden Umständen noch sehr vereinfachen. Betrachten wir die Glieder, welche sich auf irgend einen der gegebenen Körper, der C_i heisse, beziehen, nämlich die beiden Producte

$$V_i\mathfrak{Q}_i \text{ und } \mathfrak{V}_iQ_i,$$

so werden diese in zwei Fällen Null, so dass sie aus der Gleichung fortgelassen werden können. Wenn der Körper mit der Erde in leitender Verbindung steht, so bleibt sein Potentialniveau bei jeder Ladung des Systemes Null, und wir haben also für diesen Fall zu setzen:

$$V_i=\mathfrak{V}_i=0,$$

wodurch die obigen Producte verschwinden. Wenn ferner der Kör-

per isolirt und ursprünglich unelectrisch ist, und bei der Ladung keine Electricität von Aussen erhält, sondern nur durch Influenz eine ungleiche Vertheilung seiner eigenen Electricität erleidet, so wird seine Oberfläche theils positiv, theils negativ electrisch, in der Weise, dass die ganze auf der Oberfläche befindliche Electricitätsmenge Null bleibt. Wir haben dann also zu setzen:

$$Q_i = \mathfrak{Q}_i = 0,$$

wodurch wiederum die obigen Producte verschwinden. Demgemäss kann folgende Regel aufgestellt werden. Solche Körper, die bei beiden Ladungen mit der Erde in leitender Verbindung stehen, oder die isolirt und ursprünglich unelectrisch sind, und bei den Ladungen keine Electricität empfangen, können bei der Aufstellung der Gleichung (35) ganz unberücksichtigt bleiben.

Es möge nun als specieller Fall angenommen werden, dass bei allen gegebenen Körpern, mit Ausnahme von C_1 und C_2, einer der beiden genannten Umstände stattfinde. Dann reducirt sich die Gleichung auf:

$$V_1\mathfrak{Q}_1 + V_2\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{V}_1 Q_1 + \mathfrak{V}_2 Q_2. \tag{37}$$

Wenn wir diese Gleichung noch weiter dadurch vereinfachen, dass wir auch über das Verhalten der Körper C_1 und C_2 noch besondere Annahmen machen, so gelangen wir zu den oben erwähnten Reciprocitätssätzen.

Zunächst wollen wir uns denken, bei der ersten Ladung werde C_1 bis zum Potentialniveau K geladen, während C_2 mit der Erde in leitender Verbindung stehe und durch Influenz aus der Erde die Electricitätsmenge Q_2 erhalte; bei der zweiten Ladung werde C_2 bis zum Potentialniveau K geladen, während C_1 mit der Erde in leitender Verbindung stehe, und durch Influenz die Electricitätsmenge $\mathfrak{Q}_1$ erhalte. Dann haben wir zu setzen:

$$V_2 = \mathfrak{V}_1 = 0; \quad V_1 = \mathfrak{V}_2 = K,$$

wodurch (37) übergeht in:

$$K\mathfrak{Q}_1 = K Q_2$$

oder:

$$\mathfrak{Q}_1 = Q_2. \tag{38}$$

Also die Electricitätsmenge, welche bei der Ladung von C_1 bis zu einem gewissen Potentialniveau durch Influenz auf C_2 angesammelt wird, und diejenige, welche bei der Ladung von C_2 bis zu

demselben Potentialniveau durch Influenz auf C_1 angesammelt wird, sind unter einander gleich.

Ferner wollen wir beide Körper als isolirt und ursprünglich unelectrisch voraussetzen, und annehmen, bei der ersten Ladung erhalte nur der Körper C_1 die Electricitätsmenge E, durch deren Influenz in C_2 das Potentialniveau V_2 entstehe, und bei der zweiten Ladung erhalte nur der Körper C_2 die Electricitätsmenge E, durch deren Influenz in C_1 das Potentialniveau $\mathfrak{V}_1$ entstehe. In diesem Falle haben wir zu setzen:

$$Q_2 = \mathfrak{Q}_1 = 0; \quad Q_1 = \mathfrak{Q}_2 = E,$$

wodurch (37) übergeht in:

$$V_2 E = \mathfrak{V}_1 E$$

oder:

$$V_2 = \mathfrak{V}_1. \tag{39}$$

Also das Potentialniveau, welches bei der Ladung von C_1 mit einer gewissen Electricitätsmenge durch Influenz in C_2 entsteht, und dasjenige, welches bei der Ladung von C_2 mit derselben Electricitätsmenge durch Influenz in C_1 entsteht, sind unter einander gleich.

Denken wir uns noch specieller die beiden Körper auf Puncte reducirt, setzen ferner $E = 1$ und nehmen endlich von den übrigen ausser C_1 und C_2 noch vorhandenen leitenden Körpern an, dass sie mit der Erde in leitender Verbindung stehen, so erhalten wir als speciellen Fall der vorigen Gleichung die entsprechende Gleichung für die Green'sche Function. Bezeichnen wir nämlich die Green'sche Function für die beiden Fälle, wo sich die Electricitätseinheit im ersten oder zweiten Puncte befindet, mit u und $\mathfrak{u}$, und ferner den Abstand irgend eines Punctes x, y, z vom ersten und zweiten Puncte mit r und $\mathfrak{r}$, so haben wir zu setzen:

$$V = u + \frac{1}{r}; \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{u} + \frac{1}{\mathfrak{r}}$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in

$$u_2 + \frac{1}{r_2} = \mathfrak{u}_1 + \frac{1}{\mathfrak{r}_1}.$$

Nun sind aber r_2 und $\mathfrak{r}_1$ unter einander gleich, indem r_2 den Abstand des zweiten Punctes vom ersten und $\mathfrak{r}_1$ den Abstand des ersten Punctes vom zweiten bedeutet, und somit reducirt sich die Gleichung auf

$$u_2 = u_1, \tag{40}$$

d. h. wenn man von zwei gegebenen Puncten das eine Mal im ersten die Electricitätseinheit annimmt und im zweiten die Green'sche Function betrachtet, und das andere Mal im zweiten die Electricitätseinheit annimmt und im ersten die Green'sche Function betrachtet, so erhält man gleiche Werthe.

Ausser den hier beispielsweise aus der Gleichung (35) gezogenen Schlüssen, welche zwei sehr einfache specielle Fälle betreffen, lassen sich natürlich noch viele andere ähnliche Schlüsse aus derselben ziehen.

ABSCHNITT II.

Gleichungen für Leidener Flaschen.

§. 1. Betrachtung zweier einander sehr nahe gegenüberliegender Oberflächenpuncte von leitenden Körpern.

Nach den vorstehenden allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns nun zur speciellen Betrachtung einer für die Electricitätslehre sehr wichtigen Gruppe von Apparaten, nämlich des Condensators, der Franklin'schen Tafel und der Leidener Flasche. Dabei wollen wir die bei diesen Apparaten vorkommende isolirende Zwischenschicht vorläufig einfach als einen vollkommenen Isolator ansehen, welcher bei der Ladung des Apparates keine innere Veränderung erleidet, indem wir uns die Betrachtung der im Inneren von Isolatoren vorkommenden electrischen Veränderungen und ihres nach Aussen hin ausgeübten Einflusses für den nächsten Abschnitt vorbehalten.

Zunächst mögen statt eines der genannten Apparate nur irgend zwei leitende Körper C_1 und C_2 gegeben sein, deren Oberflächen sich an einer Stelle sehr nahe gegenüberliegen. Die Oberflächen sollen an dieser Stelle einander parallel sein, so dass die auf der einen errichtete Normale auch auf der anderen normal ist. Die Länge des zwischen den beiden Oberflächen liegenden Stückes der gemeinsamen Normale, also den Abstand der Flächen, wollen wir mit c bezeichnen und als sehr klein voraussetzen.

Es möge nun die Potentialfunction im Körper C_1 den Werth V_1 und im Körper C_2 den Werth V_2 haben, während sie zwischen beiden Körpern veränderlich ist, und hier einfach mit V bezeich-

net werde. Um sie hier für einen beliebigen Punct auszudrücken, wählen wir den an der Oberfläche des Körpers C_1 gegebenen Punct zum Anfangspuncte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen z-Axe die in dem Puncte errichtete Normale (und zwar nach Aussen hin als positiv gerechnet), und dessen x- und y-Axe irgend zwei in der Tangentialebene gelegene auf einander senkrechte Gerade seien. Da der zum Anfangspuncte gewählte Punct noch zum Körper C_1 gehört, so hat die Potentialfunction in ihm den Werth V_1. Gehen wir aber von ihm aus in der Richtung der z-Axe vorwärts, so ändert sich die Potentialfunction, und nach dem Tailor'schen Lehrsatze können wir für einen um die Strecke z vom Körper C_1 entfernten Punct schreiben:

$$V = V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 z + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 \frac{z^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right)_1 \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

worin der an die Differentialcoëfficienten gesetzte Index 1 andeuten soll, dass es sich um die dicht am Körper C_1 geltenden Werthe der Differentialcoëfficienten handelt. Wenden wir diese Gleichung auf den Punct an, wo die z-Axe den anderen Körper C_2 trifft, so ist in diesem Puncte $z = c$, und die Potentialfunction hat hier den Werth V_2, woraus folgt, dass zu setzen ist:

$$(1) \qquad V_2 = V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 c + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 \frac{c^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right)_1 \frac{c^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Die ersten beiden hierin an der rechten Seite stehenden Differentialcoëfficienten kann man auf Einen reduciren, wenn man die für den ganzen zwischen den beiden Körpern liegenden Raum geltende Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

in Anwendung bringt.

Man denke sich, dass man von dem in der Oberfläche des Körpers C_1 liegenden Anfangspuncte der Coordinaten aus in der xz-Ebene nach einem anderen ausserhalb des Körpers oder in dessen Oberfläche gelegenen unendlich nahen Puncte fortschreite, dessen Coordinaten dx und dz sein mögen. Die dadurch entstehende kleine Aenderung der Potentialfunction V wird durch folgende Gleichung bestimmt:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot \frac{dz^2}{2} + \text{etc.},$$

worin der Index 1 an den Differentialcoëfficienten der Bequemlichkeit wegen fortgelassen ist. Nimmt man nun bestimmter an, dieser andere Punct sei, wie der Anfangspunct der Coordinaten, in der Oberfläche des Körpers C_1 gelegen, so hat die Potentialfunction hier ebenfalls den Werth V_1 und das an der linken Seite stehende Differential dV ist somit gleich Null zu setzen. Zugleich lässt sich für diesen Fall aus der Gestalt der Curve, in welcher die xz-Ebene die Oberfläche des Körpers schneidet, die Beziehung zwischen den Differentialen dx und dz ableiten. Da die x-Axe die in dem betreffenden Puncte an die Curve gelegte Tangente ist, so erhalten wir, wenn wir den Krümmungsradius der Curve in diesem Puncte mit R_1 bezeichnen, die Gleichung:

$$dz = \mp \frac{1}{2R_1} dx^2 + \text{etc.},$$

worin das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, jenachdem die Curve, von der Seite der positiven z, d. h. von der Aussenseite des Körpers betrachtet, convex oder concav ist. Setzen wir diesen Werth von dz in die vorige Gleichung ein, und setzen zugleich die linke Seite gleich Null, so kommt:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \mp \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}\right) dx^2 + \text{etc.}$$

Da diese Gleichung für beliebige Werthe von dx richtig sein muss, so folgt, dass die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von dx einzeln gleich Null sein müssen, woraus sich ergiebt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \mp \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen wollen wir in folgender Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \pm \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

Ebenso erhält man für die yz-Ebene, wenn die Curve, in welcher diese Ebene die Oberfläche schneidet, den Krümmungsradius R'_1 hat:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \pm \frac{1}{R'_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{4}$$

Diese Werthe von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ in die Gleichung (2) eingesetzt, giebt:

$$\left(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R'_1}\right)\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

oder:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\left(\mp\frac{1}{R_1}\mp\frac{1}{R'_1}\right)\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{5}$$

Indem man diesen Werth von $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, welcher sich auf den an der Oberfläche des Körpers C_1 liegenden Anfangspunct der Coordinaten bezieht, in die Gleichung (1) für $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1$ einsetzt, erhält man:

$$V_2=V_1+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 c\left[1+\frac{c}{2}\left(\mp\frac{1}{R_1}\mp\frac{1}{R'_1}\right)\right]+\left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right)_1\frac{c^3}{1.2.3} + \text{etc.} \tag{6}$$

Hierin kann nun noch für $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1$ ein anderer Ausdruck gesetzt werden. Nach Gleichung (11) des vorigen Abschnittes ist nämlich, wenn h_1 die Flächendichtigkeit der Electricität an dem betreffenden Puncte der Oberfläche des Körpers C_1 bedeutet, zu setzen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1=-4\pi h_1,$$

wodurch die Gleichung übergeht in:

$$V_2=V_1-4\pi h_1 c\left[1+\frac{c}{2}\left(\mp\frac{1}{R_1}\mp\frac{1}{R'_1}\right)\right]+\left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right)_1\frac{c^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

In dieser Gleichung wollen wir nun die Glieder von dritter und höherer Ordnung in Bezug auf c vernachlässigen, und die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$V_1-V_2=4\pi h_1 c\left[1+\frac{c}{2}\left(\mp\frac{1}{R_1}\mp\frac{1}{R'_1}\right)\right]. \tag{7}$$

Nachdem wir dieses Resultat für den Körper C_1 gewonnen haben, wollen wir uns denken, es werde ganz dieselbe Entwickelung noch einmal gemacht, nur mit dem Unterschiede, dass wir von der Oberfläche des Körpers C_2 ausgehen, und in der Normale bis zur Oberfläche des Körpers C_1 fortschreiten. Die dadurch entstehende Gleichung können wir sofort aus der vorigen ableiten, wenn wir die Differenz V_1-V_2 mit V_2-V_1 vertauschen, ferner für h_1 das Zeichen h_2 einführen, welches die electrische Dichtigkeit an dem betreffenden Puncte der Oberfläche des Körpers C_2 bedeuten soll, und ebenso für R_1 und R'_1 die Zeichen R_2 und

R'_2 setzen, welche die Krümmungsradien der zweiten Fläche darstellen sollen. Es kommt also:

$$(8) \qquad V_2 - V_1 = 4\pi h_2 c \left[1 + \frac{c}{2}\left(\mp \frac{1}{R_2} \mp \frac{1}{R'_2}\right)\right].$$

Die Gleichungen (7) und (8) können unter entsprechender Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnungen auch in folgende Form gebracht werden:

$$(9) \qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{V_1 - V_2}{4\pi c}\left[1 + \dfrac{c}{2}\left(\pm \dfrac{1}{R_1} \pm \dfrac{1}{R'_1}\right)\right] \\ h_2 = \dfrac{V_2 - V_1}{4\pi c}\left[1 + \dfrac{c}{2}\left(\pm \dfrac{1}{R_2} \pm \dfrac{1}{R'_2}\right)\right]. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich für die electrische Dichtigkeit an jedem der beiden einander gegenüberliegenden Puncte das eigenthümliche Resultat, dass sie, soweit sie durch das erste und bedeutendste Glied der Formel ausgedrückt wird, nur von der zwischen beiden Körpern stattfindenden Potentialniveaudifferenz und von ihrem Abstande abhängt, und für beide Körper gleich und entgegengesetzt ist. Das zweite Glied ist für beide Körper verschieden, hängt aber bei gegebener Potentialniveaudifferenz für jeden Körper nur von seinen eigenen Krümmungsradien ab. Sollten die Oberflächen an den betreffenden Stellen so gestaltet sein, dass man hätte:

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1},$$

so würden auch die zweiten Glieder beider Formeln gleich und entgegengesetzt sein, und der Unterschied zwischen h_2 und $-h_1$ könnte dann nur noch durch Glieder von höheren Ordnungen ausgedrückt sein.

§. 2. Anwendung der Gleichungen auf den Condensator, die Franklin'sche Tafel und die Leidener Flasche.

Die vorstehenden Gleichungen können wir nun sofort auf die beiden Platten eines Condensators und die beiden Belegungen einer Franklin'schen Tafel anwenden, und da bei diesen die einander gegenüberliegenden Flächen der beiden Platten oder Belegungen in ihrer ganzen Ausdehnung parallel sind, so gelten die Gleichungen nicht bloss für ein bestimmtes Paar von gegenüberliegenden Puncten, sondern für die ganzen Flächen. Nur die Stel-

len, welche so nahe am Rande liegen, dass die Entfernung vom Rande eine Grösse von derselben Ordnung wie c ist, sind auszunehmen, weil hier die höheren Differentialcoëfficienten so gross werden, dass die in den Gleichungen fortgelassenen Glieder nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Was ferner die Leidener Flaschen anbetrifft, so pflegen bei diesen die einander gegenüberliegenden Flächen der beiden Belegungen, d. h. die Grenzflächen des Glases, zwar angenähert aber nicht genau parallel zu sein, und dadurch tritt eine Abweichung ein. Wenn man nämlich in einem Puncte der einen Fläche eine Normale errichtet und von demselben Puncte aus auch auf die andere Fläche eine Normale fällt, so fallen diese beiden Normalen nicht genau zusammen, und die auf ihnen gemessenen Abstände der beiden Flächen sind daher nicht genau gleich. Der zwischen ihnen stattfindende Längenunterschied kann indessen bei kleinen Abweichungen vom Parallelismus nur sehr unbedeutend sein. Setzen wir voraus, die Abweichung vom Parallelismus, also der Winkel zwischen den beiden Normalen, sei nur eine Grösse von derselben Ordnung wie c (wobei wir uns c nach einer den Dimensionen der Belegungen entsprechenden Längeneinheit gemessen denken), so lässt sich leicht ersehen, dass der Unterschied zwischen den auf den beiden Normalen gemessenen Abständen so gering sein muss, dass man, nachdem der eine mit c bezeichnet ist, den anderen durch einen Ausdruck von der Form $c + mc^3$ darstellen kann. Der Unterschied ist also eine Grösse von dritter Ordnung in Bezug auf c, und kann somit in unseren Gleichungen, die nur bis zur zweiten Ordnung richtig sein sollen, vernachlässigt werden. Demnach können wir unter der gemachten Voraussetzung die Gleichungen des vorigen Paragraphen auch auf Leidener Flaschen anwenden.

Betrachten wir nun die Gleichungen (9), so treten in denselben für die in Rede stehenden Apparate noch gewisse Vereinfachungen in Bezug auf das Glied ein, welches die Krümmungsradien enthält. Bei dem Condensator und der Franklin'schen Tafel sind die Flächen eben, also die Krümmungsradien unendlich gross, und dadurch wird das Glied Null. Bei der Leidener Flasche haben die Krümmungsradien zwar endliche Werthe, aber es findet zwischen ihnen eine gewisse Beziehung statt, weil die Flächen parallel oder wenigstens nahe parallel sind. Bei parallelen Flächen sind die Längen der zusammengehörigen Krümmungsradien

nur um den Abstand c von einander verschieden, und wenn die Flächen zwar nicht ganz parallel sind, aber nur um eine Grösse von der Ordnung c vom Parallelismus abweichen, so können auch in diesem Falle die Längen der Krümmungsradien nur um eine Grösse von der Ordnung c von einander verschieden sein. Da nun das Glied, welches die Krümmungsradien enthält, das höchste in den Gleichungen noch berücksichtigte ist, so kann in ihm ein Unterschied, welcher im Verhältnisse zu seiner Grösse wieder nur von der Ordnung c ist, vernachlässigt werden. Dem Vorzeichen nach aber sind die Krümmungsradien beider Flächen entgegengesetzt, denn die Curven, in welchen eine Normalebene die beiden Flächen schneidet, verhalten sich insofern entgegengesetzt, als die eine nach Aussen convex und die andere concav ist. Wir können also, wenn wir die Krümmungsradien der ersten Fläche, unter Fortlassung des Index, mit R und R' bezeichnen, die der zweiten durch $-R$ und $-R'$ darstellen. Die Gleichungen (9) gehen daher über in:

$$(10)\qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{V_1 - V_2}{4\pi c}\left[1 + \dfrac{c}{2}\left(\pm\dfrac{1}{R} \pm \dfrac{1}{R'}\right)\right] \\ h_2 = \dfrac{V_2 - V_1}{4\pi c}\left[1 + \dfrac{c}{2}\left(\mp\dfrac{1}{R} \mp \dfrac{1}{R'}\right)\right], \end{cases}$$

und hieraus ergiebt sich weiter:

$$(11)\qquad h_2 = -h_1\left[1 + c\left(\mp\frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Eine noch grössere Uebereinstimmung, als zwischen den Grössen h_2 und $-h_1$, findet zwischen zwei anderen damit zusammenhängenden Grössen statt. Wir wollen auf der ersten Fläche ein Element $d\omega_1$ betrachten. Am Umfange desselben wollen wir uns unendlich viele Normalen auf der Fläche errichtet denken, die auf der zweiten Fläche ein Element abgrenzen, welches wir als das entsprechende ansehen und mit $d\omega_2$ bezeichnen wollen. Die auf diesen beiden Elementen befindlichen Electricitätsmengen sind $h_1 d\omega_1$ und $h_2 d\omega_2$. Nun ergiebt sich aber aus einfachen geometrischen Betrachtungen, dass die beiden Flächenelemente, unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnungen, in folgender Beziehung zu einander stehen:

$$(12)\qquad d\omega_2 = d\omega_1\left[1 + c\left(\pm\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Wenn man nun die Gleichungen (11) und (12) mit einander multiplicirt, so verschwindet das mit dem Factor c behaftete Glied, und wenn man das mit dem Factor c^2 behaftete Glied fortlässt, so kommt:

$$(13) \qquad h_2\, d\omega_2 = -h_1\, d\omega_1$$

d. h. die Electricitätsmengen, welche sich auf zwei entsprechenden Flächenelementen befinden, sind, abgesehen vom Vorzeichen, einander so nahe gleich, dass die Abweichung im Verhältnisse zum ganzen Werthe nur eine Grösse von der Ordnung c^2 ist.

Dasselbe, was hier von zwei entsprechenden Flächenelementen gesagt ist, muss natürlich auch von endlichen Flächenstücken gelten, welche so begrenzt sind, dass die an der einen Grenzlinie auf der Fläche errichteten Normalen sämmtlich die andere Grenzlinie treffen. Auch auf diesen endlichen Flächenstücken müssen die Electricitätsmengen einander so nahe gleich sein, dass die Abweichung im Verhältnisse zur ganzen Menge nur von zweiter Ordnung in Bezug auf c ist.

§. 3. Vervollständigungen, welche in den vorigen Gleichungen noch nöthig sind.

Die im vorigen Paragraphen mitgetheilten Gleichungen hat Green für den Condensator, die Franklin'sche Tafel und die Leidener Flasche abgeleitet, und sie bilden die Grundlage der auf diese Apparate bezüglichen Theorie. Bei näherer Betrachtung findet man aber, dass sie noch nicht alles enthalten, was bei diesen Apparaten zu berücksichtigen ist.

Wir wollen im Folgenden der Kürze wegen immer von der *Leidener Flasche* sprechen, weil das, was von dieser gilt, auch auf die Franklin'sche Tafel und den Condensator Anwendung findet, und sogar, wenn man bei den letzteren die beiden Metallplatten als eben, parallel, gleich und einander genau senkrecht gegenüberstehend voraussetzt, noch einfacher wird.

Es handelt sich bei der mathematischen Betrachtung dieser Apparate vorzugsweise darum, wenn die Potentialniveaux der beiden Belegungen (d. h. die auf den Belegungen stattfindenden Werthe der Potentialfunction) gegeben sind, dann die auf ihnen befindlichen Electricitätsmengen zu bestimmen, oder, allgemeiner ausgedrückt, die Gleichungen, welche zwischen den beiden Potential-

niveaux und den beiden Electricitätsmengen stattfinden, aufzustellen.

Die Green'schen Gleichungen (10) geben uns die electrischen Dichtigkeiten h_1 und h_2 auf den beiden einander zugewandten Flächen der Belegungen, und wenn man unter Anwendung dieser Werthe die Producte $h_1 d\omega_1$ und $h_2 d\omega_2$ bildet, worin $d\omega_1$ und $d\omega_2$ Elemente der beiden Flächen bedeuten, und dann die Differentialausdrücke über endliche Flächenstücke integrirt, so erhält man die auf diesen Flächenstücken befindlichen Electricitätsmengen. Nun ist aber zu bemerken, dass die Gleichungen (10) doch nicht ganz allgemein gültig sind. Zunächst ist aus der Art der Ableitung dieser Gleichungen klar, dass sie, weil in ihnen Glieder höherer Ordnungen in Bezug auf c vernachlässigt wurden, nur dann anwendbar sind, wenn der Abstand der Flächen an der betrachteten Stelle gegen die Dimensionen der Belegungen klein ist. Im vorliegenden Falle kommt aber noch ein anderer Umstand in Betracht. Die Belegungen einer Leidener Flasche sind dünne Metallblätter, die von scharfen Rändern begrenzt sind. An einem solchen Rande tritt nun in Bezug auf die Electricität ein eigenthümliches Verhalten ein, indem sich bei gleichem Werthe der Potentialfunction am Rande die Electricität viel stärker anhäuft, als an den vom Rande entfernten Flächentheilen. Man darf daher die Gleichungen nur auf diejenigen Partien der einander zugewandten Flächen der Belegungen anwenden, welche von den Rändern der Belegungen so weit entfernt sind, dass man die Entfernung vom Rande gegen den Abstand der Belegungen von einander, oder, wie wir bei Leidener Flaschen etwas kürzer sagen können, gegen die *Glasdicke* als gross betrachten kann. Auf diesen Partien ist, sofern die Glasdicke als constant vorausgesetzt wird, auch die electrische Dichtigkeit als sehr nahe constant zu betrachten. In der Nähe der Ränder aber hat die electrische Dichtigkeit andere, und zwar grössere Werthe.

Man sieht hieraus, dass die Integrale, welche man erhält, wenn man für h_1 und h_2 einfach die Werthe (10) anwendet, und damit die Integrationen über die ganzen Flächen der Belegungen ausführt, mit einer Ungenauigkeit behaftet sein müssen, deren Grösse von der Grösse, Gestalt und Lage der Ränder abhängt. Ausserdem ist noch zu bemerken, dass man bei den Integrationen über die Flächen der Belegungen stillschweigend vorauszusetzen pflegt, dass beide Belegungen genau gleich weit reichen, so dass

ihre Ränder sich senkrecht gegenüberstehen. In der Wirklichkeit aber ist dieses nicht immer genau erfüllt, und es kann auch dieser Umstand einen, wenn auch in der Regel nur geringen Einfluss auf das Resultat haben.

Eine andere wesentliche Vernachlässigung besteht darin, dass Green nur diejenigen Electricitätsmengen betrachtet, welche sich auf den einander zugewandten Flächen der beiden Belegungen befinden, auf die Electricitätsmengen dagegen, welche sich auf den von einander abgewandten Flächen befinden, keine Rücksicht nimmt. Diese letzteren Electricitätsmengen sind zwar bei der gewöhnlichen Art der Ladung viel kleiner, als die ersteren, indessen sind sie doch bei manchen Betrachtungen von Bedeutung, weil vorzugsweise sie es sind, welche die Verschiedenheit der auf den beiden Belegungen befindlichen Electricitätsmengen verursachen.

Man muss demnach zu den aus den Green'schen Gleichungen sich ergebenden Grössen noch ergänzende, auf die erwähnten Umstände bezügliche Grössen hinzufügen, wenn man die auf den Belegungen befindlichen Electricitätsmengen genau darstellen will.

§. 4. Behandlung einfacher specieller Fälle.

Um die Anschauung zu erleichtern, wollen wir, bevor wir zur Aufstellung allgemeiner Gleichungen für beliebig gestaltete Leidener Flaschen schreiten, einige specielle Formen, welche sich besonders leicht behandeln lassen, zur Betrachtung auswählen.

Als erste Form wählen wir eine solche, die zwar in der Wirklichkeit nicht vorkommen kann, die aber doch, wenn man sie sich als existirend denkt, im Wesentlichen unter denselben Gesetzen stehen muss, wie die gewöhnlichen Flaschen, und zu sehr einfachen Resultaten führt. Als Glasgefäss soll nämlich eine *ganz geschlossene Hohlkugel* von überall gleicher Glasdicke dienen und diese soll auf ihrer ganzen inneren und äusseren Fläche mit Stanniol belegt sein. Auf der inneren Belegung befinde sich die auf irgend eine Weise dorthin gelangte Electricitätsmenge M und auf der äusseren Belegung die Electricitätsmenge N. Es fragt sich, welche Werthe dann die Potentialfunction auf den beiden Belegungen hat.

Jede der beiden Belegungen hat zwei kugelförmige Grenzflächen, welche wir die innere und äussere Grenzfläche nennen

wollen, und da im Inneren eines leitenden Körpers keine getrennte Electricität vorhanden sein kann, so können die Electricitätsmengen M und N nur auf diesen Grenzflächen gelagert sein. Wir wollen die einzelnen auf den vier Flächen befindlichen Electricitätsmengen, von der innersten an, der Reihe nach mit M_1, M_2, N_1 und N_2 bezeichnen, so dass zu setzen ist:

$$M_1 + M_2 = M; \quad N_1 + N_2 = N. \tag{14}$$

Von diesen vier Electricitätsmengen ist sofort ersichtlich, dass sie, sofern nicht noch fremde electrische Kräfte mitwirken, gleichmässig über die betreffenden Flächen verbreitet sein müssen, und man kann also für jede derselben die Gleichungen anwenden, welche für eine gleichmässig über eine Kugelfläche verbreitete Electricitätsmenge gelten, und welche hier nur kurz angeführt werden sollen [1]).

In dem von einer gleichmässig mit Electricität belegten Kugelfläche eingeschlossenen Hohlraume ist die Potentialfunction constant und es gilt, wenn der Radius der Kugelfläche mit r, die Flächendichtigkeit der Electricität mit h und die innere Potentialfunction mit V_i bezeichnet wird, die Gleichung:

$$V_i = 4\pi h r. \tag{15}$$

Da nun der Flächeninhalt der Kugelfläche durch $4\pi r^2$ dargestellt wird, so drückt das Product $4\pi r^2 h$ die ganze auf der Kugelfläche befindliche Electricitätsmenge aus, und wir können daher, wenn wir diese Electricitätsmenge mit Q bezeichnen, schreiben:

$$V_i = \frac{Q}{r}. \tag{15 a}$$

Ausserhalb der Kugelfläche ist die Potentialfunction, welche hier mit V_e bezeichnet werden möge, veränderlich, und zwar ist, wenn l den Abstand des betrachteten Punctes vom Mittelpuncte bedeutet, zu setzen:

$$V_e = 4\pi h \frac{r^2}{l} = \frac{Q}{l}. \tag{16}$$

Diese Gleichungen wenden wir nun auf die oben genannten vier Kugelflächen an. Um ihre Radien ausdrücken zu können, bezeichnen wir den Radius der inneren Grenzfläche der Glaskugel mit a, die Dicke des Glases mit c und die Dicken der beiden Be-

[1]) Siehe mein Buch über die Potentialfunction S. 26.

legungen mit β und γ, dann sind die Radien der einzelnen Flächen von der innersten an: $a - \beta$, a, $a + c$ und $a + c + \gamma$.

Betrachten wir nun irgend einen Punct innerhalb der inneren Belegung, dessen Abstand vom Mittelpuncte l heissen möge, so liegt dieser Punct in Bezug auf die innere Grenzfläche der inneren Belegung im äusseren Raume und in Bezug auf die drei anderen Kugelflächen im inneren Raume. Wir haben daher für die Electricitätsmenge M_1 die Gleichung (16) und für die Electricitätsmengen M_2, N_1 und N_2 die Gleichung (15a), unter Einsetzung der betreffenden Radien für r, anzuwenden. Bezeichnen wir also die ganze Potentialfunction in der inneren Belegung mit F, so kommt:

$$F = \frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{a} + \frac{N_1}{a + c} + \frac{N_2}{a + c + \gamma}. \tag{17}$$

Betrachten wir ferner einen Punct innerhalb der äusseren Belegung, dessen Abstand vom Mittelpuncte wieder l heissen möge, so liegt dieser Punct in Bezug auf die äussere Grenzfläche der äusseren Belegung im inneren Raume und in Bezug auf die drei anderen Kugelflächen im äusseren Raume. Wir haben daher für die Electricitätsmenge N_2 die Gleichung (15a) und für die drei Mengen M_1, M_2 und N_1 die Gleichung (16) anzuwenden, wodurch wir, wenn wir die Potentialfunction in der äusseren Belegung mit G bezeichnen, erhalten:

$$G = \frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{l} + \frac{N_1}{l} + \frac{N_2}{a + c + \gamma}. \tag{18}$$

Innerhalb jeder Belegung muss die Potentialfunction constant, also von l unabhängig sein. Das ist für F nur dadurch möglich, dass

$$M_1 = 0, \tag{19}$$

woraus, gemäss (14), weiter folgt:

$$M_2 = M. \tag{20}$$

Soll ferner G von l unabhängig sein, so muss sein:

$$M_1 + M_2 + N_1 = 0,$$

woraus, unter Berücksichtigung der beiden vorigen Gleichungen, folgt:

$$N_1 = - M, \tag{21}$$

und mit Hülfe dieser Gleichung erhält man aus (14):

$$N_2 = M + N. \tag{22}$$

Durch Einsetzung dieser vier Werthe in die Gleichungen (17) und (18) gehen diese über in:

$$(23)\quad \begin{cases} F = \dfrac{c}{a(a+c)} M + \dfrac{M+N}{a+c+\gamma} \\ G = \dfrac{M+N}{a+c+\gamma}. \end{cases}$$

Löst man diese Gleichungen nach M und N auf, so erhält man:

$$(24)\quad \begin{cases} M = \dfrac{a(a+c)}{c}(F-G) \\ N = \dfrac{a(a+c)}{c}(G-F) + (a+c+\gamma)\,G. \end{cases}$$

Bezeichnet man den Flächeninhalt der inneren Grenzfläche der Glaskugel mit s, so ist $s = 4\pi a^2$, und man kann daher die vorigen Gleichungen so schreiben:

$$(25)\quad \begin{cases} M = \dfrac{s}{4\pi c}\left(1+\dfrac{c}{a}\right)(F-G) \\ N = \dfrac{s}{4\pi c}\left(1+\dfrac{c}{a}\right)(G-F) + (a+c+\gamma)\,G. \end{cases}$$

Steht die äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung, so ist zu setzen: $G = 0$. Dadurch wird $N = -M$ und zwischen M und F erhält man die einfache Gleichung:

$$(26)\quad M = \frac{s}{4\pi c}\left(1+\frac{c}{a}\right)F.$$

Ein anderer specieller Fall, welcher verhältnissmässig leicht zu behandeln ist, ist der einer Franklin'schen Tafel mit kreisförmigen Belegungen. Diesen habe ich in einer im Jahre 1852 veröffentlichten Abhandlung [1]) einer näheren Betrachtung unterworfen, von deren Resultaten hier einige mitgetheilt werden mögen. Wenn a den Radius der kreisförmigen Belegungen und c ihren gegenseitigen Abstand bedeutet, so lauten die betreffenden Gleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} M - N = \dfrac{a^2}{2c}\left(1+\dfrac{c}{a\pi}\log\dfrac{17{\cdot}68\,a}{c}\right)(F-G)\;^{2)} \\ M + N = \dfrac{a}{\pi}(F+G). \end{cases}$$

[1]) Pogg. Ann. Bd. 86, S. 161.

[2]) In neuester Zeit ist eine schöne Abhandlung „zur Theorie des Condensators" von Kirchhoff erschienen (Monatsberichte der Berliner Aca-

Indem wir diese Gleichungen zu einander addiren und von einander subtrahiren, und zugleich für den Flächeninhalt einer der Belegungen, also für die Grösse πa^2, das Zeichen s einführen, erhalten wir:

$$(28)\quad \begin{cases} M = \frac{s}{4\pi c}\left[1 + \frac{c}{a\pi}\left(log\,\frac{17{\cdot}68\,a}{c} - 2\right)\right](F - G) + \frac{a}{\pi}F \\ N = \frac{s}{4\pi c}\left[1 + \frac{c}{a\pi}\left(log\,\frac{17{\cdot}68\,a}{c} - 2\right)\right](G - F) + \frac{a}{\pi}G. \end{cases}$$

Ebenso kann man auch F und G durch M und N oder überhaupt irgend zwei der vier Grössen M, N, F, G durch die beiden anderen ausdrücken.

Für den Fall, dass eine der Belegungen, welche wir als die zweite annehmen wollen, mit der Erde in leitender Verbindung steht, und demgemäss G den Werth Null hat, braucht man von den drei übrigen Grössen M, N und F nur Eine zu kennen, um die beiden anderen zu bestimmen. So erhält man z. B.:

$$(29)\quad \begin{cases} M = \frac{s}{4\pi c}\left[1 + \frac{c}{a\pi}\left(log\,\frac{17{\cdot}68\,a}{c} + 2\right)\right]F \\ N = -\frac{s}{4\pi c}\left[1 + \frac{c}{a\pi}\left(log\,\frac{17{\cdot}68\,a}{c} - 2\right)\right]F. \end{cases}$$

§. 5. Allgemeine Gleichungen für zwei beliebige Körper.

Um die betreffenden Ausdrücke für die beiden Belegungen einer beliebig gestalteten Leidener Flasche bilden zu können, wollen wir zunächst die Sache noch allgemeiner betrachten, und statt der Belegungen irgend zwei leitende Körper A und B als gegeben

---

demie, März 1877), in welcher für denselben Fall folgende Gleichung gegeben ist:

$$M - N = \frac{a^2}{2c}\left(1 + \frac{c}{a\pi}\,log\,\frac{16\pi a}{ec}\right)(F - G)$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Diese Gleichung stimmt, wie man sieht, der Form nach mit der meinigen überein, und auch der constante Factor $\frac{16\pi}{e}$ ist von der Zahl 17·68, welche ich durch eine Reihenentwickelung als Näherungswerth berechnet habe, nur wenig verschieden.

annehmen, in deren Nähe sich noch beliebige andere leitende Körper befinden dürfen, von denen wir aber voraussetzen wollen, dass sie entweder mit der Erde in leitender Verbindung stehen, oder, falls sie isolirt sind, keine Electricität mitgetheilt erhalten. Für diese Körper A und B wollen wir gewisse allgemeine Gleichungen ableiten, welche sich auf ihre gegenseitige Influenz beziehen, und welche wir dann auf die beiden Belegungen der Leidener Flasche anwenden können.

Zunächst möge der Körper A mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt und B isolirt werden, und unter diesen Umständen lade man B bis zum Potentialniveau $-K$ mit Electricität. Auf dem Körper A, dessen Potentialniveau wegen seiner Verbindung mit der Erde Null bleiben muss, wird dann durch Influenz eine gewisse Electricitätsmenge angesammelt, welche jedenfalls der Grösse K proportional ist, und welche wir daher jetzt mit aK bezeichnen wollen. Die gleichzeitig auf B befindliche Electricitätsmenge, welche auch der Grösse K proportional und von entgegengesetztem Vorzeichen sein muss, wollen wir durch $-bK$ darstellen. Die in diesen beiden Ausdrücken vorkommenden Factoren a und b sind zwei positive Constante, welche von der Grösse und Gestalt der Körper A und B und von ihrer Lage zu einander und zu den übrigen im Bereiche der Influenz befindlichen leitenden Körpern abhängen.

Nachdem diese Ladung geschehen ist, denke man sich die leitende Verbindung zwischen dem Körper A und der Erde unterbrochen, so dass nun beide Körper A und B isolirt sind. Unter diesen Umständen theile man beiden Körpern soviel gleichartige Electricität mit, dass sich auf beiden das Potentialniveau um den Betrag K' ändere. Die dazu nöthigen Electricitätsmengen sind dieselben, wie die, welche man anwenden müsste, wenn die beiden isolirten Körper anfangs unelectrisch wären, und man sie dann auf das gleiche Potentialniveau K' bringen wollte. Da diese Electricitätsmengen dem Potentialniveau K' proportional sein müssen, so wollen wir sie mit $\alpha K'$ und $\beta K'$ bezeichnen, worin α und β wieder zwei positive von der Grösse, Gestalt und Lage der Körper abhängige Constante sind.

Die durch diese beiden auf einander folgenden Operationen entstandenen Zustände der beiden Körper lassen sich folgendermaassen ausdrücken:

$$\text{Körper } A \begin{cases} \text{Potentialniveau: } K' \\ \text{Electricitätsmenge: } aK + \alpha K' \end{cases}$$

$$\text{Körper } B \begin{cases} \text{Potentialniveau: } -K + K' \\ \text{Electricitätsmenge: } -bK + \beta K' \end{cases}$$

Nehmen wir nun als speciellen Fall an, es sei:

$$-K + K' = 0$$

und somit:

$$K' = K,$$

so sind die Zustände, welche die Körper nach den beiden Operationen haben, dieselben, wie die, welche sie angenommen haben würden, wenn einfach der Körper B mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt und dadurch auf dem Potentialniveau Null erhalten wäre, während man den Körper A isolirt und bis zum Potentialniveau K mit Electricität geladen hätte. Die unter diesen Umständen auf B durch Influenz angesammelte Electricitätsmenge muss nach Gleichung (38) des vorigen Abschnittes, welche sich auf zwei Ladungen bis zum Potentialniveau K bezieht, der mit aK bezeichneten Electricitätsmenge, welche der Körper A aufnimmt, wenn er mit der Erde verbunden ist, während B bis zum Potentialniveau $-K$ geladen wird, gleich und entgegengesetzt sein. Wir können also, wenn wir in dem Ausdrucke der auf B befindlichen Electricitätsmenge die Grösse K' durch K ersetzen, folgende Gleichung bilden:

$$-bK + \beta K = -aK,$$

woraus folgt:

$$b = a + \beta.$$

Hierdurch ist eine der vier oben eingeführten Constanten bestimmt, und wir können nun wieder zu dem allgemeineren Falle, wo K' nicht gleich K zu sein braucht, zurückkehren, und in den Ausdrücken, welche die Zustände der beiden Körper darstellen, für b den gefundenen Werth einsetzen. Dadurch erhalten wir:

$$\text{Körper } A \begin{cases} \text{Potentialniveau: } K' \\ \text{Electricitätsmenge: } aK + \alpha K' \end{cases}$$

$$\text{Körper } B \begin{cases} \text{Potentialniveau: } -K + K' \\ \text{Electricitätsmenge: } -aK + \beta(-K + K'). \end{cases}$$

Das in diesen Ausdrücken enthaltene Ergebniss der vorstehenden Betrachtung wollen wir nun noch in etwas bequemere Form bringen. Anstatt die auf die beiden einzelnen Operationen

bezüglichen Potentialniveaux in den Formeln zu behalten, wollen wir die schliesslich stattfindenden Potentialniveaux der beiden Körper durch einfache Buchstaben darstellen. Das schliessliche Potentialniveau des Körpers A möge mit F, und dasjenige des Körpers B mit G bezeichnet werden. Dann haben wir zu setzen:

$$K' = F$$

$$-K + K' = G$$

und somit:

$$K = F - G.$$

Ferner wollen wir die schliesslich auf den beiden Körpern befindlichen Electricitätsmengen mit M und N bezeichnen. Dann können wir dem Vorigen nach folgende zwei Gleichungen bilden, welche für jede zwei unter gegenseitiger Influenz stehende leitende Körper gelten, wenn alle anderen im Bereiche der Influenz befindlichen leitenden Körper mit der Erde in leitender Verbindung stehen, oder, falls sie isolirt sind, keine Electricität mitgetheilt erhalten:

$$(30) \qquad \begin{cases} M = a(F - G) + \alpha F \\ N = a(G - F) + \beta G. \end{cases}$$

§. 6. Bestimmung des Coëfficienten a für Leidener Flaschen.

Wenn wir diese Gleichungen auf die beiden Belegungen einer Leidener Flasche anwenden, so können wir die Grössen a, α und β näher bestimmen. Wir wollen dabei die innere Belegung der Flasche als den Körper A und die äussere Belegung als den Körper B betrachten.

Zunächst möge angenommen werden, dass die äussere Belegung bis zum Potentialniveau G geladen sei, während die innere Belegung mit der Erde in Verbindung stehe. Die unter diesen Umständen auf der inneren Belegung befindliche Electricitätsmenge kann man durch die erste der Gleichungen (30) ausdrücken, wenn man darin $F = 0$ setzt, also:

$$(31) \qquad M = -aG.$$

Ausserdem kann man in diesem Falle die Electricitätsmenge M auch durch directe Betrachtungen bis auf einen gewissen Grad von Genauigkeit bestimmen.

Da sich nämlich auf der inneren Belegung, welche mit der Erde leitend verbunden ist, nur so viel Electricität befindet, wie durch die Anziehung derjenigen Electricität, mit welcher die äussere Belegung geladen ist, festgehalten wird, so kann man schliessen, dass die auf der inneren Belegung befindliche Electricität ganz auf der der äusseren Belegung zugewandten Fläche der inneren Belegung gelagert ist. Zur Bestimmung der Dichtigkeit der Electricität auf dieser Fläche kann man die erste der Gleichungen (10) anwenden, wenn man darin $V_2 = G$ und $V_1 = 0$ setzt. Diese Gleichung lautet dann:

$$h_1 = -\frac{G}{4\pi c}\left[1 + \frac{c}{2}\left(\pm\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Es sei nun $d\omega$ ein Element der nach Aussen gewandten Fläche der inneren Belegung oder, wie man kürzer zu sagen pflegt, ein Flächenelement der inneren Belegung, indem man die nach Aussen gewandte Fläche und die nach Innen gewandte Fläche einer und derselben Belegung als gleich gross betrachtet. Mit diesem Flächenelemente multiplicire man die vorige Gleichung an beiden Seiten und integrire die dadurch entstehenden Differentialausdrücke über die ganze Fläche der inneren Belegung, wodurch folgende Gleichung entsteht:

$$(32)\qquad \int h_1 d\omega = -\frac{G}{4\pi}\left[\int\frac{d\omega}{c} + \frac{1}{2}\int\left(\pm\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)d\omega\right].$$

Von den an der rechten Seite dieser Gleichung in der eckigen Klammer stehenden Integralen kann man das erste für den Fall, dass die Glasdicke c constant ist, sofort ausführen. Sei nämlich mit s die Fläche der inneren Belegung bezeichnet, so ist:

$$(33)\qquad \int\frac{d\omega}{c} = \frac{s}{c}.$$

Sollte die Glasdicke c nicht constant sein, so wollen wir einen mittleren Werth c_m einführen, welcher durch folgende Gleichung bestimmt sein soll:

$$(34)\qquad \int\frac{d\omega}{c} = \frac{s}{c_m}.$$

Durch Einsetzung dieses Bruches für das betreffende Integral geht die Gleichung (32) über in:

$$\int h_1 d\omega = -\frac{G}{4\pi}\left[\frac{s}{c_m} + \frac{1}{2}\int\left(\pm\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)d\omega\right]$$

oder anders geschrieben:

$$(35)\quad \int h_1\,d\omega = -\,G\,\frac{s}{4\pi c_m}\left[1 + \frac{c_m}{2s}\int\left(\pm\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)d\omega\right].$$

Dieses so ausgedrückte Integral $\int h_1 d\omega$ ist nun zwar nicht vollkommen identisch mit der ganzen unter den genannten Umständen auf der inneren Belegung befindlichen Electricitätsmenge M, sondern weicht ein Wenig von derselben ab, weil in der Nähe des Randes die electrische Dichtigkeit grösser ist, als der obige Ausdruck von h_1 angiebt. Die Abweichung kann aber nach dem, was in §. 3 gesagt ist, nur eine solche Grösse sein, die, wenn man sie als Bruchtheil des ganzen Integralwerthes ausdrückt, mit abnehmender Glasdicke in der Weise abnimmt, dass sie mit unendlich klein werdender Glasdicke (vorausgesetzt dass das Glas ohne Beeinträchtigung seines Isolationsvermögens unendlich dünn gemacht werden könnte) ebenfalls unendlich klein wird. Da nun in der eckigen Klammer der vorigen Gleichung sich schon ein Glied befindet, welches mit dem Factor c_m behaftet ist, und daher die Eigenschaft hat, mit der Glasdicke zugleich abzunehmen und unendlich klein zu werden, so können wir die vorgenannte Abweichung mit diesem Gliede zusammenfassen, und wir wollen die dadurch entstehende Grösse, welche innerhalb der Klammer zu 1 addirt werden muss, mit δ bezeichnen. Dann können wir schreiben:

$$(36)\qquad M = -\,G\,\frac{s}{4\pi c_m}(1+\delta).$$

Da nun nach Gleichung (31) für M der Ausdruck $-\,aG$ gesetzt werden kann, so geht die vorige Gleichung über in:

$$-\,aG = -\,G\,\frac{s}{4\pi c_m}(1+\delta)$$

und wenn wir hieraus noch die Grösse $-\,G$ fortheben, so erhalten wir die Gleichung:

$$(37)\qquad a = \frac{s}{4\pi c_m}(1+\delta).$$

Hierdurch ist der Coëfficient a soweit bestimmt, dass nur noch die im Verhältnisse zu 1 kleine Grösse δ unbestimmt gelassen ist.

§. 7. Bedeutung der Coëfficienten α und β für Leidener Flaschen.

Wir wenden uns nun zu den beiden Coëfficienten α und β, um zu sehen, in wie weit sich diese bestimmen lassen.

Gemäss dem, was oben über diese beiden Coëfficienten gesagt ist, können wir sie für eine Leidener Flasche folgendermaassen definiren: *Wenn beide Belegungen der Flasche so geladen werden sollen, dass die Potentialfunction auf ihnen den gemeinsamen Werth 1 hat, so sind die dazu nöthigen Electricitätsmengen α und β.*

Denken wir uns, nachdem diese Ladung beider Belegungen zu einem gemeinsamen Potentialniveau stattgefunden hat, zwischen beiden Belegungen eine leitende Verbindung hergestellt, z. B. mittelst eines durch die isolirende Schicht hindurchgehenden sehr dünnen Drahtes, so wird dadurch in der Vertheilung der Electricität und im Potentialniveau keine Aenderung veranlasst werden. Denken wir uns ferner, dass die Metallplatten, welche die Belegungen bilden, einander mehr und mehr genähert werden, so dass sie endlich zur Berührung kommen, und zusammen als eine einfache Metallplatte von der Form einer der Belegungen zu betrachten sind, so wird auch dadurch das gemeinsame Potentialniveau sich nur um eine Grösse ändern können, welche im Verhältnisse zum ursprünglichen Werthe 1 von der Ordnung $\frac{c}{\sqrt{s}}$ ist, d. h. von der Ordnung des Verhältnisses, in welchem der Abstand der Platten von einander zu ihren Dimensionen steht. Sollte das Potentialniveau bei der Annäherung bis zur Berührung ungeändert gleich 1 erhalten werden, so würde dazu eine kleine Aenderung der gesammten Electricitätsmenge $\alpha + \beta$ erforderlich sein, welche Aenderung aber im Verhältnisse zum ursprünglichen Werthe ebenfalls nur von der Ordnung $\frac{c}{\sqrt{s}}$ sein würde. Da nun aber die Grösse $\alpha + \beta$ selbst schon gegen die Grösse a klein ist, indem ihr Ausdruck nicht, wie derjenige von a, den Abstand c im Nenner hat, so wollen wir eine Aenderung, die im Verhältnisse zum ganzen Werthe von $\alpha + \beta$ von der Ordnung $\frac{c}{\sqrt{s}}$ ist, vernachlässigen, und uns mit dem folgenden angenäherten Satze begnügen: *Denkt man sich, dass nur Eine der beiden Belegungen vorhanden*

wäre, so ist $\alpha + \beta$ angenähert gleich der Electricitätsmenge, welche man dieser einen Belegung mittheilen müsste, um sie bis zum Potentialniveau 1 *zu laden.*

Hierdurch ist die Summe der beiden Coëfficienten α und β, wenn auch nicht wirklich bestimmt, so doch auf einen einfacheren Fall zurückgeführt, aus dem man selbst dann, wenn man die weitere Rechnung nicht ausführt, schon eine Vorstellung von der Art der Grösse, um die es sich handelt, gewinnen kann.

Was nun noch das Verhältniss der beiden einzelnen Coëfficienten α und β zu einander anbetrifft, so hängt dieses vorzugsweise davon ab, wie die Belegungen gekrümmt sind. Sind beide Belegungen eben, wie bei einer Franklin'schen Tafel, und nehmen wir dazu noch an, dass sie vollkommen gleich gross sind, und dass die beiden Ränder sich überall senkrecht gegenüberstehen, so sind die beiden Coëfficienten α und β unter einander gleich. Für den noch specielleren Fall, dass die Belegungen kreisförmig sind, haben α und β, wie man aus (28) ersieht, den gemeinsamen Werth $\frac{a}{\pi}$, worin a den Radius des Kreises bedeutet. Sind die Belegungen so gekrümmt, dass die eine die andere ganz umschliesst, so ist der auf die innere Belegung bezügliche Coëfficient α gleich Null, und der auf die äussere Belegung bezügliche Coëfficient β hat den ganzen Werth, welcher vorher für die Summe beider bestimmt wurde. Für die in §. 4 behandelte Kugelflasche hat β, wie man aus den Gleichungen (25) ersieht, den Werth $a + c + \gamma$, worin a den Radius der inneren Grenzfläche der Glaskugel, c die Dicke des Glases und γ die Dicke der äusseren Belegung bedeutet. Wenn endlich, wie es bei gewöhnlichen Leidener Flaschen der Fall ist, eine Belegung die andere zwar theilweise, aber nicht vollständig umschliesst, so ist aus der Vergleichung mit den beiden vorigen Fällen leicht ersichtlich, dass der auf die innere Belegung bezügliche Coëfficient α kleiner sein muss, als der auf die äussere Belegung bezügliche Coëfficient β.

§. 8. Bequeme Form der Gleichungen.

Wir kehren nun zu den Gleichungen (30) zurück. Für den Coëfficienten a setzen wir den in (37) gegebenen Ausdruck, worin wir aber statt c_m einfach c schreiben wollen, indem wir im Fol-

genden unter c die durch Gleichung (34) bestimmte mittlere Glasdicke verstehen. Die beiden anderen Coëfficienten α und β behalten wir unverändert bei. Dann lauten die für eine geladene Leidener Flasche geltenden Gleichungen:

$$(38) \qquad \begin{cases} M = \frac{s}{4\pi c}(1+\delta)(F-G)+\alpha F \\ N = \frac{s}{4\pi c}(1+\delta)(G-F)+\beta G. \end{cases}$$

Zur Abkürzung wollen wir noch setzen:

$$(39) \qquad \varkappa = \frac{4\pi c}{1+\delta},$$

woraus sich ergiebt, dass die neu eingeführte Grösse $\varkappa$ vorzugsweise von der Glasdicke abhängt, und angenähert gleich $4\pi c$ ist. Dadurch nehmen die Gleichungen folgende etwas einfachere Gestalt an:

$$(40) \qquad \begin{cases} M = \frac{s}{\varkappa}(F-G)+\alpha F \\ N = \frac{s}{\varkappa}(G-F)+\beta G. \end{cases}$$

Bei der Anwendung der Leidener Flaschen ist der gewöhnlichste Fall der, wo die äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung steht. In diesem Falle ist $G = 0$ zu setzen, und die Gleichungen gehen dadurch über in:

$$(41) \qquad \begin{cases} M = \left(\frac{s}{\varkappa}+\alpha\right)F \\ N = -\frac{s}{\varkappa}F. \end{cases}$$

Da es in dem zuletzt genannten Falle bequem ist, wenn man die auf der inneren Belegung befindliche Electricitätsmenge M mit dem auf derselben Belegung stattfindenden Werthe F der Potentialfunction in möglichst einfacher Weise vergleichen kann, so wollen wir neben dem griechischen Buchstaben $\varkappa$ noch den lateinischen Buchstaben k einführen, dessen Bedeutung durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{s}{k} = \frac{s}{\varkappa} + \alpha, \tag{42}$$

woraus folgt:

$$k = \frac{\varkappa}{1 + \alpha\frac{\varkappa}{s}} = \frac{4\pi c}{1 + \delta + \alpha\frac{4\pi c}{s}}. \tag{43}$$

Dadurch gehen die allgemeinen Gleichungen (40) über in:

$$\left\{\begin{array}{l} M = \frac{s}{k}(F - G) + \alpha G \\ N = \left(\frac{s}{k} - \alpha\right)(G - F) + \beta G, \end{array}\right. \tag{44}$$

und die speciellen Gleichungen (41), welche sich auf den Fall beziehen, wo die äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung steht, gehen über in:

$$\left\{\begin{array}{l} M = \frac{s}{k} F \\ N = -\left(\frac{s}{k} - \alpha\right) F. \end{array}\right. \tag{45}$$

Mit Hülfe der unter (40) und in veränderter Form unter (43) angeführten Gleichungen kann man, wenn von den vier Grössen M, N, F und G irgend zwei gegeben sind, die beiden anderen bestimmen. Ebenso kann man in dem speciellen Falle, wo die äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung steht, mit Hülfe der unter (41) und in veränderter Form unter (45) angeführten Gleichungen aus jeder der drei Grössen M, N und F die beiden anderen berechnen.

ABSCHNITT III.

Behandlung dielectrischer Medien.

§. 1. Verhalten der isolirenden Zwischenschicht.

Im vorigen Abschnitte ist die Zwischenschicht, welche die beiden Platten eines Condensators oder die beiden Belegungen einer Franklin'schen Tafel oder Leidener Flasche von einander trennt, einfach als vollkommener Isolator betrachtet, dessen electrischer Zustand sich durch die Einwirkung der auf den Platten oder Belegungen befindlichen Electricität nicht ändert, und der daher auch keine electrische Gegenwirkung ausüben kann. So einfach ist die Sache aber in der Wirklichkeit nicht. Schon Faraday und nach ihm Wern. Siemens haben beobachtet, dass das electrische Verhalten eines Condensators bei gleichem Abstande der Platten noch wesentlich von der Natur des zwischen den Platten befindlichen Isolators abhängt. Faraday hat sich daraus sogar die Ansicht gebildet, dass die mit Electricität geladenen Platten überhaupt nicht direct aus der Entfernung auf einander wirken, sondern dass die Wirkung nur durch Vermittelung des dazwischen befindlichen Stoffes stattfinden könne, und er hat einen solchen Stoff, welcher, ohne die Electricität zu leiten, die von der Electricität in die Entfernung ausgeübte Wirkung vermittelt, ein Dielectricum genannt. Diesen Namen kann man auch dann beibehalten, wenn man sich der Faraday'schen Ansicht nicht ganz anschliesst, sondern annimmt, dass zwar eine directe Wirkung der Electricität in die Entfernung stattfinde, dass diese Wirkung aber durch den dazwischen befindlichen Stoff modificirt werde.

In neuerer Zeit haben Boltzmann[1]), Wüllner[2]) u. A. die Kenntniss des Verhaltens der isolirenden Stoffe zur Electricität

---

[1]) Sitzungsberichte der Wiener Academie 1873 und 1874.

[2]) Wiedemann's Ann. Bd. 1, S. 247 (1877).

durch ausgezeichnete experimentelle Untersuchungen gefördert, und es kann nach den Resultaten dieser Untersuchungen kein Zweifel darüber bestehen, dass die Wirkung der Electricität durch verschiedene isolirende Stoffe hindurch mit sehr verschiedener Stärke stattfindet.

Mit der Zustandsänderung, welche das bei einer Leidener Flasche als isolirende Zwischenschicht angewandte Glas unter dem Einflusse der auf den Belegungen befindlichen Electricitäten erleidet, und wodurch es umgekehrt auch wieder auf diese Electricitäten wirkt, hängt auch der Rückstand zusammen, welchen man nach der Entladung einer Leidener Flasche beobachtet, und diese Rückstandbildung, über welche besonders von R. Kohlrausch werthvolle messende Untersuchungen angestellt sind [1]), hat schon mehrfach zur Besprechung des Verhaltens der isolirenden Stoffe Veranlassung gegeben.

Alle Untersuchungen über dieses Verhalten werden erheblich dadurch erschwert, dass das Glas und die sonst zur Isolation angewandten Stoffe keine vollkommenen Isolatoren sind. Manche Glassorten leiten so stark, dass sie dadurch zur Verwendung für Leidener Flaschen ganz unbrauchbar werden, indem die Electricität von den Belegungen so schnell in das Glas eindringt und sich dort ausgleicht, dass die Ladung sich in kurzer Zeit fast vollständig verliert. Andere Glassorten leiten zwar viel weniger, aber ganz frei von Leitung sind auch sie nicht. Diese, wenn auch schwache Leitung und das dadurch ermöglichte Eindringen von Electricität in den betreffenden Stoff hat Wirkungen zur Folge, welche mit jenen anderen, dem Stoffe als Dielectricum eigenthümlichen Wirkungen gleichzeitig stattfinden, und natürlich die davon abhängigen Erscheinungen complicirter machen, so dass es sehr schwer ist, zu unterscheiden, in wie weit die Erscheinungen von der einen oder von der anderen Wirkung verursacht werden.

In der That sind dadurch auch sehr verschiedene Urtheile über die betreffenden Erscheinungen veranlasst. Die Rückstandbildung haben manche Autoren ganz aus dem Eindringen der Electricität in das Glas erklären wollen; besonders von Bezold, welcher werthvolle Untersuchungen über die Abnahme der disponiblen Ladung bei Leidener Flaschen und Franklin'schen Ta-

---

[1]) Pogg. Ann., Bd. 91.

feln angestellt hat[1]). Ich glaube aber nicht, dass es möglich ist, aus diesem Umstande die Rückstandbildung genügend zu erklären, wenn man nicht etwa, wie es Riemann gethan hat[2]), eine besondere zwischen dem Glase und der Electricität stattfindende Kraft zu Hülfe nehmen will. Riemann macht in dieser Beziehung die Annahme, dass die ponderablen Körper „nicht dem electrisch Werden oder der Annahme von Spannungselectricität, sondern dem electrisch Sein oder dem Enthalten von Spannungselectricität widerstreben." Eine solche Annahme scheint mir aber zu fremdartig, um mich ihr anschliessen zu können.

Wir wollen daher im Folgenden das unvollkommene Isolationsvermögen als einen Nebenumstand betrachten, welcher gleichzeitig mit den eigentlichen dielectrischen Wirkungen stattfinden kann, um dessen Bestimmung es sich aber gegenwärtig nicht handelt. Wir wollen also von den auf diesem Umstande beruhenden Verlusten von Electricität ganz absehen, und nur die dielectrischen Wirkungen der Isolatoren ins Auge fassen.

§. 2. Mögliche Annahmen über die innere Polarisation der Isolatoren.

Um die dielectrischen Wirkungen der Isolatoren und speciell der zwischen den beiden Belegungen befindlichen Zwischenschicht zu erklären, scheint es nöthig, anzunehmen, dass durch die Kräfte, welche die auf den Belegungen befindlichen Electricitäten auf das Innere der Zwischenschicht ausüben, in dieser ein polarer Zustand hervorgerufen wird, der dann wieder auf die Belegungen zurückwirken kann. Die Entstehung dieser Polarität kann man sich aber noch in verschiedenen Weisen vorstellen.

Erstens kann man sich denken, dass das Glas, während es im Ganzen ein Nichtleiter sei, doch kleine Körperchen enthalte, welche etwas leitend seien. In diesen Körperchen trete durch Influenz eine Scheidung der Electricitäten ein, wodurch die Körperchen nach der Seite der positiv geladenen Belegung negativ electrisch, und nach der Seite der negativ geladenen Belegung positiv electrisch werden. Bei der Bestimmung des electrischen Zustandes,

[1]) Pogg. Ann., Bd. 114, 125 und 137.

[2]) Amtlicher Bericht über die 31. deutsche Naturforscherversammlung im Jahre 1854 und nachgelassene Werke, S. 48 und 345.

welchen ein solches leitendes Körpertheilchen annehmen würde, muss man natürlich nicht bloss die unmittelbare Wirkung der auf den Belegungen befindlichen Electricität in Betracht ziehen, sondern auch die Wirkung, welche die übrigen, gleichfalls electrisch polar gewordenen Körpertheilchen auf das betrachtete Körpertheilchen ausüben.

Zweitens kann man sich vorstellen, die betreffenden Körpertheilchen seien schon im natürlichen Zustande des Glases, bevor es noch von Aussen her eine electrische Einwirkung erleidet, electrisch polar, aber die Lagerung der Theilchen sei ganz unregelmässig, so dass die positiven und negativen Pole in gleicher Weise nach allen Seiten gerichtet seien, und daher eine gemeinsame Wirkung der Theilchen in einem bestimmten Sinne unmöglich sei. Wenn aber das Glas irgend einer electrischen Kraft unterworfen werde, so werden dadurch die Theilchen einigermaassen gerichtet, so dass die positiven Pole vorwiegend nach der einen und die negativen Pole nach der anderen Seite gekehrt seien, wodurch natürlich eine gemeinsame Wirkung ermöglicht wird. Diese gleichmässige Richtung der Theilchen trete um so vollständiger und allgemeiner ein, je stärker die einwirkende electrische Kraft sei.

Ueber die Kräfte, welche bei dem zuletzt erwähnten Vorgange, nämlich bei der Richtung der vorher unregelmässig gelagerten electrisch polaren Theilchen ins Spiel kommen, kann man wiederum zwei verschiedene Annahmen machen. Man kann annehmen, dass die Theilchen durch die Cohäsion in solcher Weise in ihrer ursprünglichen Lage festgehalten werden, dass durch eine Drehung eines Theilchens eine elastische Gegenkraft entstehe, welche das Theilchen wieder in seine ursprüngliche Lage zurückzubringen suche, und dass diese Gegenkraft, wie andere elastische Kräfte, mit der Grösse der Drehung wachse. Oder man kann annehmen, der Widerstand, den die Cohäsion der Drehung der Theilchen entgegensetzt, sei nur ein passiver Widerstand von der Art einer starken Reibung, so dass daraus keine Kraft hervorgehe, welche die Theilchen wieder in ihre frühere Lage zurückzubringen suche. In diesem Falle würde die einzige Kraft, welche dieses zu bewirken suchte, aus der gegenseitigen electrischen Einwirkung der gerichteten electrisch polaren Theilchen entstehen.

Ausser diesen Annahmen ist noch eine andere möglich, welche Maxwell gemacht und zu sehr interessanten Schlüssen angewandt hat, und von welcher weiter unten noch die Rede sein soll.

§. 3. Auswahl einer Hypothese zur mathematischen Behandlung.

Zu einer ganz sicheren Theorie dessen, was im Inneren der Zwischenschicht unter dem Einflusse der von Aussen wirkenden electrischen Kräfte vor sich geht, scheinen mir die bisher vorhandenen Beobachtungsdata noch nicht den nöthigen Grad von Vollständigkeit und Zuverlässigkeit zu besitzen. Indessen habe ich es bei der Bearbeitung der ersten Auflage dieses Buches für nützlich gehalten, unter Voraussetzung einer gewissen Hypothese eine Rechnung anzustellen, um über die äusseren Wirkungen einer solchen Polarität eine Vorstellung zu gewinnen. Dazu habe ich die Hypothese gewählt, dass sich im Inneren der Zwischenschicht Körperchen befinden, welche etwas leitend sind, welche aber von einander durch nichtleitende Zwischenräume getrennt werden, so dass die Electricität sich nur innerhalb der einzelnen Körperchen bewegen, nicht aber vom einen zum anderen übergehen kann.

Wenn man bei der anderen oben erwähnten Hypothese, dass die Körpertheilchen schon im Voraus electrisch polar sind, und durch die auf sie wirkende Kraft nur gerichtet werden, die Nebenannahme macht, dass bei der Ablenkung der Theilchen aus ihren ursprünglichen unregelmässigen Lagen eine elastische Gegenkraft entstehe, welche der Ablenkung proportional sei, und ferner annimmt, dass selbst bei den stärksten vorkommenden Kräften die entstehenden Ablenkungen im Verhältniss zu denen, welche stattfinden müssten, wenn die Theilchen ganz gleichmässig gerichtet werden sollten, immer nur sehr klein bleiben, so kann man die Ergebnisse der ersten Hypothese auch für die zweite Hypothese als gültig ansehen. Wenn man dagegen bei dieser zweiten Hypothese annehmen wollte, dass der Widerstand, welchen die Cohäsion der Drehung der Theilchen darbietet, nur von der Art einer starken Reibung sei, so dass aus ihm keine zurückdrehende Kraft erwachsen könne, und dass demnach die einzige Kraft, welche die Theilchen wieder in die unregelmässigen Lagen zu bringen suche, diejenige sei, welche durch die gegenseitige electrische Einwirkung der electrisch polaren Theilchen bedingt ist, so müsste man die mathematische Behandlung in etwas anderer Weise ausführen.

Die vorher genannte, von mir zur mathematischen Behandlung ausgewählte Hypothese ist dieselbe, wie die, welche Poisson

und Green für die mathematische Behandlung des Magnetismus ausgewählt haben, und wir können daher, wenn wir alles, was dort von nord- und südmagnetischem Fluidum gesagt ist, auf positive und negative Electricität anwenden, die von jenen Mathematikern schon entwickelten Fundamentalgleichungen auch für unsere Bestimmungen benutzen. Aus diesem Grunde wird es zweckmässig sein, das Wesentlichste jener Entwickelungen hier erst kurz mitzutheilen.

§. 4. Ableitung der Poisson'schen Fundamentalgleichungen.

Wenn die im Inneren des Dielectricums als vorhanden angenommenen und als sehr klein vorausgesetzten leitenden Körperchen durch Influenz electrisch geworden und somit an ihrer Oberfläche mit einer theils positiven, theils negativen electrischen Schicht bedeckt sind, so kann man die äussere Potentialfunction eines solchen Körperchens folgendermaassen bestimmen.

Im Inneren des Körperchens sei ein Punct p mit den Coordinaten x, y, z angenommen, z. B. der Schwerpunct des von dem Körperchen eingenommenen Raumes, und die Coordinaten eines Oberflächenpunctes seien dann mit $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ bezeichnet. Betrachten wir dann einen ausserhalb des Körperchens liegenden Punct p' mit den Coordinaten x', y', z' und bezeichnen seinen Abstand vom Puncte p mit r und seinen Abstand von jenem Oberflächenpuncte mit r_1, so können wir unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnungen setzen:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\zeta.$$

Sei nun bei jenem Oberflächenpuncte ein Flächenelement $d\omega$ genommen und die darauf befindliche Electricitätsmenge mit $h\,d\omega$ bezeichnet, und sei für die Potentialfunction des Körperchens der Buchstabe u gewählt und ihr Werth im Puncte p' mit u' bezeichnet, so ist zu setzen:

$$u' = \int \frac{h\,d\omega}{r_1},$$

worin die Integration über die ganze Oberfläche des kleinen Kör-

perchens auszuführen ist. Substituiren wir hierin für $\frac{1}{r_1}$ den obigen Ausdruck, so kommt:

$$u' = \frac{1}{r}\int h\,d\omega + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\int \xi h\,d\omega + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\int \eta h\,d\omega + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\int \zeta h\,d\omega.$$

Das erste hierin an der rechten Seite stehende Integral ist Null, weil die durch Influenz über die Oberfläche des Körperchens vertheilte Electricität in der Weise aus positiven und negativen Mengen bestehen muss, dass die Summe den Werth Null hat. Für die drei anderen Integrale, welche die electrischen Momente des Körperchens darstellen, mögen besondere Zeichen eingeführt werden, nämlich:

$$(1) \qquad a = \int \xi h\,d\omega; \quad b = \int \eta h\,d\omega; \quad c = \int \zeta h\,d\omega,$$

dann geht die vorige Gleichung über in:

$$(2) \qquad u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}c.$$

Denken wir uns nun an der Stelle, wo das betrachtete Körperchen sich befindet, ein Raumelement $d\tau$ des Dielectricums genommen, so können wir dessen Potentialfunction folgendermaassen ausdrücken. Die Anzahl der in $d\tau$ enthaltenen leitenden Körperchen werde durch $N d\tau$ dargestellt. Wenn diese Körperchen in Bezug auf Grösse, Gestalt und Orientirung ihrer Hauptdimensionen unter einander verschieden sind, und daher die Grössen a, b und c bei ihnen ungleiche Werthe haben, so sollen unter a_1, b_1 und c_1 die Mittelwerthe verstanden werden. Dann ist die Potentialfunction des Raumelementes:

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}a_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}b_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}c_1\right)N d\tau$$

und wenn man zur Vereinfachung setzt:

$$(3) \qquad \alpha = N a_1; \quad \beta = N b_1; \quad \gamma = N c$$

so kommt:

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \gamma\right) d\tau.$$

Diesen Ausdruck hat man über den vom Dielectricum eingenommenen Raum zu integriren, um die Potentialfunction des ganzen, im polaren Zustande befindlichen Dielectricums zu erhalten. Zur Bezeichnung dieser Potentialfunction möge der Buchstabe U gewählt und ihr Werth beim Puncte p' mit den Coordinaten x', y', z' mit U' bezeichnet werden, dann lautet die betreffende Gleichung:

$$(4) \qquad U' = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \gamma\right) d\tau.$$

Es kommt nun weiter darauf an, die Grössen α, β, γ zu bestimmen, wozu wir zunächst die Grössen a, b, c, welche die electrischen Momente eines einzelnen Körperchens darstellen, betrachten müssen. Da diese Momente von der Kraft, unter der das Körperchen steht, hervorgerufen werden, so müssen sie zu den Componenten dieser Kraft, welche wir mit X, Y, Z bezeichnen wollen, in bestimmter Beziehung stehen. Da diese Beziehung von der Grösse, Gestalt und Orientirung des Körperchens abhängt, so braucht sie nicht ganz einfach zu sein, indessen ist so viel leicht zu erkennen, dass, wenn die Kraftcomponenten alle drei in gleichem Verhältnisse wachsen würden, dann auch die Grössen a, b, c in demselben Verhältnisse wachsen müssten, woraus folgt, dass jede dieser drei Grössen eine homogene Function ersten Grades von X, Y, Z sein muss, und dass somit für die erste derselben folgende Gleichung gebildet werden kann:

$$a = eX + fY + gZ,$$

worin die Coëfficienten e, f, g von der Kraft unabhängig sind. Hieraus kann man, gemäss den Gleichungen (3), sofort auch folgende Gleichung bilden:

$$\alpha = N(e_1 X + f_1 Y + g_1 Z),$$

worin e_1, f_1, g_1, die auf die verschiedenen nahe bei einander liegenden Körperchen bezüglichen Mittelwerthe von e, f, g bedeuten.

Nun muss man aber für einen isotropen Stoff annehmen, dass die Körperchen, wenn sie nicht selbst schon eine nach allen Richtungen gleiche Form, also die Kugelform, haben, so verschieden orientirt sind, dass für jedes Körperchen jede Richtung gleich

wahrscheinlich ist. Daraus folgt, dass die auf die x-Richtung bezüglichen Momente, welche eine nach der y-Richtung wirkende Kraft in den verschiedenen Körpern hervorrufen kann, den Mittelwerth Null haben muss, da positive und negative Momente gleich wahrscheinlich sind, und es ist daher zu setzen: $f_1 = 0$. Dasselbe gilt von einer nach der z-Richtung wirkenden Kraft, woraus folgt $g_1 = 0$. Es bleibt also in der vorigen Gleichung in der Klammer nur das erste Glied übrig, und wenn wir noch für das Product Ne_1 das einfachere Zeichen η einführen, so lautet die Gleichung:

$$\alpha = \eta X. \tag{5}$$

In ganz entsprechender Weise ist für einen isotropen Stoff auch zu setzen:

$$\beta = \eta Y; \quad \gamma = \eta Z. \tag{5a}$$

Was nun die Kraft anbetrifft, durch welche die Körperchen electrisch polar gemacht werden, und deren Componenten wir mit X, Y, Z bezeichnet haben, so wird diese zum Theil von solcher Electricität, die nicht zum Dielectricum gehört, und sich irgendwo befinden kann, zum Theil vom Dielectricum selbst ausgeübt.

Die Componenten des ersten Theiles der Kraft lassen sich, wenn V die Potentialfunction der nicht zum Dielectricum gehörenden Electricität bedeutet, einfach durch

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}$$

darstellen.

Um ferner die Componenten des zweiten Theiles der Kraft, also die Componenten der von dem umgebenden Dielectricum selbst auf das Körperchen ausgeübten Kraft auszudrücken, müssen wir unser Augenmerk wieder auf die oben betrachtete Potentialfunction des Dielectricums richten. Da es sich hierbei um denjenigen Werth handelt, welchen die Potentialfunction im Puncte (x, y, z) hat, so wollen wir in der Gleichung (4), welche die Potentialfunction des Dielectricums im Puncte (x', y', z') bestimmt, die accentuirten und unaccentuirten Coordinaten unter einander vertauschen, indem wir dem Raumelemente $d\tau$ die Coordinaten x', y', z' zuschreiben und die Coordinaten des Punctes, für welchen die Potentialfunction bestimmt wird, mit x, y, z bezeichnen. Dem entsprechend müssen wir dann auch für die Potentialfunction das Zeichen U statt U' und für die an der rechten Seite stehenden

Coëfficienten, welche zum Raumelemente $d\tau$ gehören, die Zeichen α', β', γ' statt α, β, γ anwenden. Die Gleichung lautet dann:

$$(6) \qquad U = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \alpha' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \beta' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \gamma' \right) d\tau.$$

Ueber die Art, wie aus dieser Potentialfunction die betreffenden Kraftcomponenten abzuleiten sind, ist aber noch eine besondere Bemerkung zu machen. Man darf dieselben nicht einfach durch

$$-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z}$$

darstellen. Wenn nämlich von der Kraft die Rede ist, welche ein leitendes Körperchen erleidet, und durch welche eine ungleiche Vertheilung seiner Electricität verursacht wird, so ist darin die von der Electricität des Körperchens selbst ausgeübte Kraft nicht mit einbegriffen. Man muss daher auch von der Potentialfunction des Dielectricums den Theil, welcher von der Electricität des betrachteten Körperchens herrührt, in Abzug bringen. Da der obige Ausdruck von U ein Integral nach dem Raume ist, so können wir folgende Betrachtung anstellen. Der Raum, welchen das Dielectricum einnimmt, wird von den leitenden Körperchen, unserer Voraussetzung nach, nur theilweise ausgefüllt, und der übrige Theil besteht aus nichtleitenden Zwischenräumen. Aber man kann sich den ganzen Raum in kleine Räume zerlegt denken, deren jeder ein leitendes Körperchen enthält und als derjenige Theil des ganzen Raumes gelten kann, welcher diesem Körperchen entspricht. Stellt man sich nun vor, das Körperchen, für welches die Kraft bestimmt werden soll, sei fortgenommen, so bildet der ihm entsprechende kleine Raum einen Hohlraum in dem Dielectricum und die in diesem Hohlraume herrschende Kraft ist die zu bestimmende Kraft. Um die Componenten dieser Kraft auszudrücken müssen wir für die Potentialfunction, statt des in (6) gegebenen Integrals, ein Integral anwenden, welches den kleinen Hohlraum nicht mit umfasst.

Was die Gestalt des Hohlraumes anbetrifft, so kann man sich denken, dass in den den verschiedenen leitenden Körperchen entsprechenden Räumen zufällige Verschiedenheiten, sei es in Bezug auf die Gestalt selbst, sei es in Bezug auf die Orientirung ihrer Hauptdimensionen vorkommen. Verschiedenheiten dieser Art wür-

den für unseren Hohlraum auch Unterschiede der Kraft zur Folge haben. Von solchen zufälligen Unterschieden müssen wir aber bei unserer Bestimmung, welche sich auf die durchschnittlich wirkende Kraft bezieht, absehen, was am einfachsten dadurch geschehen kann, dass wir den Hohlraum als kugelförmig annehmen.

Wir denken uns also in dem Dielectricum einen kleinen kugelförmigen Raum abgegrenzt, und bilden die Potentialfunction des ausserhalb dieses Raumes befindlichen Dielectricums für irgend einen innerhalb des Raumes liegenden Punct (x, y, z). Indem wir, wie bisher, die Potentialfunction des ganzen Dielectricums U nennen, wollen wir die Potentialfunction des ausserhalb der kleinen Kugel befindlichen Dielectricums mit U_1 bezeichnen. Dann werden die Componenten der in Rede stehenden Kraft dargestellt durch:

$$-\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad -\frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad -\frac{\partial U_1}{\partial z}.$$

Um nun die Beziehung zwischen U_1 und U angeben zu können, wollen wir noch für die Potentialfunction des in der kleinen Kugel befindlichen Dielectricums, zu deren Bestimmung wir das in (6) angedeutete Integral über den kleinen kugelförmigen Raum auszuführen haben, das Zeichen U_0 anwenden. Dann können wir setzen:

$$U_1 = U - U_0, \tag{7}$$

und es kommt nun nur noch darauf an, die zur Bestimmung von U_0 nöthige Rechnung wirklich auszuführen.

Wenn das in (6) angedeutete Integral sich nur auf den als sehr klein vorausgesetzten kugelförmigen Raum erstrecken soll, so können wir dabei die Grössen α', β', γ' als constant betrachten und ihnen die bei dem ebenfalls innerhalb der Kugel gelegenen Punct (x, y, z) stattfindenden Werthe zuschreiben, welche wir mit α, β, γ bezeichnen. In Folge dessen können wir diese Grössen aus dem Integralzeichen herausnehmen und die Gleichung so schreiben:

$$U_0 = \alpha \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau + \beta \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} d\tau + \gamma \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} d\tau. \tag{8}$$

Nun ist aber, gemäss der Gleichung

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

zu setzen:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

und wenn dieser Werth in das erste Integral eingeführt ist, so kann man die Differentiation nach x (welche Grösse von der Lage des Elementes $d\tau$ unabhängig ist), auch ausserhalb des Integralzeichens andeuten, und somit setzen:

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau = -\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r}.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Coordinatenrichtungen, und dadurch geht die Gleichung (8) über in:

$$(9) \qquad U_0 = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r} - \beta \frac{\partial}{dy} \int \frac{d\tau}{r} - \gamma \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d\tau}{r}.$$

Das hierin noch vorkommende Integral lässt sich leicht ausführen und kann sogar als bekannt vorausgesetzt werden, indem es nichts weiter ist, als die Potentialfunction einer homogenen Kugel mit der Dichtigkeit 1 für einen innerhalb der Kugel gelegenen Punct. Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunctes der Kugel mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und ihren Radius mit $\mathfrak{r}$, so erhalten wir [1]):

$$\int \frac{d\tau}{r} = 2\pi \left\{\mathfrak{r}^2 - \tfrac{1}{3}\left[(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2 + (z-\mathfrak{z})^2\right]\right\}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d\tau}{r} = -\frac{4\pi}{3}(x-\mathfrak{x}); \quad \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d\tau}{r} = -\frac{4\pi}{3}(y-\mathfrak{y});$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d\tau}{r} = -\frac{4\pi}{r}(z-\mathfrak{z}),$$

und die Gleichung (9) geht daher über in:

$$(10) \qquad U_0 = \frac{4\pi}{3}\left[\alpha(x-\mathfrak{x}) + \beta(y-\mathfrak{y}) + \gamma(z-\mathfrak{z})\right],$$

und durch Einsetzung dieses Werthes in (7) erhält man:

$$(11) \qquad U_1 = U - \frac{4\pi}{3}\left[\alpha(x-\mathfrak{x}) + \beta(y-\mathfrak{y}) + \gamma(z-\mathfrak{z})\right].$$

Da in diesem Ausdrucke der Radius $\mathfrak{r}$ nicht vorkommt, so folgt

---

1) Siehe mein Buch über die Potentialfunction §. 12, Gleichung (34), worin A durch $\mathfrak{r}$ ersetzt und $a = 0$ gesetzt werden muss.

daraus, dass es zur Bestimmung von U_1 nicht nöthig ist, die Grösse des Raumes, welcher einem einzelnen leitenden Körperchen entspricht, zu kennen.

Durch Differentiation der vorigen Gleichung erhalten wir:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{4\pi}{3}\alpha \\[2ex] \dfrac{\partial U_1}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{4\pi}{3}\beta \\[2ex] \dfrac{\partial U_1}{\partial z} = \dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{4\pi}{3}\gamma. \end{cases}$$

Kehren wir nun zu den Gleichungen zurück, welche die Componenten der ganzen auf das leitende Körperchen wirkenden Kraft bestimmen, nämlich:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x};\quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial y};\quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U_1}{\partial z},$$

und setzen wir hierin für den letzten Differentialcoëfficienten jedes Ausdruckes den in (12) gegebenen Werth, so kommt:

$$(13)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial(V+U)}{\partial x} + \dfrac{4\pi}{3}\alpha \\[2ex] Y = -\dfrac{\partial(V+U)}{\partial y} + \dfrac{4\pi}{3}\beta \\[2ex] Z = -\dfrac{\partial(V+U)}{\partial z} + \dfrac{4\pi}{3}\gamma. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke der Kraftcomponenten haben wir auf die Gleichungen (5) und (5a) anzuwenden. Die Gleichung (5) geht dadurch über in:

$$\alpha = \eta\left(-\frac{\partial(V+U)}{\partial x} + \frac{4\pi}{3}\alpha\right),$$

woraus folgt:

$$(14)\qquad \alpha = -\frac{\eta}{1-\dfrac{4\pi}{3}\eta}\,\frac{\partial(V+U)}{\partial x}.$$

Hierin wollen wir noch ein vereinfachendes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(15)\qquad E = \frac{\eta}{1-\dfrac{4\pi}{3}\eta}.$$

Bilden wir dann zugleich auch die entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Coordinatenrichtungen, so erhalten wir:

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha = -E\dfrac{\partial(V+U)}{\partial x} \\ \beta = -E\dfrac{\partial(V+U)}{\partial y} \\ \gamma = -E\dfrac{\partial(V+U)}{\partial z}. \end{cases}$$

Nachdem wir so die Grössen α, β, γ bestimmt haben, können wir ihre Werthe in die Gleichung (4) einsetzen und erhalten dadurch:

$$(17)\quad U' = -\int E\left(\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau.$$

Wenden wir hierin zur Abkürzung das in Abschnitt I., §. 11 eingeführte Summenzeichen an, so können wir schreiben:

$$(17\text{a})\quad U' = -\int d\tau E\sum\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}.$$

Dieses ist die zur Bestimmung der Potentialfunction U des Dielectricums dienende Gleichung, wie sie aus den Poisson'schen und den damit übereinstimmenden Green'schen Untersuchungen über Magnetismus hervorgeht.

Was die hierin vorkommende Grösse E anbetrifft, so kann ihr Werth, je nach der Natur des Dielectricums, zwischen 0 und ∞ variiren. Der Werth 0 gilt für Stoffe, die durch und durch nichtleitend sind, und daher durch Influenz keine electrische Polarität annehmen können, und der Werth ∞ für solche, die durch und durch leitend sind. Bei solchen Stoffen, die, wie wir für ein Dielectricum angenommen haben, zum Theil aus leitenden Körperchen, zum Theil aus nichtleitenden Zwischenräumen bestehen, lässt sich, wenigstens für den Fall, wo die Körperchen als kugelförmig vorausgesetzt werden, eine bestimmte Beziehung zwischen den mit η und E bezeichneten Grössen und dem von den leitenden Körperchen erfüllten Raume ableiten. Wird nämlich dieser Raum als

Bruchtheil des ganzen von dem Dielectricum eingenommenen Raumes mit g bezeichnet, so gilt für η die Gleichung:

$$\eta = \frac{3}{4\pi} g, \tag{18}$$

und daraus ergiebt sich nach (15) für E die Gleichung:

$$E = \frac{3g}{4\pi(1-g)}. \tag{19}$$

§. 5. Veränderte Formen der gewonnenen Gleichung.

Man kann die im vorigen Paragraphen gewonnene Gleichung (17) in verschiedenen Weisen umformen.

Betrachtet man von den in der Klammer stehenden Gliedern zunächst nur das erste, so kann man setzen:

$$E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{r}\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right). \tag{20}$$

Dieser Ausdruck muss mit $d\tau$ multiplicirt und über den ganzen vom Dielectricum eingenommenen Raum integrirt werden. Ersetzt man dabei $d\tau$ durch $dx\,dy\,dz$, so lässt sich beim ersten an der rechten Seite stehenden Gliede die Integration nach x ausführen, nämlich:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{r}\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz = \iint\left[\left(\frac{E}{r}\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{E}{r}\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right)_1\right] dy\,dz, \tag{21}$$

worin die Indices 1 und 2 andeuten sollen, dass von dem in der Klammer stehenden Ausdrucke die Werthe zu nehmen sind, welche an den Stellen stattfinden, wo eine der x-Axe parallele Gerade, deren andere Coordinaten y und z sind, die Oberfläche des Dielectricums schneidet. Sollte diese Gerade die Oberfläche mehr als zweimal schneiden, was dann jedenfalls eine gerade Anzahl von Malen stattfinden müsste, so wären an der rechten Seite dem entsprechend mehr Glieder zu setzen.

Es möge nun an der durch den Index 1 angedeuteten Stelle das Flächenelement, welches ein längs jener Geraden gedachtes

unendlich schmales Prisma mit dem Querschnitte $dy\,dz$ aus der Oberfläche des Dielectricums ausschneidet, mit $d\omega_1$ bezeichnet werden, dann hat man:

$$dy\,dz = \cos\lambda\, d\omega_1,$$

worin λ den Winkel der auf $d\omega_1$ nach Innen zu errichteten Normale mit der x-Axe bedeutet. Nun kann man aber, wenn man die Normale mit n_1 bezeichnet, schreiben:

$$\cos\lambda = \frac{\partial x}{\partial n_1},$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$dy\,dz = \frac{\partial x}{\partial n_1}\, d\omega_1.$$

Für die durch den Index 2 angedeutete Stelle, an welcher die positive x-Richtung von der Fläche aus nicht nach Innen, sondern nach Aussen geht, lautet die entsprechende Gleichung:

$$dy\,dz = -\frac{\partial x}{\partial n_2}\, d\omega_2.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe geht die Gleichung (21) über in:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{r}\,\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz = -\int \frac{E}{r}\,\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\, d\omega,$$

worin an der rechten Seite die Integration über die ganze Oberfläche des Dielectricums auszuführen ist.

Kehren wir nun zur Gleichung (20) zurück, welche mit $d\tau$ zu multipliciren und dann zu integriren ist, so erhalten wir daraus durch Einsetzung des vorstehenden Werthes die folgende Gleichung:

$$\int E\,\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\, d\tau = -\int \frac{E}{r}\,\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,\partial\omega$$
$$-\int \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(E\,\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right) d\tau.$$

Eben solche Gleichungen gelten für die y- und z-Richtung. Wenn man von diesen drei Gleichungen die Summe bildet, und in der dadurch entstehenden Gleichung die Vorzeichen umkehrt, so ist die linke Seite gemäss (17) gleich U'. An der rechten Seite können wir unter dem ersten Integralzeichen setzen:

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial(V+U)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial(V+U)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial(V+U)}{\partial n},$$

und unter dem zweiten Integralzeichen können wir die betreffende Summe durch Anwendung des Summenzeichens andeuten, und erhalten dadurch:

$$(22)\quad U'=\int\frac{E}{r}\frac{\partial(V+U)}{\partial n}d\omega+\int\frac{1}{r}\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right)d\tau.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass man die Potentialfunction des Dielectricums betrachten kann als die Potentialfunction einer Electricitätsmenge, die sich theils auf der Oberfläche des Dielectricums befindet, theils durch den von dem Dielectricum erfüllten Raum stetig verbreitet ist, und welche dort die Oberflächendichtigkeit

$$E\frac{\partial(V+U)}{\partial n},$$

hier die Raumdichtigkeit

$$\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right)$$

hat.

Da sich nun andererseits für die in jener Weise angeordnete Electricität, von welcher U als die Potentialfunction zu betrachten ist, die Oberflächendichtigkeit durch

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{+0}-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{-0}\right]$$

und die Raumdichtigkeit durch

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta U$$

darstellen lässt, so erhält man die Gleichungen:

$$(23)\qquad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{+0}-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{-0}=-4\pi E\frac{\partial(V+U)}{\partial n}$$

$$(24)\qquad \Delta U=-4\pi\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\right).$$

Wenn das Dielectricum homogen und somit E constant ist, so vereinfacht sich die letzte Gleichung in:

$$(25)\quad \Delta U=-4\pi E\sum\frac{\partial^2(V+U)}{\partial x^2}=-4\pi E\Delta(V+U),$$

welcher Gleichung man auch folgende Form geben kann:

$$(25\text{a}).\qquad \Delta U = -\frac{4\pi E}{1+4\pi E}\Delta V.$$

Wenn ferner noch vorausgesetzt wird, dass die nicht zum Dielectricum gehörende Electricität, von welcher V die Potentialfunction ist, sich ganz ausserhalb des Dielectricums befinde, so ist im Dielectricum überall $\Delta V = 0$ und somit auch $\Delta U = 0$. Unter diesen Voraussetzungen nimmt die Gleichung (22) folgende einfache Form an:

$$(26)\qquad U' = E\int \frac{1}{r}\frac{\partial(V+U)}{\partial n}\,d\omega.$$

Eine andere Umformung der Gleichung (17) kann dadurch bewirkt werden, dass man setzt:

$$E\frac{\partial(V+U)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right] - (V+U)\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right).$$

Wenn man mit dieser Gleichung ebenso verfährt, wie oben mit der Gleichung (20), so erhält man:

$$U' = \int E(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\omega + \int (V+U)\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\tau,$$

oder anders geschrieben:

$$(27)\quad U' = \int E(V+U)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\omega + \int E(V+U)\,\Delta\frac{1}{r}\,d\tau$$
$$+\int (V+U)\sum\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial x}\,d\tau.$$

Hierin lässt sich das Integral

$$\int E(V+U)\,\Delta\frac{1}{r}\,d\tau$$

sofort näher bestimmen. Wenn der Punct (x', y', z'), von welchem aus der Abstand r gemessen wird, und für welchen der Werth von U mit U' bezeichnet ist, sich ausserhalb des Dielectricums befindet, so ist $\Delta\frac{1}{r} = 0$, und dadurch wird auch das Integral Null. Wenn dagegen jener Punct sich innerhalb des Dielectricums befindet, so ist

$$\int E(V+U)\,\Delta\frac{1}{r}\,d\tau = -4\pi E'(V'+U')$$

worin $E'(V'+U')$ den Werth von $E(V+U)$ am Puncte (x', y', z') bedeuten soll [1]). Demnach lautet die Gleichung (27) für einen ausserhalb des Dielectricums liegenden Punct:

$$(28) \qquad U' = \int E(V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega + \int (V+U) \sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} d\tau,$$

und für einen innerhalb des Dielectricums liegenden Punct:

$$(28a) \qquad U' = -4\pi E'(V'+U') + \int E(V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega + \int (V+U) \sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} d\tau.$$

Wenn das Dielectricum homogen und somit E constant ist, so erhält man für einen ausserhalb desselben liegenden Punct:

$$(29) \qquad U' = E \int (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega$$

und für einen innerhalb desselben liegenden Punct:

$$(29a) \qquad U' = -4\pi E(V'+U') + E \int (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega.$$

§. 6. Anwendung der gewonnenen Gleichungen auf Franklin'sche Tafeln und Leidener Flaschen.

Die Gleichung (29) habe ich in meinem 1867 veröffentlichten Artikel [2]) angewandt, um die Beziehung zwischen den auf den Belegungen einer Franklin'schen Tafel oder Leidener Flasche befindlichen Electricitätsmengen und der dadurch entstehenden

---

[1]) Siehe mein Buch: „Die Potentialfunction und das Potential" §. 41, Gleichung (149).

[2]) Meine Abhandlungensammlung Bd. II, Zusatz zu Abhandlung X.

Potentialniveaudifferenz zu bestimmen, und ich will diese Rechnungen hier ebenfalls mittheilen.

Der Einfachheit wegen möge zunächst eine Franklin'sche Tafel mit kreisförmigen Belegungen angenommen werden. Die planparallele Glasplatte, welche die beiden Belegungen von einander trennt, ist der zu betrachtende Körper; wir brauchen aber nicht die ganze Glasplatte zu betrachten, sondern können die Betrachtung auf das kreisförmige Stück derselben, welches gerade zwischen den Belegungen liegt, beschränken, indem der über die Belegungen hinausragende Theil, welcher den freien Rand bildet, durch die Ladung der Belegungen jedenfalls nur eine sehr geringe Aenderung seines inneren Zustandes erleiden, und daher auch nur sehr wenig dazu beitragen kann, den Werth der Potentialfunction U zu ändern. Der Körper, über dessen Oberfläche die Integration ausgeführt werden muss, ist also ein sehr flacher Cylinder mit kreisförmigen Grundflächen.

Den Punct p', für welchen der mit U' bezeichnete Werth von U zunächst bestimmt werden soll, wollen wir folgendermaassen wählen. Auf der einen Kreisfläche, auf welcher die Belegung A sich befindet, denken wir uns im Mittelpuncte eine nach Aussen gehende Normale errichtet. In dieser Normale soll p' liegen, und zwar so nahe an der Kreisfläche, dass der Abstand von derselben gegen die Dimensionen der Platte als verschwindend klein anzusehen ist. Wir wollen den so bestimmten Punct p' kurz die Mitte der Belegung A nennen.

Um nun die in der Gleichung (29) vorgeschriebene, auf die Oberfläche des flachen Glascylinders bezügliche Integration auszuführen, können wir die Oberfläche in drei Theile theilen, 1) die Kreisfläche, welche mit der Belegung A bedeckt ist, 2) die gegenüberliegende Kreisfläche, welche mit der Belegung B bedeckt ist, 3) die Cylinderfläche, welche die Umfänge der beiden Kreisflächen verbindet.

Für die beiden Kreisflächen ist die Integration sehr leicht ausführbar, weil auf jeder der Belegungen die durch die Summe $V + U$ dargestellte gesammte Potentialfunction einen constanten Werth haben muss.

Um für die erste, mit der Belegung A bedeckte Kreisfläche die Rechnung anzustellen, wollen wir uns vorläufig den Punct p' nicht in unmittelbarer Nähe der Fläche denken, sondern wollen annehmen, er liege in der im Mittelpuncte nach Aussen hin errich-

teten Normale um eine beliebige Strecke l von der Fläche entfernt. Nun denken wir uns an irgend einem anderen Puncte der Kreisfläche, welcher um die Strecke ϱ vom Mittelpuncte entfernt ist, auf der Fläche eine in das Glas hineingehende Normale von der Länge n errichtet. Wenn dann r die Entfernung des Endpunctes dieser Normale vom Puncte p' bedeutet, so hat man:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + (l+n)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{l+n.}{[\varrho^2 + (l+n)^2]^{3/2}}.$$

Setzt man hierin, wie es sein muss, wenn der Differentialcoëfficient sich auf die Oberfläche des Glases beziehen soll, $n = 0$, so kommt:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{l}{(\varrho^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Bezeichnen wir nun noch den constanten Werth, welchen die Summe $V + U$ auf dieser Kreisfläche hat, mit K, und nennen den Radius des Kreises a, so ist der auf diese Kreisfläche bezügliche Theil des Integrales, welcher von dem ganzen Integrale dadurch unterschieden werden soll, dass das unter dem Integralzeichen stehende Flächenelement $d\omega$ mit dem Index 1 versehen wird:

$$\int (V+U)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\omega_1 = -2\pi K\int_0^a \frac{l\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$= -2\pi K\left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right).$$

Nehmen wir nun endlich dem Obigen entsprechend an, der Punct p', welchen wir uns vorläufig in einer beliebigen Entfernung l von der Fläche gelegen dachten, liege so nahe an der Fläche, dass l gegen die Dimensionen der Platte als verschwindend klein anzusehen sei, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(30) \qquad \int (V+U)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\omega_1 = -2\pi K.$$

Wir wollen nun in entsprechender Weise den Theil des Integrales, welcher sich auf die gegenüberliegende mit der Belegung B bedeckte Kreisfläche bezieht, bilden, wobei wir den Punct p' von vornherein als dicht an der ersten Kreisfläche liegend annehmen wollen. Denken wir uns in einem Puncte der zweiten Kreisfläche, welcher von ihrem Mittelpuncte um die Strecke ϱ entfernt ist, auf der Fläche eine Normale von der Länge n in das Glas hinein errichtet, so erhalten wir, wenn r die Entfernung des Endpunctes der Normale vom Puncte p' bedeutet, und der Abstand der beiden Kreisflächen von einander mit c bezeichnet wird, die Gleichung:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + (c - n)^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{c - n}{[\varrho^2 + (c - n)^2]^{3/2}},$$

oder, wenn wir in diesem Ausdrucke, um ihn auf die Kreisfläche selbst zu beziehen, $n = 0$ setzen:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{c}{(\varrho^2 + c^2)^{3/2}}.$$

Der constante Werth, welchen die Summe $V + U$ auf dieser Kreisfläche hat, sei mit K_1 bezeichnet, dann erhält man für den zweiten Theil des Integrales, welcher dadurch von dem ganzen Integrale unterschieden werden soll, dass $d\omega$ mit dem Index 2 versehen wird, den Ausdruck:

$$\int (V + U) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega_2 = 2\pi K_1 \int_0^a \frac{c\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + c^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi K_1 \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right).$$

Denkt man sich diesen Ausdruck nach Potenzen von $\frac{c}{a}$ entwickelt und vernachlässigt die Glieder von höherer als erster Ordnung, so kommt:

$$(31) \qquad \int (V + U) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega_2 = 2\pi K_1 \left(1 - \frac{c}{a}\right).$$

Nun muss endlich noch die Cylinderfläche, welche die Kreisumfänge verbindet, betrachtet werden. An irgend einer Stelle dieser Cylinderfläche, welche vom Umfange des ersten Kreises um die Strecke z entfernt ist, denke man sich eine nach innen gehende Normale von der Länge n errichtet, dann ist die Entfernung r des Endpunctes dieser Normale von unserem Puncte p' bestimmt durch die Gleichung:

$$r = \sqrt{(a - n)^2 + z^2},$$

und daraus folgt:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{a - n}{[(a - n)^2 + z^2]^{3/2}}$$

oder, wenn wir hierin wieder $n = 0$ setzen:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Der Werth der Summe $V + U$ ist auf der Cylinderfläche nicht überall gleich, sondern ändert sich in der vom einen Kreisumfange zum anderen gehenden Richtung. Wenn der Abstand c der beiden Kreise gegen ihren Radius a klein ist, so kann man mit grosser Annäherung annehmen, dass der Werth der Summe $V + U$ sich, wenn man in einer die beiden Kreisumfänge verbindenden Seite des Cylinders fortschreitet, gleichmässig ändert, und man kann daher für einen Punct, welcher von dem ersten Kreisumfange um die Strecke z entfernt ist, setzen:

$$V + U = K + \frac{K_1 - K}{c}\, z.$$

Demnach erhält man für den auf die Cylinderfläche bezüglichen Theil des Integrales, in welchem $d\omega$ mit dem Index 3 versehen werden soll:

$$\int (V + U) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega_3 = 2\pi a \int_0^c \left(K + \frac{K_1 - K}{c} z\right) \frac{a\, dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \left[K \frac{c}{a} + (K_1 - K) \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{c}\right].$$

Denkt man sich diesen Ausdruck wieder nach Potenzen von $\frac{c}{a}$ ent-

wickelt, und vernachlässigt die Glieder von höherer als erster Ordnung, so kommt:

$$(32)\qquad \int (V+U)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\omega_3 = \pi(K+K_1)\,\frac{c}{a}.$$

Vereinigen wir nun die drei unter (30), (31) und (32) gegebenen Theile des Integrales, so erhalten wir:

$$\int (V+U)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\omega = -2\pi K + 2\pi K_1\left(1-\frac{c}{a}\right) + \pi(K+K_1)\frac{c}{a},$$

oder anders geordnet:

$$(33)\qquad \int (V+U)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\omega = 2\pi(K_1-K)\left(1-\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{a}\right).$$

Diesen Werth des Integrales haben wir auf die Gleichung (29) anzuwenden, wodurch entsteht:

$$(34)\qquad U' = 2\pi E\,(K_1-K)\left(1-\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{a}\right).$$

Hierin wollen wir noch die Bezeichnung ein Wenig ändern. Da wir von jetzt an die Potentialfunctionen V und U nur in den Mitten der beiden Belegungen zu betrachten haben, so wollen wir die Werthe, welche die Potentialfunctionen in der Mitte der Belegung A haben, einfach mit V und U, und die Werthe, welche sie in der Mitte der Belegung B haben, mit V_1 und U_1 bezeichnen. Dann ist zu setzen:

$$K = V + U$$
$$K_1 = V_1 + U_1,$$

und zugleich ist, da der Punct p' sich in der Mitte der Belegung A befinden soll, zu setzen:

$$U' = U.$$

Dadurch geht die Gleichung (34) über in:

$$(35)\qquad U = 2\pi E\,(V_1+U_1-V-U)\left(1-\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{a}\right).$$

Um die entsprechende Gleichung für den Fall, wo der Punct p' sich in der Mitte der Belegung B befindet, zu bilden, braucht man in der vorigen Gleichung nur die Buchstaben mit und ohne Index zu vertauschen, also:

$$(36)\qquad U_1 = 2\pi E(V + U - V_1 - U_1)\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{c}{a}\right).$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so kommt:

$$U - U_1 = -4\pi E(V + U - V_1 - U_1)\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{c}{a}\right),$$

und hieraus ergiebt sich die gesuchte zur Bestimmung der Potentialniveaudifferenz $U - U_1$ dienende Gleichung, welche, unter Vernachlässigung der höheren Glieder, in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(37)\quad U - U_1 = -\frac{4\pi E}{1 + 4\pi E}\left(1 - \frac{1}{2(1 + 4\pi E)}\cdot\frac{c}{a}\right)(V - V_1).$$

Von dieser Gleichung wollen wir im Folgenden Gebrauch machen.

Zu dem Zwecke ist noch eine Bemerkung nöthig. Die in dieser Gleichung vorkommende Differenz $V - V_1$ hat bei einer geladenen Franklin'schen Tafel nicht ganz genau denselben Werth, welchen man in dem Falle erhalten würde, wenn die beiden Belegungen mit eben so grossen Electricitätsmengen geladen wären, aber das Glas keinen polaren Zustand angenommen hätte. Durch diesen Zustand des Glases wird nämlich bewirkt, dass die Electricität auf den Belegungen eine etwas andere Anordnung annimmt, als die, welche sie ohne denselben annehmen würde. Der Unterschied in der Anordnung der Electricität kann aber nur ein sehr geringer sein.

Die Electricität auf den Belegungen würde sich nämlich schon in dem Falle, wenn das Glas nur einfach als Isolator wirkte, so nahe gleichmässig über die ganzen Flächen verbreiten, dass, mit Ausnahme der Stellen in unmittelbarer Nähe des Randes, die an irgend einer Stelle stattfindende Dichtigkeit von der mittleren Dichtigkeit nur um eine Grösse abweichen würde, die im Verhältniss zur ganzen Dichtigkeit von der Ordnung $\frac{c}{a}$ wäre. Da nun der im Glase eintretende polare Zustand nur bewirken kann, dass die Electricität auf den Belegungen sich noch gleichmässiger verbreitet, als es ohne diesen Zustand geschehen würde, so können die dadurch eintretenden Aenderungen in der Dichtigkeit jedenfalls auch nur Grössen von der Ordnung $\frac{c}{a}$ sein. Die durch diese kleinen Aenderungen der Electricitätsvertheilung bewirkte Aenderung der Potentialniveaudifferenz $V - V_1$ kann natürlich auch

nur eine Grösse sein, welche im Verhältniss zu ihrem ganzen Werthe von derselben Ordnung, also von der Ordnung $\frac{c}{a}$ ist.

In den vorstehenden Rechnungen haben wir bei den Reihenentwickelungen nach $\frac{c}{a}$ die Glieder erster Ordnung noch berücksichtigt, dagegen die Glieder von höheren Ordnungen vernachlässigt. Wenn wir uns aber mit einem geringeren Grade von Genauigkeit begnügen, und auch die Glieder erster Ordnung vernachlässigen wollen, so können wir den in der so vereinfachten Gleichung vorkommenden Werth von $V - V_1$ ohne Weiteres als gleichbedeutend betrachten mit demjenigen Werthe, welchen man bei denselben Electricitätsmengen ohne den polaren Zustand des Glases erhalten würde.

Von der so vereinfachten Gleichung lässt sich ferner sagen, dass sie nicht bloss für Franklin'sche Tafeln mit kreisförmigen Belegungen, sondern auch für Franklin'sche Tafeln mit anders gestalteten Belegungen und auch für Leidener Flaschen gilt. Es zeigt sich nämlich in den vorstehenden Rechnungen, dass die auf den Umfang bezüglichen Glieder, welche allein von der angenommenen Kreisgestalt abhängen, von der Ordnung $\frac{c}{a}$ sind, und allgemein kann man sagen, dass die von der Gestalt der Belegungen abhängigen Glieder von der Ordnung $\frac{c}{\sqrt{s}}$ sind, wenn s der Flächeninhalt der Belegungen ist. Was ferner die von der Krümmung der Flächen abhängigen Glieder anbetrifft, so können diese, wenn die Krümmungen nicht so stark sind, dass die Krümmungsradien gegen $\sqrt{s}$ klein sind, auch nur von der Ordnung $\frac{c}{\sqrt{s}}$ sein. Es ergiebt sich hieraus, dass man durch Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{c}{\sqrt{s}}$ eine Gleichung erhält, welche von der Gestalt und Krümmung der Belegungen unabhängig ist.

In der so vereinfachten Form lautet die Gleichung (37):

$$U - U_1 = -\frac{4\pi E}{1 + 4\pi E}(V - V_1). \tag{38}$$

An diese Gleichung können wir sofort auch diejenige anschliessen, welche die ganze wirklich stattfindende Potentialniveau-

differenz der beiden Belegungen ausdrückt. Die gesammte Potentialfunction aller getrennten Electricitätsmengen (sowohl der auf den Belegungen, als auch der auf den polaren Glastheilchen befindlichen) ist innerhalb der einen Belegung $V + U$ und innerhalb der anderen Belegung $V_1 + U_1$ und die zwischen den Belegungen im Ganzen stattfindende Potentialniveaudifferenz ist somit $V + U - V_1 - U_1$. Diese Grösse erhalten wir, wenn wir an beiden Seiten der vorigen Gleichung $V - V_1$ hinzuaddiren. Dadurch kommt:

$$(39) \qquad V + U - V_1 - U_1 = \frac{1}{1 + 4\pi E}(V - V_1).$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Potentialniveaudifferenz, welche bei der Ladung einer Franklin'schen Tafel oder Leidener Flasche mit gewissen Electricitätsmengen wirklich eintritt, im Verhältnisse von $\frac{1}{1 + 4\pi E} : 1$ kleiner ist, als diejenige Potentialniveaudifferenz, welche bei Anwendung derselben Electricitätsmengen eintreten würde, wenn das Glas keinen polaren Zustand annähme, sondern einfach als Isolator wirkte.

Die beiden vorigen Gleichungen kann man noch in der Weise abändern, dass man an der rechten Seite statt der Grösse $V - V_1$ eine der betreffenden Electricitätsmengen einführt. Die auf den beiden Belegungen befindlichen Electricitätsmengen können bei dem jetzt von uns als genügend betrachteten Grade von Genauigkeit als den absoluten Werthen nach unter einander gleich angesehen und daher durch Q und $-Q$ bezeichnet werden. Zur Bestimmung der Grösse Q dient folgende Gleichung, welche der ersten der unter (38) im vorigen Abschnitt stehenden Gleichungen entspricht, wenn man darin δ gegen 1 vernachlässigt und das Glied, welches nicht c im Nenner hat, fortlässt:

$$(40) \qquad Q = \frac{s}{4\pi c}(V - V_1).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lassen sich die beiden vorigen umformen in:

$$(41) \qquad U - U_1 = -\frac{4\pi c}{s} \cdot \frac{4\pi E}{1 + 4\pi E} Q$$

$$(42) \qquad V + U - V_1 - U_1 = \frac{4\pi c}{s} \cdot \frac{1}{1 + 4\pi E} Q.$$

§. 7. Vollständige Gleichungen für die beiden Belegungen einer Leidener Flasche.

Nachdem im vorigen Paragraphen die Beziehung zwischen der Potentialniveaudifferenz $V + U - V_1 - U_1$ und den auf den Belegungen befindlichen Electricitätsmengen so weit bestimmt ist, dass die zwischen den absoluten Werthen dieser beiden Electricitätsmengen bestehende kleine Differenz vernachlässigt ist, können wir auch die vollständigen Ausdrücke der Electricitätsmengen bilden, worin dann freilich einige Constante unbestimmt bleiben, ganz den Ausdrücken entsprechend, welche am Schlusse des vorigen Abschnittes für den Fall aufgestellt wurden, wo die die Belegungen trennende Zwischenschicht nur als einfacher Isolator angenommen ist.

Bezeichnen wir wieder, wie es dort geschah, die Werthe der gesammten Potentialfunction auf der inneren und äusseren Belegung mit F und G, indem wir setzen:

(43) $$V + U = F \text{ und } V_1 + U_1 = G,$$

und bezeichnen wir ferner die auf den beiden Belegungen befindlichen Electricitätsmengen mit M und N, so müssen zwischen den Grössen F, G, M und N jedenfalls die im vorigen Abschnitte unter (30) angeführten Gleichungen

(44) $$\begin{cases} M = a\,(F - G) + \alpha F \\ N = a\,(G - F) + \beta\, G \end{cases}$$

bestehen. Diese Gleichungen gelten nämlich für jede zwei leitende Körper, in deren Nähe sich noch beliebige andere leitende Körper befinden dürfen, welche entweder mit der Erde in leitender Verbindung stehen, oder, falls sie isolirt sind, keine Electricität mitgetheilt erhalten. Die letztere Bedingung, keine Electricität mitgetheilt zu erhalten, ist nun für die im Inneren des Glases befindlichen leitenden Körpertheilchen erfüllt, und das Vorhandensein dieser Körpertheilchen kann daher die Gültigkeit der Gleichungen nicht aufheben.

Was nun die in den Gleichungen vorkommenden Constanten anbetrifft, so wurde die Grösse a für eine Leidener Flasche, zwischen deren Belegungen sich nur ein einfacher Isolator befindet, im vorigen Abschnitte durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$a = \frac{s}{4\pi c}(1 + \delta),$$

worin δ eine Grösse ist, deren Werth nicht für alle Flaschen gleich, aber jedenfalls immer gegen die Einheit klein ist. Diesen Ausdruck müssen wir nun für den Fall, wo sich zwischen den Belegungen ein Dielectricum befindet, etwas abändern, und zwar müssen wir, wie sich ohne Weiteres aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Gleichung (42) ersehen lässt, die Grösse $\frac{s}{4\pi c}$ durch $\frac{s}{4\pi c}(1 + 4\pi E)$ ersetzen, während man δ einfach als eine unbestimmte, aber gegen die Einheit kleine Grösse beibehalten kann. Der Ausdruck von a nimmt also die nachstehende Form an:

$$a = \frac{s}{4\pi c}(1 + 4\pi E)(1 + \delta). \tag{45}$$

Demnach erhalten wir für eine Leidener Flasche statt der im vorigen Abschnitte unter (38) gegebenen Gleichungen die folgenden:

$$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{s}{4\pi c}(1 + 4\pi E)(1 + \delta)(F - G) + \alpha F \\ N &= \frac{s}{4\pi c}(1 + 4\pi E)(1 + \delta)(G - F) + \beta G. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Ueber die Bedeutung der Constanten α und β gilt hier dasselbe, was in §. 7 des vorigen Abschnittes gesagt ist. Sie stellen nämlich die Electricitätsmengen dar, welche man den beiden Belegungen der Flasche mittheilen müsste, wenn man sie beide bis zu dem gemeinsamen Potentialniveau 1 laden wollte.

Um die vorstehenden Gleichungen für die Anwendung bequemer zu machen, wollen wir wieder, wie in §. 8 des vorigen Abschnittes, ein vereinfachtes Zeichen einführen. Wir wollen nämlich setzen:

$$\varkappa = \frac{4\pi c}{(1 + 4\pi E)(1 + \delta)}, \tag{47}$$

dann lauten die Gleichungen ebenso, wie die dort unter (40) angeführten, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{s}{\varkappa}(F - G) + \alpha F \\ N &= \frac{s}{\varkappa}(G - F) + \beta G. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Ferner wollen wir auch hier für die Behandlung des speciellen, aber besonders oft vorkommenden Falles, wo die äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung steht, und somit $G = 0$ ist, neben dem griechischen Buchstaben $\varkappa$ noch den lateinischen Buchstaben k einführen, dessen Bedeutung durch die Gleichung

$$\frac{s}{k} = \frac{s}{\varkappa} + \alpha \tag{49}$$

bestimmt wird, woraus sich ergiebt:

$$k = \frac{\varkappa}{1 + \alpha \frac{\varkappa}{s}} = \frac{4\pi c}{(1 + 4\pi E)(1 + \delta) + \alpha \frac{4\pi c}{s}}. \tag{50}$$

Dadurch nehmen die Gleichungen (48) wieder die im vorigen Abschnitte und (44) gegebene Form an, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{s}{k}(F - G) + \alpha G \\ N &= \left(\frac{s}{k} - \alpha\right)(G - F) + \beta G, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

und gehen für den vorher erwähnten Fall, wo $G = 0$ ist, über in:

$$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{s}{k} F \\ N &= -\left(\frac{s}{k} - \alpha\right) F. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Man sieht also, dass die Gleichungen, welche die Beziehungen zwischen den Grössen F, G, M und N ausdrücken, für eine Leidener Flasche, bei der sich ein Dielectricum zwischen den Belegungen befindet, dieselben Formen haben, wie für eine solche Leidener Flasche, bei der sich ein einfacher Isolator zwischen den Belegungen befindet, und dass der Unterschied nur in den verschiedenen Werthen der in den Gleichungen vorkommenden Constanten liegt.

§. 8. Behandlung der Dielectrica von Helmholtz und Maxwell.

Obwohl für unsere im folgenden Abschnitte zu gebenden Anwendungen die vorstehenden Entwickelungen schon ausreichend sind, so wird es doch nicht ohne Interesse sein, wenn ich im An-

schlusse an dieselben auch die von Helmholtz und Maxwell gegebenen Erweiterungen der auf Dielectrica bezüglichen Gleichungen mittheile.

Helmholtz in seiner bekannten schönen Abhandlung über die Bewegung der Electricität in ruhenden Leitern [1]) hat auf die Dielectrica ebenfalls die Behandlungsweise angewandt, durch welche Poisson das Verhalten magnetischer Körper unter dem Einflusse magnetischer Kräfte abzuleiten gesucht hat.

Maxwell hat eine ganz neue, nicht bloss auf das Verhalten dielectrischer Körper, sondern auf das ganze Wesen der Electricität bezügliche Ansicht aufgestellt, deren Hauptpuncte er schon in einer 1865 erschienenen Abhandlung [2]) mitgetheilt und deren vollständige Entwickelung er dann in seinem 1873 erschienenen wichtigen Werke „*A Treatise of Electricity and Magnetism*“ gegeben hat.

Maxwell betrachtet die Electricität als ein incompressibles Fluidum, welches allen Raum erfüllt. Denkt man sich nun einen Körper mit einer ihm noch besonders mitgetheilten Electricitätsmenge geladen, so wird dadurch die Electricität des umgebenden Mediums nach Aussen geschoben, so dass in jedem Raumtheile doch nur eben so viel Electricität vorhanden ist, wie vorher, als der Körper noch unelectrisch war. Aber durch die Verschiebung der Electricität des Mediums ist eine elastische Gegenkraft entstanden, welche die verschobenen Electricitätstheilchen wieder in ihre ursprünglichen Lagen zurückzubringen sucht. Aus dieser electrischen Elasticität des Mediums erklärt Maxwell die Kräfte, welche electrische Körper auf einander ausüben. Die verschiedenen dielectrischen Medien unterscheiden sich nun nach Maxwell dadurch von einander, dass ihre electrischen Elasticitätscoëfficienten verschieden sind.

Trotz dieser Verschiedenheit der Grundvorstellung sind doch die Gleichungen, zu welchen Maxwell gelangt, ganz übereinstimmend mit den sonst gebräuchlichen, und dieses gilt auch speciell von den auf Dielectrica bezüglichen Gleichungen; nur muss man den in den Gleichungen vorkommenden Grössen die der Maxwell'schen Vorstellung entsprechenden Bedeutungen beilegen.

---

[1]) Borchardt's Journal. Bd. 72, 1870.

[2]) *Philosophical Transactions for 1865 p. 459.*

Eine Hauptgrösse, welche er nach Faraday *the Specific Inductive Capacity of the dielectric medium* nennt und mit K bezeichnet, definirt er als das Verhältniss der Capacität eines Ansammlers, welcher als isolirende Zwischenschicht das betreffende Dielectricum hat, zu der Capacität eines Ansammlers von derselben Form und Grösse, welcher aber als isolirende Zwischenschicht Luft hat. Hierbei nimmt Maxwell an, dass die Dichtigkeit der Luft auf die Capacität des Ansammlers keinen merklichen Einfluss habe. Will man diese Annahme, welche nur angenähert richtig ist, nicht machen, sondern die kleinen Unterschiede, welche durch verschiedene Dichtigkeiten der Luft veranlasst werden können, auch noch berücksichtigen, so thut man besser, sich in dem zur Vergleichung gewählten Ansammler den Zwischenraum nicht mit Luft gefüllt, sondern von aller ponderablen Masse frei und somit nur mit Aether gefüllt zu denken. Diese Grösse K steht zu seinem electrischen Elasticitätscoëfficienten, welcher mit p bezeichnet werden möge, in folgender Beziehung:

$$K = \frac{4\pi}{p}.$$

Um die Beziehung dieser Grösse K zu der im vorigen Paragraphen angewandten Grösse E abzuleiten, brauchen wir nur die Resultate der dort angestellten Rechnungen mit der von Maxwell gegebenen Definition zu vergleichen. Für eine Franklin'sche Tafel oder Leidener Flasche haben wir gemäss (40) und (42) zu setzen:

$$Q = \frac{s}{4\pi c}(V - V_1)$$

$$Q = (1 + 4\pi E)\frac{s}{4\pi c}(V + U - V_1 - U_1).$$

Hierin stellt $V - V_1$ die Potentialniveaudifferenz dar, welche zwischen den mit den Electricitätsmengen Q und $-Q$ geladenen Belegungen stattfinden würde, wenn die Zwischenschicht keinen ponderablen Stoff enthielte, und $V + U - V_1 - U_1$ die Potentialniveaudifferenz, welche unter Mitwirkung des in der Zwischenschicht enthaltenen ponderablen Stoffes entsteht. Die vor den Klammern stehenden Factoren bedeuten also die den beiden Fällen entsprechenden Capacitäten des Ansammlers, und indem wir das Verhältniss dieser Factoren gleich K setzen, erhalten wir:

$$K = 1 + 4\pi E. \tag{53}$$

Setzen wir hierin noch für E den unter gewissen Voraussetzungen abzuleitenden, in §. 4 unter (19) gegebenen Ausdruck, so kommt:

$$K = \frac{1+2g}{1-g}. \tag{54}$$

Man kann bei der Aufstellung der auf dielectrische Medien bezüglichen Gleichungen auch den von ponderabler Masse freien und nur Aether enthaltenden Raum als ein Dielectricum behandeln, für welchen die Maxwell'sche specifische inductive Capacität K den speciellen Werth 1 hat, und die Grössen E und g den speciellen Werth 0 haben.

Für den Fall, wo mehrere aneinander grenzende Dielectrica verschiedener Art gegeben sind, lassen sich die Gleichungen ebenfalls aus den vorigen ableiten, und es mögen die Formen, welche Helmholtz und Maxwell den Gleichungen für diesen allgemeineren Fall gegeben haben, hier auch noch mitgetheilt werden.

Es seien zunächst zwei an einander grenzende dielectrische Media gegeben, für welche E die Werthe E_1 und E_2 habe, und welche beide unter dem Einflusse von gegebenen Electricitäten und zugleich unter ihrem gegenseitigen Einflusse electrisch polar geworden sind, und es handle sich darum, unter diesen Umständen die Potentialfunctionen U_1 und U_2 der beiden Media zu bestimmen. Dazu können wir die Gleichung (22) anwenden, müssen aber dabei den Umstand berücksichtigen, dass auf jedes der Medien ausser den gegebenen Electricitäten, deren Potentialfunction V ist, auch noch das andere Medium einwirkt. Wir haben also bei Behandlung des ersten Mediums $V + U_2$ und bei Behandlung des zweiten Mediums $V + U_1$ an die Stelle von V zu setzen. Demnach erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$U'_1 = \int \frac{E_1}{r} \frac{\partial (V + U_2 + U_1)}{\partial n_1} d\omega_1 + \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E_1 \frac{\partial (V + U_2 + U_1)}{\partial x}\right) d\tau_1$$

$$U'_2 = \int \frac{E_2}{r} \frac{\partial (V + U_1 + U_2)}{\partial n_2} d\omega_2 + \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E_2 \frac{\partial (V + U_1 + U_2)}{\partial x}\right) d\tau_2,$$

worin sich die Integrale nach ω_1 und τ_1 auf die Oberfläche und das Volumen des ersten Mediums und die Integrale nach ω_2 und τ_2 auf die Oberfläche und das Volumen des zweiten Mediums beziehen. Wenn wir diese Gleichungen addiren, und dabei die Potentialfunction beider Medien zusammen, also die Summe $U_1 + U_2$ mit U bezeichnen, erhalten wir:

$$(55)\qquad U' = \int \frac{E_1}{r} \frac{\partial (V+U)}{\partial n_1} d\omega_1 + \int \frac{E_2}{r} \frac{\partial (V+U)}{\partial n_2} d\omega_2$$

$$+ \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right) d\tau_1 + \int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E_2 \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right) d\tau_2.$$

In Bezug auf die Volumenintegrale folgt aus dieser Gleichung nichts Anderes, als was sich schon aus der in §. 5 gegebenen, auf ein einzelnes Medium bezüglichen Gleichung (22) ergiebt. Man kann nämlich die beiden Integrale, welche $d\tau_1$ und $d\tau_2$ enthalten, und welche sich auf die von den beiden Medien erfüllten Räume erstrecken sollen, in das Eine Integral

$$\int \frac{1}{r} \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right) d\tau$$

zusammenfassen, welches sich auf den ganzen von beiden Medien zusammen erfüllten Raum erstrecken soll, und worin E für beide Medien gilt, indem es in dem einen gleich E_1 und in dem anderen gleich E_2 ist. Aus dieser Form des Integrals folgt dann, dass die in §. 5 unter (24) gegebene Gleichung sich auch auf zwei Medien, und, wie gleich hinzugefügt werden kann, auf beliebig viele Medien beziehen lässt. In dieser verallgemeinerten Bedeutung möge die Gleichung hier noch einmal angeführt werden:

$$(56)\qquad \Delta U = -4\pi \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right).$$

In Bezug auf die in (55) vorkommenden Oberflächenintegrale tritt für die Trennungsfläche der beiden Medien ein bisher noch nicht besprochenes Verhalten ein. Da diese Fläche nämlich Oberfläche beider Medien ist, so beziehen sich auf sie beide Oberflächenintegrale. Wollen wir also für diese Fläche die Gleichung bilden, welche der in §. 5 gegebenen Gleichung (23) entspricht, so haben wir dabei an der rechten Seite zwei Glieder zu setzen, nämlich:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial n_1} - 4\pi E_2 \frac{\partial (V+U)}{\partial n_2}.$$

Hierin kann man die Form der linken Seite noch etwas mehr derjenigen der rechten Seite anpassen. Die Zeichen n_1 und n_2 bedeuten nämlich die auf einem und demselben Flächenelemente nach beiden Medien hin errichteten Normalen. Betrachten wir nun die nach dem ersten Medium hin gehende Normalrichtung als die positive, so können wir schreiben:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{+0} = \frac{\partial U}{\partial n_1}; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{-0} = -\frac{\partial U}{\partial n_2},$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$(57) \qquad \frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2} = -4\pi\left(E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial n_1} + E_2 \frac{\partial (V+U)}{\partial n_2}\right).$$

Diese Gleichung ist zunächst nur für die Trennungsfläche zweier Dielectrica abgeleitet. Man kann ihr aber auch eine allgemeinere Bedeutung geben. Man kann nämlich, wie schon oben gesagt, auch den von ponderabler Masse freien und nur Aether enthaltenden Raum als ein Dielectricum behandeln, in welchem E den Werth Null hat. Ferner kann man einen die Electricität leitenden Körper als ein Dielectricum behandeln, in welchem E unendlich gross ist. Auf diese Weise kann man die vorige Gleichung auf alle vorkommenden Grenzflächen anwenden.

Die Gleichungen (56) und (57) drücken Beziehungen der Grösse U zu der Summe $V + U$ aus. Man kann aus ihnen aber auch leicht Gleichungen gewinnen, welche Beziehungen der Grösse V zu der Summe $V + U$ ausdrücken.

In der Gleichung (56) möge zu dem Zwecke an der linken Seite ΔV addirt und subtrahirt werden, wodurch entsteht:

$$-\Delta V + \Delta(V + U) = -4\pi \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right),$$

welche Gleichung sich folgendermaassen umformen lässt:

$$\Delta V = \Delta(V+U) + 4\pi \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(E \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right)$$

$$= \sum \left[\frac{\partial^2 (V+U)}{\partial x^2} + 4\pi \frac{\partial}{\partial x}\left(E \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right)\right]$$

wofür man einfacher schreiben kann:

$$(58) \qquad \Delta V = \sum \frac{\partial}{\partial x}\left[(1 + 4\pi E) \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right].$$

Führen wir hierin noch für $1 + 4\pi E$ das Maxwell'sche Zeichen K ein, so kommt:

$$(58a) \qquad \Delta V = \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial (V+U)}{\partial x}\right).$$

In der Gleichung (57) addiren und subtrahiren wir an der linken Seite $\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2}$ und verfahren dann ähnlich, wie vorher, wodurch wir erhalten:

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = K_1 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_2}. \tag{59}$$

In diese Gleichungen können wir noch die Grössen einführen, welche ausdrücken, welche Dichtigkeit diejenige Electricität, von welcher V die Potentialfunction ist, an den betreffenden Stellen hat. Bezeichnen wir, wie früher die Raumdichtigkeit mit k und die Flächendichtigkeit auf der betrachteten Grenzfläche mit h, so ist zu setzen:

$$\varDelta V = -4\pi k$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi h,$$

und dadurch gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial (V + U)}{\partial x}\right) + 4\pi k = 0. \tag{60}$$

$$K_1 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial (V + U)}{\partial n_2} + 4\pi h = 0. \tag{61}$$

Dieses sind die von Helmholtz und Maxwell aufgestellten Gleichungen. Maxwell schreibt darin statt $V + U$ einfach V, indem er die ganze Function, deren negative Differentialcoëfficienten die Componenten der in dem Dielectricum wirkenden electrischen Gesammtkraft darstellen, mit V bezeichnet.

ABSCHNITT IV.

Das mechanische Aequivalent einer electrischen Entladung.

§. 1. Gesammtwirkung einer Entladung.

Nachdem in den vorigen Abschnitten von den unter verschiedenen Umständen stattfindenden electrischen Ladungen und von dem darauf bezüglichen Verhalten der Potentialfunction die Rede gewesen ist, müssen wir nun die Entladung und die durch sie entstehenden Wirkungen betrachten, wobei wir unter electrischer Entladung jede Aenderung in der Anordnung der Electricität verstehen, durch welche der electrische Zustand der verschiedenen Theile eines Systemes von leitenden Körpern, zu denen auch die Erde gehören kann, sich ganz oder theilweise ausgleicht.

Während der in der Anordnung der Electricität stattfindenden Aenderung und der damit verbundenen Bewegung der Electricitätstheilchen wird von den electrischen Kräften Arbeit geleistet. Diese von Kräften, welche dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind, geleistete Arbeit lässt sich auf sehr einfache Art bestimmen[1]. Sie ist von der Art, wie die Bewegungen der Electricitätstheilchen stattfinden, ganz unabhängig und hängt nur von den Anfangs- und Endlagen derselben ab, und zwar wird sie dargestellt durch die bei der Entladung eingetretene Ab-

[1] Siehe darüber mein Buch „Die Potentialfunction und das Potential", dritte Auflage, §. 65.

nahme des Potentials der gesammten Electricität auf sich selbst.

Durch diese von den electrischen Kräften gethane Arbeit können nun zunächst gewisse Wirkungen hervorgebracht werden, bei welchen andere Kräfte zu überwinden sind, und von denen einige der gewöhnlichsten folgende sind. Es springen an einer oder mehreren Stellen electrische Funken über, wobei eine Luftschicht oder ein anderer nichtleitender Körper von der Electricität durchbrochen wird. — Wenn der electrische Strom an einer Stelle durch einen sehr dünnen Draht geht, so erleidet dieser mechanische Veränderungen, welche von kleinen, kaum merkbaren Einknickungen bis zum vollständigen Zerstäuben variiren können. — Wenn der Strom durch electrolytische Körper geht, so treten chemische Zersetzungen ein. — In Körpern, welche sich in der Nähe der durchströmten Leiter befinden, können Inductionsströme oder magnetische Wirkungen hervorgerufen werden — etc.

Zu diesen verschiedenen Wirkungen wird ein Theil der ganzen von den electrischen Kräften geleisteten Arbeit verbraucht. Der übrige Theil der Arbeit verwandelt sich in den Leitern in Wärme.

Wenn wir die Wärme nach mechanischem Maasse, d. h. nach der ihr entsprechenden mechanischen Arbeit messen, und auch die anderen vorher genannten Wirkungen durch die zu ihnen verbrauchten Arbeitsgrössen ausdrücken, so können wir sie sämmtlich in eine algebraische Summe vereinigen und diese kurz die Summe aller durch die electrische Entladung hervorgebrachten Wirkungen nennen. In Bezug auf diese gilt dann dem Obigen nach folgender einfacher Satz, welchen wir als Hauptsatz den nachstehenden Betrachtungen zu Grunde legen:

Die Summe aller durch eine electrische Entladung hervorgebrachten Wirkungen ist gleich der dabei eingetretenen Abnahme des Potentials der gesammten Electricität auf sich selbst.

§. 2. Potential einer geladenen Leidener Flasche oder Batterie.

Indem wir nun als Beispiel eines Körpersystemes, welches mit Electricität geladen und wieder entladen werden kann, die Leidener Flasche wählen, handelt es sich darum, bei einer geladenen

Leidener Flasche das Potential der gesammten Electricität auf sich selbst zu bestimmen, wobei unter der gesammten Electricität nicht bloss die auf den beiden Belegungen befindlichen Electricitätsmengen zu verstehen sind, sondern auch die sämmtlichen kleinen Electricitätsmengen, welche sich im Inneren des Glases auf den electrisch polaren Partikelchen befinden.

Seien dq und dq' irgend zwei Electricitätselemente und r ihr gegenseitiger Abstand, so wird das Potential der gesammten Electricität auf sich selbst, welches wir mit W bezeichnen wollen, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$W = \tfrac{1}{2}\iint \frac{dq\,dq'}{r}, \tag{1}$$

worin die beiden angedeuteten Integrationen über alle gegebenen, theils positiven, theils negativen Electricitätsmengen auszuführen sind. Da nun andererseits, wenn die Potentialfunction aller gegebenen Electricitätsmengen an dem Puncte (x, y, z), wo das Element dq sich befindet, mit V bezeichnet wird, die Gleichung

$$V = \int \frac{dq'}{r} \tag{2}$$

gilt, so können wir die vorige Gleichung auch so schreiben:

$$W = \tfrac{1}{2}\int V\,dq. \tag{3}$$

In unserem gegenwärtigen Falle ist es aber zweckmässig, dieser letzteren Gleichung noch eine etwas andere Form zu geben, nämlich die Potentialfunction der Electricitätsmengen, welche sich auf den Belegungen der Flasche befinden von der Potentialfunction derjenigen Electricitätsmengen, welche sich im Inneren des Glases auf den polaren Partikelchen befinden, zu trennen, und beide durch besondere Zeichen darzustellen. Die erstere möge mit V und die letztere mit U bezeichnet werden, so dass die Potentialfunction aller in Betracht kommenden Electricitäten durch die Summe $V + U$ dargestellt wird. Dann nimmt die vorige Gleichung folgende Gestalt an:

$$W = \tfrac{1}{2}\int (V + U)\,dq, \tag{4}$$

worin die Integration über alle auf den Belegungen und auf den polaren Glaspartikelchen befindlichen Electricitätsmengen auszuführen ist.

Was zunächst die auf den polaren Glaspartikelchen befindlichen Electricitätsmengen anbetrifft, so lässt sich für diese die Integration sehr kurz abmachen. Wenn ein leitendes Glastheilchen durch Influenz bis zum Gleichgewichtszustande electrisch polar geworden ist, so ist das Potentialniveau in ihm constant. Da ferner die auf ihm befindlichen getrennten Electricitäten aus gleichen Mengen positiver und negativer Electricität bestehen, so ist der Theil des Integrales, welcher sich auf diese beiden Electricitätsmengen bezieht, Null. Dasselbe gilt von allen leitenden Glastheilchen in gleicher Weise, und man kann daher den ganzen Theil des Integrales, welcher sich auf die auf den leitenden Glastheilchen befindlichen getrennten Electricitäten bezieht, ohne Weiteres gleich Null setzen.

Was ferner die auf den Belegungen befindlichen Electricitätsmengen anbetrifft, so findet auch bei ihnen eine Vereinfachung statt, indem auf jeder Belegung das Potentialniveau constant ist. Wir wollen, wie in §. 7 des vorigen Abschnittes, den Werth des Potentialniveaus auf der inneren Belegung mit F und auf der äusseren Belegung mit G bezeichnen. Nennen wir dann noch, wie dort, die auf der inneren Belegung befindliche Electricitätsmenge M und die auf der äusseren Belegung befindliche N, so geht die Gleichung (4) über in:

$$W = \tfrac{1}{2} FM + \tfrac{1}{2} GN. \qquad (5)$$

Substituirt man hierin für M und N die in den Gleichungen (48) oder (51) des vorigen Abschnittes gegebenen Werthe, so erhält man W durch F und G ausgedrückt. Ebenso kann man W durch M und N oder durch irgend zwei der vier Grössen F, G, M und N ausdrücken.

Setzt man voraus, dass die äussere Belegung der Flasche mit der Erde in leitender Verbindung stehe, so hat man $G = 0$ zu setzen. Dadurch vereinfacht sich (5) in:

$$W = \tfrac{1}{2} FM. \qquad (6)$$

Hieraus kann man, mit Hülfe der im vorigen Abschnitte unter (52) gegebenen Gleichung

$$M = \frac{s}{k} F, \qquad (7)$$

entweder M oder F eliminiren und erhält dadurch:

$$(8)\qquad W = \frac{1}{2k} s F^2$$

$$(9)\qquad W = \frac{k}{2} \frac{M^2}{s}.$$

Wenn statt einer einzelnen Flasche eine Batterie von n gleichen Flaschen gegeben ist, so kann man die auf diese bezüglichen Gleichungen leicht aus den vorigen ableiten. Wenn man, nachdem die n Flaschen einzeln gleich stark geladen sind, alle inneren und alle äusseren Belegungen unter sich verbindet, so wird dadurch (sofern man von dem kleinen Einflusse der auf den Verbindungsstücken befindlichen Electricität absieht) keine Aenderung in den Werthen der Potentialfunction auf den Belegungen eintreten. Die Electricitätsmengen dagegen, welche sich auf der inneren und äusseren Belegung der ganzen Batterie befinden, sind natürlich $n$mal so gross, als die auf den Belegungen einer einzelnen Flasche befindlichen. Dieses letztere kann man in der unter (7) gegebenen Gleichung, welche sich auf den Fall bezieht, wo die äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung steht, einfach dadurch ausdrücken, dass man die mit s bezeichnete Fläche der inneren Belegung Einer Flasche durch die Gesammtfläche der inneren Belegung der ganzen Batterie, welche S heissen möge, ersetzt und somit schreibt:

$$(10)\qquad M = \frac{S}{k} F.$$

Wenn man mit Hülfe dieser Gleichung aus der Gleichung (6) M oder F eliminirt, so erhält man:

$$(11)\qquad W = \frac{1}{2k} S F^2$$

$$(12)\qquad W = \frac{k}{2} \frac{M^2}{S}.$$

§. 3. Abnahme des Potentials bei der Entladung und Rückstand.

Betrachten wir hiernach das Potential einer geladenen Leidener Flasche oder Batterie als bekannt, so lässt sich daraus auch leicht die bei der Entladung stattfindende Abnahme des Potentials

bestimmen. Wird die Batterie vollständig entladen, so dass der Endwerth des Potentials gleich Null ist, so ist die Abnahme des Potentials einfach gleich W. Findet aber nur eine theilweise Entladung statt, so dass nach der Entladung noch ein Potential W' besteht, so hat man die Differenz $W - W'$ zu bilden.

Bewirkt man bei einer Batterie, deren äussere Belegung mit der Erde in leitender Verbindung steht, die Entladung dadurch, dass man die äussere Belegung mit der inneren in leitende Verbindung setzt und diese Verbindung längere Zeit bestehen lässt, so findet eine vollständige Entladung statt. Wenn man dagegen die Verbindung nur momentan herstellt und dann sofort wieder aufhebt, so findet bekanntlich die Entladung nicht ganz vollständig statt, sondern es bleibt noch ein Rückstand, welcher nach einiger Zeit eine zweite schwächere Entladung ermöglicht, bei der wiederum ein Rückstand von geringerer Grösse bleibt, der dann eine dritte Entladung geben kann, u. s. f.

Die Entstehung des Rückstandes ist wohl unzweifelhaft daraus zu erklären, dass das Glas seinen electrisch polaren Zustand, welchen es unter dem Einflusse der auf den Belegungen befindlichen Electricitätsmengen angenommen hat, im Momente der Entladung nicht gleich vollständig verliert, sondern dass ein Theil dieser inneren Polarität zunächst noch fortbesteht, und dass dadurch ein Theil der Electricität auf den Belegungen zurückgehalten wird. Diese unmittelbar nach der Entladung noch vorhandene innere Polarität verliert sich dann in einiger Zeit soweit, dass nur noch eine Polarität von solcher Stärke übrig bleibt, wie sie den jetzt noch auf den Belegungen befindlichen Electricitätsmengen entspricht, und von diesen aufrecht erhalten werden kann. Diese geringere Polarität ist natürlich, wenn zwischen den Belegungen wieder eine leitende Verbindung hergestellt wird, nicht ausreichend, die auf den Belegungen befindlichen Electricitäten festzuhalten, und es tritt daher von Neuem eine Entladung ein, bei der dann abermals ein Theil der zuletzt vorhandenen Polarität bestehen bleibt und daher ein gewisser viel kleinerer Rest von Electricität auf den Belegungen festgehalten wird, u. s. f.

Woher es kommt, dass die innere Polarität zum Theil während der Entladung selbst, also gleichzeitig mit der Kraft, welche sie erzeugt hat, in fast unmessbar kurzer Zeit verschwindet, zum Theil dagegen sich erst nachträglich allmälig verliert, ist noch nicht festgestellt. Boltzmann hat die nachträglich ein-

tretende Veränderung des inneren electrischen Zustandes mit der elastischen Nachwirkung verglichen [1]), welche Vergleichung viel für sich hat, wenn auch der eigentliche Grund der Erscheinung dabei noch in verschiedenen Weisen gedeutet werden kann.

Um über den Zustand der Batterie unmittelbar nach der Entladung und die darauf bezüglichen Grössen ein bestimmteres Urtheil zu gewinnen, wird es zweckmässig sein, noch einige besondere Betrachtungen anzustellen.

§. 4. Untersuchung des Falles, wo die Potentialniveaux der beiden Belegungen gleich sind, während noch eine innere Polarität besteht.

Wenn die Belegungen einer Batterie für eine sehr kurze Zeit unter einander leitend verbunden werden, so strömt so viel Electricität von der einen zur anderen, dass sie beide gleiches Potentialniveau haben, welches wir unter Vernachlässigung einer kleinen, möglicher Weise bestehenden Abweichung einfach gleich Null setzen können. Es fragt sich nun, wie viel Electricität bei dieser Ausgleichung der Potentialniveaux noch auf den Belegungen bleiben muss, wenn die innere Polarität des Glases zum Theil noch fortbesteht.

Bezeichnen wir die Potentialniveaux, welche die Belegungen nur wegen der noch bestehenden inneren Polarität des Glases haben würden, mit u und u_1, so müssen die Electricitätsmengen so gross sein, dass sie für sich allein die Belegungen zu den Potentialniveaux $-u$ und $-u_1$ bringen würden. Zur Bestimmung der dazu nöthigen Electricitätsmengen können wir die Gleichungen (38) des Abschnittes II. anwenden, in welchen wir dann F und G durch $-u$ und $-u_1$ und ausserdem, wenn wir nicht bloss Eine Flasche, sondern eine Batterie von beliebig vielen Flaschen betrachten, s durch S zu ersetzen haben. Vernachlässigen wir auch hier verhältnissmässig kleine Abweichungen und lassen daher die Grösse δ und die mit den Coëfficienten α und β behafteten Glieder fort, so erhalten wir für beide Belegungen gleiche und entgegengesetzte Electricitätsmengen, welche mit m und $-m$ bezeichnet werden können, wobei m durch folgende Gleichung bestimmt wird:

---

[1]) Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 68, Juli 1873.

$$m = \frac{S}{4\pi c}(u_1 - u). \tag{13}$$

Um nun ferner zur Bestimmung des auf diesen Zustand der Batterie bezüglichen Potentials unsere früheren auf den Gleichgewichtszustand bezüglichen Gleichungen anwenden zu können, wollen wir neben der Grösse m noch die Grösse μ einführen mit der Bedeutung, dass μ und $-\mu$ diejenigen Electricitätsmengen sind, welche sich auf den beiden Belegungen befinden müssten, um die vorher besprochene innere Polarität, welche unmittelbar nach der Entladung noch vorhanden ist, hervorzurufen und aufrecht zu erhalten. Diese Grösse μ steht dann zu der Differenz $u - u_1$ in derselben Beziehung, welche in der Gleichung (41) des vorigen Abschnittes zwischen Q und $U - U_1$ ausgedrückt ist, und wir können daher schreiben:

$$\mu = \frac{S}{4\pi c} \cdot \frac{1 + 4\pi E}{4\pi E}(u_1 - u). \tag{14}$$

Wenn auf den beiden Belegungen der Batterie nach der Entladung, statt der Electricitätsmengen m und $-m$, die Electricitätsmengen μ und $-\mu$ befindlich wären, so hätten wir einen Gleichgewichtszustand von derselben Art, wie der, auf welchen die Gleichungen (46) des vorigen Abschnittes sich beziehen. Nennen wir die ganzen Potentialniveaux, welche unter diesen Umständen auf den Belegungen stattfinden würden, f und g, so erhalten wir gemäss jenen Gleichungen, unter Vernachlässigung der Grösse δ und der mit den Coëfficien α und β behafteten Glieder:

$$\mu = \frac{S}{4\pi c}(1 + 4\pi E)(f - g), \tag{15}$$

und wenn wir hierin für μ den in (14) gegebenen Ausdruck setzen, so ergiebt sich:

$$f - g = \frac{u_1 - u}{4\pi E}. \tag{16}$$

Das Potential der gesammten Electricität auf sich selbst, welches unter diesen Umständen bestehen würde, und welches mit Ω bezeichnet werden möge, ergiebt sich aus der Gleichung (5), wenn man darin F und G durch f und g und M und N durch μ und $-\mu$ ersetzt, nämlich:

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\mu(f - g). \tag{17}$$

Setzt man hierin für μ und $f - g$ die in (14) und (16) gegebenen Ausdrücke, so kommt:

$$(18) \qquad \Omega = \frac{S}{8\pi c}(1 + 4\pi E)\left(\frac{u_1 - u}{4\pi E}\right)^2.$$

Um von diesem Potential zu dem von uns gesuchten zu gelangen, wollen wir uns die Grösse μ in die Theile $\mu - m$ und m getheilt denken, und dann die sämmtlichen vorher betrachteten Electricitäten, deren Potential Ω ist, in zwei Systeme zerlegen. Das erste System S_1 soll nur aus den beiden Electricitätsmengen $\mu - m$ und $-(\mu - m)$ bestehen. Das zweite System S' dagegen soll die Mengen m und $-m$ und ausserdem alle auf den polaren Glastheilchen befindlichen Electricitätsmengen (also gerade diejenigen Electricitätsmengen, welche unmittelbar nach der Entladung vorhanden sind), umfassen. Dann zerfällt das Potential Ω in folgende drei Bestandtheile:

1. das Potential des Systemes S_1 auf sich selbst, welches W_1 heissen möge;
2. das Potential des Systemes S' auf sich selbst, welches W' heissen möge;
3. das Potential des Systemes S_1 auf das System S', welches W_1' heissen möge.

Hiernach kann man setzen:

$$\Omega = W_1 + W' + W_1'.$$

Das letzte an der rechten Seite stehende Potential W_1' lässt sich sofort seinem Werthe nach angeben. Wir erhalten es nämlich, wenn wir jedes zu dem einen Systeme gehörige Electricitätselement mit der auf den betreffenden Punct bezüglichen Potentialfunction des anderen Systemes multipliciren, und dann die Integration ausführen. Nun befinden sich alle zum ersten Systeme gehörenden Electricitätselemente auf den Belegungen, und die Potentialfunction des zweiten Systemes ist auf den Belegungen gerade Null, folglich muss auch die Integration den Werth Null geben, und wir erhalten:

$$W_1' = 0.$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\Omega = W_1 + W',$$

welche Gleichung wir in folgender Form schreiben wollen:

$$(19) \qquad W' = \Omega - W_1.$$

Von den beiden hierin an der rechten Seite stehenden Grössen ist die erste Ω durch die Gleichung (18) bestimmt. Um die andere Grösse W_1 zu bestimmen, ist zu bemerken, dass die Electricitätsmengen $\mu - m$ und $-(\mu - m)$, wenn sie für sich allein vorhanden wären, auf den Belegungen die Potentialniveaux f und g hervorbringen würden, da alle übrigen Electricitätsmengen auf den Belegungen die Potentialniveaux Null geben. Daraus folgt:

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(\mu - m)(f - g).$$

Hierin kann man nach (13) und (14) setzen:

$$\mu - m = \frac{S}{4\pi c} \cdot \frac{u_1 - u}{4\pi E},$$

und für $f - g$ kann man den in (16) gegebenen Werth anwenden, wodurch man erhält:

$$(20) \qquad W_1 = \frac{S}{8\pi c}\left(\frac{u_1 - u}{4\pi E}\right)^2.$$

Durch Anwendung dieser Werthe geht (19) über in:

$$(21) \qquad W' = \frac{S}{8\pi c} \cdot \frac{(u_1 - u)^2}{4\pi E},$$

wofür man auch gemäss (13) schreiben kann:

$$(22) \qquad W' = \frac{c}{2E} \cdot \frac{m^2}{S}.$$

Durch diese Gleichungen ist das gesuchte, unmittelbar nach der Entladung stattfindende Potential der gesammten Electricität auf sich selbst bestimmt.

Wenn nach der Entladung eine gewisse Zeit verflossen ist, und die innere Polarität bis zu dem Reste abgenommen hat, welcher durch die auf den Belegungen befindlichen Electricitätsmengen m und $-m$ aufrecht erhalten werden kann, so ist wieder ein Gleichgewichtszustand von der Art, wie der, auf welchen die Gleichungen von (5) bis (12) sich beziehen, erreicht. Das diesem Zustande entsprechende Potential der gesammten Electricität auf sich selbst, welches W'' heissen möge, erhält man, wenn man in der Gleichung (12) einfach m an die Stelle von M setzt, wobei man wieder für den Grad von Genauigkeit, welcher beim Rückstande ausreichend ist, k durch $\frac{4\pi c}{1 + 4\pi E}$ ersetzen kann:

$$W'' = \frac{2\pi c}{1 + 4\pi E} \cdot \frac{m^2}{S}. \tag{23}$$

Substituirt man hierin für m seinen Werth aus (13), so kommt:

$$W'' = \frac{S(u_1 - u)^2}{8\pi c\,(1 + 4\pi E)}. \tag{24}$$

§. 5. Arbeit der electrischen Kräfte während der Entladung und nach derselben.

Nachdem in den vorigen Paragraphen das Potential der gesammten Electricität auf sich selbst für die verschiedenen in Betracht kommenden Zustände bestimmt ist, lässt sich auch die Arbeit, welche die electrischen Kräfte während der Entladung und nach derselben leisten, leicht ausdrücken.

Wir wollen uns die Entladung zuerst dadurch bewirkt denken, dass ein von der äusseren Belegung ausgehender Leiter mit seinem anderen Ende einer mit der inneren Belegung in leitender Verbindung stehenden Stelle genähert und für eine ganz kurze Zeit damit in Berührung gebracht wird. Dann haben wir vor der Entladung den Zustand, bei welchem das Potential gleich W ist, und unmittelbar nach der Entladung den Zustand, bei welchem das Potential gleich W' ist. Während der Entladung wird also die Arbeit

$$W - W'$$

geleistet.

Wenn nach der Entladung einige Zeit verstrichen ist, so ist der Zustand eingetreten, bei welchem das Potential gleich W'' ist, und es wird also nach der Entladung bis zum Eintreten dieses Zustandes noch die Arbeit

$$W' - W''$$

von den electrischen Kräften geleistet.

Lässt man jetzt abermals eine Entladung eintreten, so erhält man dieselben beiden Vorgänge im verkleinerten Maassstabe u. s. f.

Um die Arbeitsgrössen in ihrer Beziehung zum ganzen ursprünglich bestehenden Potential W näher angeben zu können, muss man wissen, wie sich W' und W'' zu W verhalten, und dazu wiederum muss bekannt sein, wie sich die Differenz $u_1 - u$ zur Differenz $F - G$ verhält. Ein Grenzwerth für $u_1 - u$, welcher

sicherlich nicht überschritten werden kann, ergiebt sich sofort daraus, dass die Polarität des Glases nach der Entladung nicht grösser sein kann, als sie während der Ladung war. Bezeichnen wir daher, wie im vorigen Abschnitte, die Potentialniveaux, welche die während der Ladung bestehende Polarität des Glases für sich allein auf den Belegungen hervorbringen würde, mit U und U_1, so kann $u_1 - u$ keinesfalls grösser als $U_1 - U$ sein. Wieviel kleiner es ist, lässt sich nicht genau angeben. Soviel aber kann als unzweifelhaft angenommen werden, dass bei einer bestimmten Flasche oder Batterie mit wachsendem $U_1 - U$ auch $u_1 - u$ wächst, und da es bei den auf den Rückstand bezüglichen Grössen, welche überhaupt nicht bedeutend sind, auf äusserste Genauigkeit nicht ankommt, so wird es erlaubt sein, die Differenzen $u_1 - u$ und $U_1 - U$ als einander proportional zu betrachten, und demgemäss zu setzen:

$$u_1 - u = p(U_1 - U), \tag{25}$$

worin p einen von der Natur der die Batterie bildenden Flaschen abhängigen Coëfficienten bedeutet, dessen Werth zwischen 0 und 1 liegen muss. Was nun die Differenz $U_1 - U$ anbetrifft, so lässt sich aus der Gleichung (39) des vorigen Abschnittes zunächst die folgende ableiten:

$$U_1 - U = 4\pi E(V + U - V_1 - U_1),$$

und wenn man hierin für $V + U$ und $V_1 + U_1$ die später eingeführten Zeichen F und G setzt, so kommt:

$$U_1 - U = 4\pi E(F - G), \tag{26}$$

wodurch die Gleichung (25) übergeht in:

$$u_1 - u = p \cdot 4\pi E(F - G). \tag{27}$$

Aus dieser Gleichung kann man mit Hülfe der im vorigen Abschnitt unter (46) und in diesem Abschnitt unter (13) gegebenen Gleichungen auch noch die folgende ableiten:

$$m = p\frac{4\pi E}{1 + 4\pi E} M. \tag{28}$$

Kehren wir nun zu den für die Potentiale W' und W'' aufgestellten Gleichungen (22) und (23) zurück und setzen darin für m den vorstehenden Ausdruck, so kommt:

$$W' = 2\pi c p^2 \frac{4\pi E}{(1 + 4\pi E)^2} \cdot \frac{M^2}{S} \tag{29}$$

$$W'' = 2\pi c p^2 \frac{(4\pi E)^2}{(1 + 4\pi E)^3} \cdot \frac{M^2}{S}. \tag{30}$$

Das in diesen beiden Gleichungen vorkommende Product $2\pi c$ können wir noch durch $\frac{k}{2}$ ersetzen, da wir auch bisher bei der Behandlung der auf den Rückstand bezüglichen Grössen, welche an sich nur klein sind, den zwischen k und $4\pi c$ bestehenden Unterschied vernachlässigt haben.

Diese Ausdrücke von W' und W'' können nun bei der Bestimmung der Arbeit angewandt werden, wobei W mittelst der in §. 2 entwickelten Gleichungen zu bestimmen ist. Zur speciellen Ausführung der Rechnung wollen wir den Fall wählen, wo die äussere Belegung der Batterie mit der Erde in leitender Verbindung steht, und wo für W die Gleichung (12) gilt. Dann erhalten wir:

$$(31) \qquad W - W' = \frac{k}{2}\left(1 - p^2 \frac{4\pi E}{(1+4\pi E)^2}\right)\frac{M^2}{S}$$

$$(32) \qquad W' - W'' = \frac{k}{2}\, p^2 \frac{4\pi E}{(1+4\pi E)^3} \cdot \frac{M^2}{S}.$$

Im Vorstehenden war vorausgesetzt, dass die Entladung in der Weise stattfinde, dass die Enden des Schliessungsbogens nur für eine sehr kurze Zeit mit einander in Berührung gebracht werden. Wird dagegen die mit der Erde leitend verbundene äussere Belegung dauernd mit der inneren in leitende Verbindung gesetzt, so tritt eine vollständige Entladung ein. Indessen findet auch in diesem Falle der Umstand statt, dass nicht die ganze Entladung gleich im Momente der Verbindung vollendet ist, sondern dass ein Theil derselben erst nachträglich im Verlaufe einiger Zeit vor sich geht. Man kann daher auch in der Arbeit, welche im Ganzen durch W dargestellt wird, zwei Theile unterscheiden, den Theil $W - W'$, welcher sofort beim Eintritt der Verbindung geleistet wird, und den Theil W', welcher während des Bestehens der Verbindung erst allmälig folgt.

§. 6. Wirkungen der Entladung.

Wenn wir nun die von der Entladung hervorgebrachten Wirkungen betrachten, so können diese, wie schon oben in §. 1 erwähnt, von sehr verschiedener Art sein. Zu den dort angeführten Wirkungen ist, streng genommen, noch eine schon vor der eigentlichen Entladung stattfindende hinzuzufügen. Während nämlich

das Ende des von der äusseren Belegung ausgehenden Schliessungsbogens sich der mit der inneren Belegung leitend verbundenen Stelle nähert, findet schon eine kleine Mitwirkung der Electricität statt, indem die Enden des Schliessungsbogens vermöge der auf ihnen befindlichen Electricität einander anziehen, und dadurch die Annäherung erleichtern. Diese Wirkung ist aber in unserem Falle, wo der grösste Theil der Electricität auf den Belegungen gebunden ist, und daher zu jener Anziehung nicht beitragen kann, jedenfalls so gering, dass wir sie ohne Bedenken vernachlässigen können.

Ferner wollen wir zur Vereinfachung die Erregung von Inductionsströmen oder Magnetismus ausserhalb des betrachteten Körpersystemes und alle bleibenden Veränderungen mechanischer, chemischer oder magnetischer Natur innerhalb desselben für jetzt von der Untersuchung ausschliessen und annehmen, dass die Arbeit, welche an den Stellen verwandt wird, wo der Schliessungsbogen unterbrochen ist, und wo ein Funke überspringen muss, und die in dem ganzen Systeme erzeugte Wärme die einzigen vorkommenden Wirkungen seien. Dann muss dem Hauptsatze nach die Summe dieser beiden gleich der Abnahme des Potentials sein.

Dieses theoretische Ergebniss möge nun mit der Erfahrung verglichen werden. Dazu bietet besonders die von Riess mit der grössten Sorgfalt, Umsicht und Consequenz durchgeführte Reihe von Untersuchungen ein ebenso reichhaltiges, als zuverlässiges Material dar, und die Vergleichung desselben mit der Theorie wird noch dadurch sehr erleichtert, dass Riess selbst aus den von ihm beobachteten Thatsachen ganz bestimmt formulirte Gesetze abgeleitet hat.

Wird zunächst angenommen, dass bei einer Reihe von Versuchen die Stärke der Entladung, d. h. die Abnahme des Potentials, dieselbe bleibe, aber der Schliessungsbogen geändert werde, so muss dabei die Summe der beiden Wirkungen constant sein.

Was die Wärmeerzeugung anbetrifft, so besitzen wir über deren Abhängigkeit vom Schliessungsbogen folgende zwei wichtige Sätze von Riess[1]).

1. Die durch eine und dieselbe Entladung in zwei verschiedenen im Schliessungsbogen befindlichen conti-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 43 und 45.

nuirlichen Drahtstücken erzeugten Wärmemengen verhalten sich wie ihre reducirten Längen, wenn man unter reducirte Länge die Grösse $\frac{\lambda}{\varrho^2}x$ versteht, worin λ die wirkliche Länge, ϱ der Radius und x eine vom Stoffe des Drahtes abhängige Grösse ist, welche Riess die Verzögerungskraft nennt, und welche der Leitungsfähigkeit umgekehrt proportional ist.

2. Wenn man unter sonst unveränderten Umständen den Schliessungsbogen dadurch verlängert, dass man einen Draht von der reducirten Länge l einschaltet, so wird dadurch die Erwärmung eines anderen im Schliessungsbogen befindlichen Drahtes vermindert, und zwar nahe im Verhältnisse von $1 + bl : 1$, worin b eine durch den Versuch zu bestimmende Constante ist.

Beide Sätze lassen sich in folgende Gleichung zusammenfassen[1]:

$$C = \frac{l'}{1 + bl} A, \tag{33}$$

worin l' die reducirte Länge des betrachteten Drahtstückes und C die darin erzeugte Wärmemenge ist, während b und l die vorher erwähnte Bedeutung haben, und A eine von der Stärke der Entladung abhängige Grösse darstellt, welche für unseren gegenwärtigen Fall, wo wir es nur mit gleichen Entladungen zu thun haben, constant ist.

Diese Gleichung enthält eine Bestätigung des vorher gezogenen Schlusses. Der eingeschaltete Draht l wird natürlich durch die Entladung ebenfalls erwärmt und zwar wird nach der vorigen Gleichung die Wärmemenge $\frac{l}{1 + bl} A$ in ihm erzeugt. Dafür muss, wenn die Gesammtsumme der Wirkungen constant bleiben soll, eine Verminderung der übrigen Wirkungen eintreten, und diese wird in der That durch den zweiten Riess'schen Satz und durch die Gleichung nachgewiesen. Mit dieser allgemeinen Uebereinstimmung müssen wir uns für jetzt begnügen. Eine genaue quantitative Untersuchung, ob die Abnahme aller übrigen Wirkungen zusammen wirklich gerade gleich jener durch $\frac{l}{1 + bl} A$ aus-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 45, S. 23.

gedrückten Wärmemenge ist, scheint mir bis jetzt ohne neue Beobachtungsdata nicht ausführbar zu sein.

Vorsselman de Heer hat freilich aus jener Gleichung (33) einen allgemeinen Satz abgeleitet, den man vielleicht auf den ersten Blick für eine vollständige Bestätigung unseres Schlusses halten könnte. Es soll nämlich die Gesammtwärme, welche durch eine electrische Entladung in dem ganzen Schliessungsbogen erregt wird, von der Natur des Schliessungsbogens unabhängig sein [1]). Dieser Satz wird auch von Helmholtz in der That als mit der Theorie übereinstimmend angeführt [2]); indessen scheint er mir dazu doch nicht geeignet zu sein, indem er mehrere Ungenauigkeiten enthält.

Erstens beschränkt Vorsselman de Heer die Betrachtung ausdrücklich auf „den die beiden Belege der Batterie verbindenden Bogen“ [3]). Die Wärmeerzeugung erstreckt sich aber auch auf die übrigen Körper des Systemes, und zwar wird ein Theil innerhalb der Batterie selbst erzeugt, und ein anderer, für den Fall, dass die Batterie und der Schliessungsbogen nicht isolirt, sondern mit der Erde verbunden sind, innerhalb des Ableitungszweiges und der Erde. Der letztere Theil wird im Allgemeinen unbedeutend sein, da nur der Ueberschuss der einen oder anderen Electricität nach der Erde strömt, und dieser gegen die ganze Electricitätsmenge gering ist, und dasselbe lässt sich unter der Bedingung, dass der Schliessungsbogen eine beträchtliche reducirte Länge hat, vielleicht auch von dem ersten Theile annehmen. Bei sehr kurzem Schliessungsbogen dagegen würde eine solche Annahme unzulässig sein, und jedenfalls müssen wir diesen Theil bis jetzt als unbekannt bezeichnen.

Ferner hat er die Stellen, wo der Schliessungsbogen unterbrochen ist und wo ein Funke überspringt, nicht berücksichtigt. An diesen Stellen findet eine äusserliche mechanische Wirkung statt, welche man erst als verbrauchte Arbeit von der Gesammtwirkung abziehen muss, um den Theil zu erhalten, welcher wirklich innerhalb des betrachteten Körpersystems in Wärme verwandelt wird.

Was die Grösse dieses Arbeitsverbrauches und seinen Einfluss auf die Wärmeentwickelung anbetrifft, so kann ich in dieser

---

1) Pogg. Ann. Bd. 48, S. 298. — 2) Ueber die Erhaltung der Kraft, S. 44. — 3) Pogg. Ann. Bd. 48, S. 297.

Beziehung zunächst wieder eine Bestätigung der Theorie durch das Experiment anführen. Es ist nämlich im Voraus klar, dass der Arbeitsverbrauch von dem Widerstande, welchen die nichtleitende Schicht der Durchbrechung entgegensetzt, abhängt, und dass er daher bedeutender sein wird, wenn die Enden des Schliessungsbogens durch einen nichtleitenden festen Körper getrennt sind, als wenn sich bloss Luft zwischen ihnen befindet. Daraus folgt, dass im ersteren Falle ein an einer anderen Stelle des Schliessungsbogens befindliches electrisches Luftthermometer weniger erwärmt werden muss, als im letzteren, und so hat es sich auch bei einer von Riess ausgeführten Versuchsreihe[1]) in der That ergeben.

An der Unterbrechungsstelle standen sich entweder zwei kleine Scheiben, oder zwei Kugeln, oder zwei Spitzen gegenüber, jedesmal in einer Entfernung von 0,2 Linien. Zwischen diesen waren nach einander die in der ersten Columne der nachstehenden Tabelle genannten Körper eingeschaltet, und dabei wurden unter sonst gleichen Umständen in dem Luftthermometer die in den folgenden Columnen angeführten Erwärmungen beobachtet. Wo Riess mehrere Zahlen giebt, habe ich die Mittelzahl genommen.

Eingeschaltete Körper.	Erwärmungen im Luftthermometer, je nachdem der Funke		
	zwischen den Scheiben	zwischen den Kugeln	zwischen den Spitzen
	übersprang.		
Luftschicht	15·9	15·4	15·1
ein Kartenblatt	11·7	12·0	11·6
zwei Kartenblätter mit zwischengelegtem Stanniol	9·7	9·3	—
zwei Kartenblätter	8·0	8·8	10·4
Glimmerblatt	6·8	4·7	4·8

[1]) Pogg. Ann. Bd. 43, S. 82.

In dieser Tabelle tritt der Einfluss der Festigkeit des eingeschalteten Körpers, welcher vom Funken durchbrochen werden muss, sehr deutlich hervor. Nur der Fall, wo zwei Kartenblätter mit zwischengelegtem Stanniol angewandt wurden, könnte auf den ersten Blick eine Ausnahme zu bilden scheinen, indem diese drei Körper eine geringere Wirkung ausübten als die beiden Kartenblätter allein. Hiernach muss man annehmen, dass durch das Stanniolblatt, obwohl es mit durchbrochen wurde, doch der Arbeitsverbrauch nicht vermehrt, sondern vermindert wurde, was einen Widersinn zu enthalten scheint. Ich glaube indessen, dass man diese Annahme nicht als widersinnig zu betrachten braucht, denn es kommt bei dem Arbeitsverbrauch nicht bloss darauf an, welche Körper durchbrochen werden, sondern auch, wie sie durchbrochen werden, und die Art der Durchbrechung wird durch den zwischen den Kartenblättern eingeschalteten leitenden Körper jedenfalls geändert. Aus der grossen Verschiedenheit der übrigen in der Tabelle befindlichen Zahlen ersieht man, wie bedeutend die durch den Funken verbrauchte Arbeit unter erschwerenden Umständen werden kann. Ein genaues Maass dieser Arbeit möchte sich jedoch hieraus noch nicht ableiten lassen, und ein solches besitzen wir meiner Ansicht nach bis jetzt überhaupt noch nicht, selbst für den einfachsten und wichtigsten Fall, wo der Funke nur durch Luft überspringt.

Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man vielleicht glauben, diese Arbeit müsse bei gleicher Dichtigkeit der Luft einfach der Dicke der durchbrochenen Luftschicht proportional sein. Wenn man jedoch bei unverändertem Abstande der Körper, zwischen denen der Funke überspringen muss, die Ladung der Batterie oder die Beschaffenheit des Schliessungsbogens ändert, so treten in der Natur der Funken so grosse, schon äusserlich an der verschiedenen Stärke des Lichtes und Knalles erkennbare Unterschiede ein, dass man diese Funken in Bezug auf die von ihnen verbrauchte Arbeit unmöglich als gleich betrachten kann.

Ferner könnte man vielleicht aus einigen von Riess mitgetheilten Beobachtungen[1]) den Schluss ziehen wollen, die von einem durch die Luft überspringenden Funken verbrauchte Arbeit sei überhaupt so gering, dass man sie vernachlässigen könne. Riess hat nämlich mit den vorher

[1]) Pogg. Ann. Bd. 43, S. 78.

erwähnten kleinen Scheiben und Kugeln die Versuche auch so angestellt, dass er sie zuerst in Berührung und dann in verschiedene Entfernungen brachte, so dass die Electricität im ersteren Falle ohne und in den letzteren Fällen mit Funken überging, und für jeden dieser Fälle hat er die in dem Schliessungsbogen unter sonst gleichen Umständen erregte Wärme beobachtet. Dabei zeigte sich diese Wärme bei der Entfernung im Allgemeinen nur wenig geringer, als bei der Berührung, und in einzelnen Fällen sogar etwas grösser. Ich glaube indessen, dass diese Beobachtungen zu dem obigen Schlusse noch nicht berechtigen.

Wir müssen nämlich ausser demjenigen Funken, welcher durch die Entfernung der Scheiben oder Kugeln willkürlich hervorgerufen wurde, auch jene anderen betrachten, welche an sich schon mit dem Entladungsverfahren verbunden waren. Riess bewirkte die Entladungen, um sie so regelmässig wie möglich zu machen, durch einen eigens dazu construirten Apparat [1]), welcher so eingerichtet war, dass jedesmal zwei Funken übersprangen. Nun ergiebt sich aus anderen Versuchen von Riess [2]), dass durch eine im Schliessungsbogen angebrachte Unterbrechung die Schlagweite an einer anderen Stelle vermindert wird, und folglich müssen auch im vorliegenden Falle zugleich mit der Hervorbringung des einen neuen Funkens zwischen den Scheiben oder Kugeln die beiden anderen Funken im Entladungsapparate verkürzt sein, woraus man auf eine theilweise Compensation des Arbeitsverbrauches schliessen kann. In manchen Fällen waren die beiden letzteren Funken sogar ganz verschwunden, indem „die Entladung erst bei der Berührung der Kugeln des Entladungsapparates eintrat“ [3]). Es war also Ein Funke neu hinzugekommen, und dafür waren zwei früher vorhandene Funken fortgefallen, was eine Verminderung des Arbeitsverbrauches, und dem entsprechend eine Vermehrung der Wärmeerzeugung erwarten lässt; und in der That waren es gerade diese Fälle, in denen Riess eine erhöhte Wärme im Schliessungsbogen beobachtete. Man sieht also, dass es zur Erklärung dieser Erscheinungen nicht nothwendig ist, die Annahme zu machen, dass die Grösse des Arbeitsverbrauches bei einem Funken sehr klein sei, und überhaupt scheinen mir die Versuche noch keinen sicheren Schluss über diese Grösse zu gestatten.

---

1) Pogg. Ann. Bd. 40, S. 339. — 2) Pogg. Ann. Bd. 53, S. 11.
3) Pogg. Ann. Bd. 43, S. 79.

Wenn es somit wegen der in der Gesammtwirkung vorkommenden unbekannten Grössen unmöglich ist, eine quantitativ genaue Uebereinstimmung der Gleichung (33) mit dem Hauptsatze nachzuweisen, so könnte man vielleicht umgekehrt versuchen, durch die Annahme beider, und ihre Verbindung mit einander, jene unbekannten Grössen, oder wenigstens die Summe derselben zu bestimmen, und dazu scheint die Form der von Riess aufgestellten Gleichung (33) allerdings einzuladen. Dabei muss man aber bedenken, dass man dieser Gleichung selbst, als einer empirischen Gleichung, keine absolute Genauigkeit zuschreiben darf, wie es auch die von Riess angeführten Zahlen zeigen. Er hat nämlich in zwei Versuchsreihen in den Schliessungsbogen Drähte von verschiedener Länge und Dicke eingeschaltet, wodurch sich in dem Ausdrucke auf der rechten Seite der Gleichung (33) nur die im Nenner befindliche Grösse l änderte, und hat dann jedesmal aus der beobachteten Erwärmung die Constante b bestimmt. Die so gefundenen Werthe weichen in der ersten Reihe zwischen 0,01358 und 0,01101 und in der zweiten zwischen 0,00000926 und 0,00000840[1]) von einander ab, und wenn diese Differenzen bei der grossen Verschiedenheit der eingeschalteten Drähte und bei der Schwierigkeit der Versuche auch nicht als bedeutend gelten können, so scheinen sie doch deshalb einige Beachtung zu verdienen, weil sich in ihnen eine gewisse Regelmässigkeit zeigt. In beiden Reihen werden nämlich mit wachsender reducirter Länge l des Drahtes die entsprechenden Werthe von b im Allgemeinen kleiner.

§. 7. Vergleichung unter Annahme verschiedener Ladungen.

Wir wenden uns nun zu dem zweiten Vergleichspuncte zwischen der Theorie und der Erfahrung, nämlich zu dem Falle, wo der Schliessungsbogen derselbe bleibt, aber die Grösse der Batterie und der darauf angehäuften Electricitätsmenge geändert wird.

Auch hier tritt uns der eben besprochene Uebelstand wieder entgegen. Da wir nämlich einen Theil der Entladungswirkungen

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 43, S. 68 und 73. Der grosse Unterschied zwischen den Zahlen der ersten und zweiten Reihe beruht auf einer verschiedenen Wahl der Einheiten.

nicht kennen, so können wir auch nicht angeben, wie derselbe sich mit der Grösse der Batterie und der Electricitätsmenge ändert, und können daher aus der an Einer Stelle des Schliessungsbogens beobachteten Wirkung noch nicht mit Sicherheit auf die Gesammtwirkung schliessen. Nur in Bezug auf die in den continuirlichen Theilen des Schliessungsbogens erzeugte Wärme können wir als sicher voraussetzen, dass jede in Einem Theile beobachtete Veränderung auch in den übrigen Theilen proportional stattfindet.

Wenn nun aber der Schliessungsbogen eine grosse reducirte Länge hat, so darf man wohl annehmen, dass der grösste Theil der Gesammtwirkung zu seiner Erwärmung verwendet wird, und in diesem Falle werden also, wenn die übrigen Wirkungen auch von jener Proportionalität abweichen sollten, die dadurch entstehenden Differenzen verhältnissmässig gering sein, so dass man ohne bedeutende Ungenauigkeit die an irgend einer Stelle beobachteten Erwärmungen den entsprechenden Gesammtwirkungen proportional setzen kann.

Nun lässt sich aber die Gesammtwirkung einer vollständigen Entladung nach Gleichung (12) durch den Ausdruck

$$\frac{M^2}{S}\, Const.$$

darstellen, und dieses ist gerade der Ausdruck, welchen Riess für die Erwärmung im Schliessungsbogen experimentell gefunden hat, indem die Gleichung (33) vollständig lautet[1]):

$$C = \frac{a l'}{1 + b l} \cdot \frac{M^2}{S}, \tag{33a}$$

worin a eine Constante ist[2]).

§. 8. Unvollständige Entladung.

Die bisher betrachteten Fälle bezogen sich auf die vollständige Entladung. Wir wollen nun den Fall der unvollständigen Entladung betrachten.

---

1) Pogg. Ann. Bd. 45, S. 23.

2) Diese Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung wird auch schon von Helmholtz angeführt (seine Schrift S. 43), doch ist mir die Entwicklung seiner Formel nicht ganz verständlich, indem er darin eine Grösse einführt, welche er Ableitungsgrösse nennt, und von welcher er sagt, dass sie der Fläche der Batteriebelegung proportional sei, ohne jedoch ihre Bedeutung oder den Grund dieser Proportionalität näher anzugeben.

Auch in dieser Beziehung besitzen wir messende Versuche von Riess[1]), welcher eine geladene Batterie dadurch theilweise entlud, dass er ihre beiden Belegungen mit den entsprechenden Belegungen einer anderen ungeladenen Batterie in Verbindung setzte, so dass die vorher auf der einen Batterie angehäuften Electricitäten sich nun über beide verbreiteten. Er änderte die Versuche dadurch ab, dass er beide Batterien von verschiedener Flaschenzahl nahm, und beobachtete jedesmal die Erwärmung in einem oder in beiden Verbindungsbogen. Die Flaschen jeder Batterie waren natürlich unter sich gleich, aber leider waren nicht auch die Flaschen der einen gleich denen der anderen. Als Resultat giebt er an, dass die nachfolgende „Formel sich allen beobachteten Erwärmungen an einer constanten Stelle sowohl des inneren als des äusseren Schliessungsbogens vollkommen angeschlossen" [2]) habe:

$$C = \frac{aM^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{s'}{s}\right) ns}, \tag{34}$$

wobei ich nur zur leichteren Vergleichung mit meinen sonstigen Formeln die Buchstaben etwas anders gewählt habe, als Riess. Es bedeutet nämlich C die beobachtete Wärme, M die angewandte Electricitätsmenge, s den Flächenraum der inneren Belegung einer Flasche der ersten Batterie und n die Anzahl dieser Flaschen, s' und n' dieselben Grössen für die andere Batterie, und endlich a eine Constante, welche für den inneren Schliessungsbogen etwas grösser genommen werden musste, als für den äusseren, was sich daraus erklären lässt, dass sich auf der inneren Belegung etwas mehr Electricität befand, als auf der äusseren.

Wir wollen nun diese Erwärmung mit der Zunahme des Potentials vergleichen.

Aus der Gleichung (12) ergiebt sich für das Potential der ersten Batterie vor der Entladung, wenn man die Electricitätsmenge mit M bezeichnet, und für den ganzen Flächenraum S seinen Werth ns setzt, der Ausdruck:

$$W = \frac{k}{2} \cdot \frac{M^2}{ns}. \tag{35}$$

Um nun zu bestimmen, wie sich die ganze Electricitätsmenge M

[1]) Pogg. Ann. Bd. 80, S. 214. — [2]) A. a. O. S. 217.

bei der Entladung über beide Batterien vertheilt, kennt man die Bedingung, dass auf den verbundenen Belegungen die Potentialfunctionen gleich sein müssen. Seien nach der Entladung F_1 und F_1' die Potentialfunctionen auf den inneren Belegungen, und M_1 und M_1' die gesuchten, auf ihnen befindlichen Electricitätsmengen, so hat man nach (10):

$$F_1 = k \frac{M_1}{ns}$$

$$F_1' = k' \frac{M_1'}{n' s'},$$

worin k' dieselbe Grösse für die Flaschen der zweiten Batterie ist, wie k für die der ersten. Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, und bedenkt, dass:

$$M_1 + M_1' = M$$

sein muss, so erhält man:

$$(36) \quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{\dfrac{ns}{k}}{\dfrac{ns}{k} + \dfrac{n's'}{k'}} M \\ M_1' = \dfrac{\dfrac{n's'}{k'}}{\dfrac{ns}{k} + \dfrac{n's'}{k'}} M. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich weiter, wenn W_1 das Gesammtpotential beider Batterien nach der Entladung ist:

$$(37) \qquad W_1 = \tfrac{1}{2} (M_1 F_1 + M_1' F_1') = \frac{\tfrac{1}{2} M^2}{\dfrac{ns}{k} + \dfrac{n's'}{k'}}$$

und somit erhält man als Abnahme des Potentials:

$$(38) \qquad W - W_1 = \frac{\dfrac{1}{2} \dfrac{k^2}{k'} \cdot \dfrac{s'}{s} \cdot M^2}{\left(\dfrac{n}{n'} + \dfrac{k}{k'} \cdot \dfrac{s'}{s}\right) ns}.$$

Die Grösse $\frac{1}{2} \frac{k^2}{k'} \cdot \frac{s'}{s}$ ist für die ganze Versuchsreihe constant, und man kann also schreiben:

$$(39) \qquad W - W_1 = \frac{A \, . \, M^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{k}{k'} \cdot \frac{s'}{s}\right) n s} .$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem von Riess für die Erwärmung gegebenen (34), so zeigt sich, dass man, um beide einander proportional zu machen, nur anzunehmen braucht, dass in den Flaschen beider Batterien, obwohl sie nicht gleich waren, doch die Grössen k und k' nahe denselben Werth hatten, und diese Annahme wird noch insbesondere dadurch gerechtfertigt, dass Riess weiterhin [1]) anführt, er habe durch directe Messungen gefunden, dass bei der Verbindung die Electricität sich über beide Batterien nach dem Verhältnisse der Oberflächen vertheilte, was nach den Gleichungen (36) nur dann der Fall sein konnte, wenn $k = k'$ war [2]).

Riess änderte die Versuche auch dadurch ab, dass er den Schliessungsbogen verlängerte, und beobachtete die dabei stattfindende Abnahme der Wärme an einer bestimmten Stelle. Die Resultate dieser Beobachtungen stimmen im Allgemeinen mit den schon oben besprochenen überein, und wir wollen sie daher hier übergehen und ebenso einige andere in demselben Aufsatze noch angeführte Versuche.

---

[1]) A. a. O. S. 220.

[2]) Da die Grössen k und k' dem Obigen nach von den Glasdicken beider Batterien abhängen, so schien es mir von Interesse zu sein, diese Dicken kennen zu lernen, und ich habe daher, während der Aufsatz, in welchem ich diese Entwickelungen gemacht hatte, schon in Pogg. Ann. gedruckt wurde, noch Hrn. Riess ersucht, eine Messung derselben anzustellen, worauf er so gut gewesen ist, mir folgende Mittheilung zu machen. In den kleinen Flaschen (denen der zweiten Batterie) variirt die Glasdicke bedeutend und ist im Mittel $1\frac{1}{2}$ pariser Linien. Die grossen Flaschen (die der ersten Batterie) hat er nicht selbst messen können, da sie oben geschlossen sind, und er hat dafür zwei überzählige Flaschen derselben Art, die zur Vorsicht mit den im Gebrauch befindlichen zu gleicher Zeit angefertigt worden sind, gemessen; das Glas ist in diesen nahe gleich und $1\frac{1}{3}$ Linien dick. Da eine absolute Gleichheit der Glasdicken unter den von Hrn. Riess angeführten Umständen nicht zu erwarten war, und auch durch die angenommene Gleichheit der Grössen k und k' nicht nothwendig bedingt ist, indem die letzteren ausser von der Glasdicke auch von der Natur des Glases und in einem gewissen, obwohl nur untergeordneten Grade von der Gestalt und Grösse der Flaschen abhängen, so glaube ich, dass man die Uebereinstimmung der Zahlen $1\frac{1}{2}$ und $1\frac{1}{3}$ als genügend betrachten kann.

§. 9. Gleichungen für die Cascadenbatterie.

Es möge nun noch die Franklin'sche sogenannte Cascadenbatterie oder Flaschensäule betrachtet werden. Sie besteht bekanntlich aus einer Anzahl einzelner Flaschen oder ganzer Batterien, welche isolirt und dann so unter einander verbunden sind, dass die äussere Belegung der ersten mit der inneren der zweiten, die äussere der zweiten mit der inneren der dritten u. s. f. in leitendem Zusammenhange stehen. Nur die innere Belegung der ersten und die äussere der letzten Batterie sind frei, und diese werden bei der Ladung wie die innere und äussere Belegung einer einzelnen Batterie behandelt.

Nachdem diese Ladung stattgefunden hat, mögen die Electricitätsmengen, welche sich auf den beiden Belegungen der einzelnen Batterien befinden, und die entsprechenden Potentialniveaux der Reihe nach mit

$$(40)\qquad \begin{cases} M_1,\, N_1;\quad M_2,\, N_2;\quad M_3,\, N_3 \text{ etc.} \\ F_1,\, G_1;\quad F_2,\, G_2;\quad F_3,\, G_3 \text{ etc.} \end{cases}$$

bezeichnet werden. Da nun, wenn der inneren Belegung der ersten Batterie von einem Conductor positive Electricität zugeführt wird, die äussere Belegung dieser Batterie ihre negative Electricität nur von der inneren der zweiten erhalten kann, und diese dadurch positiv geladen wird, so hat man:

$$N_1 = -M_2;$$

und da ferner zwei Körper, welche leitend mit einander verbunden sind, gleiche Potentialniveaux haben müssen, so hat man für dieselben beiden Belegungen:

$$G_1 = F_2,$$

und zwei eben solche Gleichungen gelten für jedes andere Paar verbundener Belegungen, so dass folgende Reihe von Gleichungen gegeben ist:

$$(41)\qquad \begin{cases} N_1 = -M_2;\quad N_2 = -M_3;\quad N_3 = -M_4 \text{ etc.} \\ G_1 = F_2;\quad G_2 = F_3;\quad G_3 = F_4 \text{ etc.} \end{cases}$$

Ausserdem stehen für jede Batterie die Grössen M, N, F und G in solcher Beziehung zu einander, dass durch je zwei derselben die beiden anderen bestimmt sind. Man kann nämlich gemäss

den Gleichungen (51) des vorigen Abschnittes für eine aus n gleichen Flaschen bestehende Batterie setzen:

$$(42)\quad \begin{cases} M = n\frac{s}{k}(F - G) + n\alpha G \\ N = n\left(\frac{s}{k} - \alpha\right)(G - F) + n\beta G. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungssysteme (41) und (42) kann man, sobald zwei der Grössen (40) gegeben sind, die übrigen bestimmen, und daraus dann weiter auch das Potential der gesammten Electricität auf sich selbst berechnen.

Zur Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung besitzen wir messende Versuche von Dove[1]) und Riess[2]). Die von ihnen angestellten Versuche bestehen bei beiden aus zwei verschiedenen Reihen. Bei der ersten war die Flaschenzahl in allen verbundenen Batterien gleich, aber die Anzahl der angewandten Batterien wurde geändert; bei der zweiten dagegen blieb die Anzahl der angewandten Batterien dieselbe, nämlich immer nur zwei, aber in jeder dieser Batterien wurde die Flaschenzahl geändert.

§. 10. Cascadenbatterie aus zwei ungleichen Elementen.

Wir wollen zunächst die zweite der genannten Versuchsreihen betrachten und mit der Theorie vergleichen.

Die Anordnung der Versuche war so getroffen, dass beide als Elemente der Cascadenbatterie dienende Batterien isolirt, und die innere Belegung der ersten mit dem Conductor der Electrisirmaschine, die äussere der zweiten mit einer Lane'schen Maassflasche verbunden waren. Demnach war durch die Anzahl der Funken der Maassflasche die Electricitätsmenge der zweiten äusseren Belegung gegeben, und zugleich kann man das Potentialniveau dieser Belegung nach dem Ueberspringen jedes Funkens der Maassflasche gleich Null setzen, wobei nur die Potentialfunction des jedesmal in der Maassflasche bleibenden Rückstandes vernachlässigt ist.

Es sind also, wie oben gefordert wurde, zwei von den Grössen (40) bekannt, und um aus diesen die übrigen abzuleiten, kann

[1]) Pogg. Ann. Bd. 72, S. 406. — [2]) Pogg. Ann. Bd. 80, S. 349.

man von der zweiten äusseren Belegung nach einander zur zweiten inneren, zur ersten äusseren und endlich zur ersten inneren fortschreiten. Man erhält auf diese Weise, wenn man die durch die Maassflasche gemessene Electricitätsmenge mit $-Q$ und die Flaschenzahlen der beiden Batterien mit n_1 und n_2 bezeichnet, und alle Flaschen als gleich voraussetzt, unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnungen in Bezug auf k, folgende Reihe von Gleichungen:

$$G_2 = 0$$
$$N_2 = -Q$$
$$F_2 = \left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) \frac{k}{n_2 s} Q$$
$$M_2 = \left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) Q$$
$$G_1 = \left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) \frac{k}{n_2 s} Q$$
$$N_1 = -\left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) Q$$
$$F_1 = \left\{1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2}\left[2\alpha + (\alpha + \beta)\frac{n_1}{n_2}\right]\frac{k}{s}\right\}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{k}{s} Q$$
$$M_1 = \left\{1 + \left[2\alpha + (\alpha + \beta)\frac{n_1}{n_2}\right]\frac{k}{s}\right\} Q.$$

Bildet man nun zur Bestimmung des Potentials der ganzen zusammengesetzten Batterie die Gleichung:

$$W = \tfrac{1}{2}(F_1 M_1 + G_1 N_1 + F_2 M_2 + G_2 N_2),$$

und setzt darin die vorstehenden Ausdrücke ein, so erhält man:

$$(43)\quad W = \left\{1 + \frac{n_1 + 2n_2}{n_1 + n_2}\left[2\alpha + (\alpha + \beta)\frac{n_1}{n_2}\right]\frac{k}{s}\right\}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{k}{2s} Q^2.$$

Will man sich mit einem geringeren Grade von Genauigkeit begnügen, und eine Grösse, welche im Verhältnisse zum Ganzen von der Ordnung k ist, vernachlässigen, so kann man schreiben:

$$(43\,a)\qquad W = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{k}{2s} Q^2.$$

Da nach der Entladung das Potential Null ist, so ist W die bei der Entladung stattfindende Abnahme des Potentials, und wenn wir wieder, wie früher, annehmen, dass unter sonst gleichen Umständen die Erwärmung an einer einzelnen Stelle des

Schliessungsbogens der Gesammtwirkung proportional sei, so können wir schreiben:

$$C = A\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{Q^2}{2s}, \tag{44}$$

worin C die erzeugte Wärme und A eine Constante ist.

Vergleichen wir diese Formel mit den Beobachtungsresultaten, so finden wir zunächst die Proportionalität der erzeugten Wärme mit dem Quadrate der angewandten Electricitätsmenge auch hier, wie in allen anderen Fällen, bestätigt. Was aber die Abhängigkeit der Wärme von den Flaschenzahlen n_1 und n_2 betrifft, so giebt Dove dafür eine andere Formel. Bezeichnen wir nämlich die ganzen Flächenräume der Belegungen der beiden Batterien, also $n_1 s$ und $n_2 s$, mit S_1 und S_2, so geht (44) über in:

$$C = A\cdot\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\frac{Q^2}{2}, \tag{45}$$

und statt dessen giebt Dove die Formel:

$$C = A\cdot\frac{Q^2}{\sqrt{S_1 \,.\, S_2}} \tag{46}$$ [1].

Die von ihm mitgetheilten Versuchsresultate schliessen sich auch sehr gut seiner Formel an, dagegen stimmen die späteren Versuche von Riess besser mit der meinigen, wie die nachstehenden Tabellen zeigen.

Es wurde nämlich von beiden Beobachtern [2]) ein Mal n_2 constant gelassen und n_1 so geändert, dass nach einander

$$n_1 = n_2, = 2n_2, = 3n_2 \text{ und } = 4n_2$$

war; ein anderes Mal wurde n_1 constant gelassen und n_2 so geändert, dass nach einander

$$n_2 = n_1, = 2n_1, = 3n_1 \text{ und } = 4n_1$$

war. Um die Resultate besser vergleichen zu können, habe ich in beiden Fällen die Erwärmung, welche bei dem ersten Versuche, wo $n_1 = n_2$ war, beobachtet wurde, als Einheit genommen, und darauf die übrigen Erwärmungen reducirt. Bei Riess, welcher jedesmal zwei Beobachtungswerthe anführt, habe ich die Mittelzahlen genommen.

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 72, S. 419.

[2]) Pogg. Ann. Bd. 72, S. 417 und Bd. 80, S. 356.

(I.) n_1 veränderlich, n_2 constant.

n_1	Erwärmungen			
	berechnet		beobachtet	
	nach Dove's Formel.	nach Formel (45).	von Dove.	von Riess.
n_2	1	1	1	1
$2n_2$	0·71	0·75	0·72	0·76
$3n_2$	0·58	0·67	0·59	0·69
$4n_2$	0·50	0·63	0·51	0·66

(II.) n_2 veränderlich, n_1 constant.

n_2	Erwärmungen			
	berechnet		beobachtet	
	nach Dove's Formel.	nach Formel (45).	von Dove.	von Riess.
n_1	1	1	1	1
$2n_1$	0·71	0·75	0·71	0·78
$3n_1$	0·58	0·67	0·60	0·72
$4n_1$	0·50	0·63	0·50	0·68

Man sieht, dass in der ersten Tabelle zwischen den Zahlen der dritten und fünften Columne eine genügende Uebereinstimmung stattfindet. In der zweiten Tabelle sind die Differenzen allerdings etwas bedeutender, wenn man aber bedenkt, wie schwierig es sein würde, die in der theoretischen Formel vorausgesetzten Bedingungen, besonders die der vollkommenen Isolation, genau zu erfüllen, und dass auch selbst für diesen Fall die Formel nur als eine angenähert richtige aufgestellt ist, so wird man auch diese Differenzen nicht für die Theorie bedenklich finden, und dabei muss noch bemerkt werden, dass alle Zahlen der fünften Co-

lumne grösser sind, als die Ergebnisse meiner Formel, während sie, um sich der Dove'schen Formel zu nähern, kleiner sein müssten.

§. 11. Cascadenbatterie aus mehreren gleichen Elementen.

Wir wenden uns nun zu der anderen oben erwähnten Reihe von Versuchen, bei welcher die zur Cascadenbatterie verbundenen Elemente (einzelne Flaschen oder aus einigen Flaschen bestehende Batterien), unter einander gleich waren, ihre Anzahl aber verschieden genommen wurde. Dove und Riess wandten drei oder vier gleiche Flaschen oder Batterien als Elemente an, welche bei der Ladung immer alle zu einer Cascadenbatterie vereinigt waren, während die Entladung entweder an der ersten allein, oder an den beiden ersten zusammen, oder an den drei ersten zusammen etc. vorgenommen wurde. Bei jeder Entladung wurde die Erwärmung im Schliessungsbogen beobachtet.

Um für eine aus beliebig vielen gleichen Elementen bestehende Cascadenbatterie die Potentialniveaux aller einzelnen Belegungen und die auf ihnen befindlichen Electricitätsmengen zu bestimmen, wenn zwei dieser Grössen gegeben sind, können wir wieder die Gleichungssysteme (41) und (42) anwenden. Wir wollen uns aber jetzt bei dieser Bestimmung mit dem geringeren Grade von Genauigkeit begnügen, welchen man erhält, wenn man bei jeder der Grössen nur das erste Glied berücksichtigt. Dann sind die Electricitätsmengen auf allen Belegungen den absoluten Werthen nach als gleich zu betrachten, und sie lassen sich daher, wenn wir die auf der letzten äusseren Belegung befindliche Electricitätsmenge wieder mit $-Q$ bezeichnen, von dieser anfangend der Reihe nach durch $-Q, +Q, -Q, +Q$ etc. darstellen. Für die Potentialniveaux erhalten wir, wenn das Potentialniveau der letzten äusseren Belegung gleich Null ist, von diesem anfangend der Reihe nach folgende Werthe:

$$0,\ k\frac{Q}{S},\ k\frac{Q}{S},\ 2k\frac{Q}{S},\ 2k\frac{Q}{S},\ 3k\frac{Q}{S} \text{ etc.}$$

Was nun das Potential der gesammten Electricität auf sich selbst für eine Cascadenbatterie von irgend einer Anzahl von Ele-

menten anbetrifft, so ist zu bemerken, dass bei dem Grade von Genauigkeit, mit welchem wir uns begnügt haben, die Potentiale der einzelnen als Elemente angewandten Flaschen oder Batterien alle unter einander gleich sind, indem jedes durch $\frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S}$ dargestellt wird. Wendet man also bloss Ein Element, oder eine Verbindung von zwei, drei etc. Elementen an, so erhält man als Potentiale die Werthe:

$$\frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S}, \quad 2\,\frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S}, \quad 3\,\frac{k}{2} \cdot \frac{Q^2}{S} \text{ etc.}$$

Diese im Verhältnisse der ganzen Zahlen 1, 2, 3 etc. fortschreitenden Werthe sind es, welche bei den von Dove und Riess nach einander vorgenommenen Entladungen die von den electrischen Kräften geleisteten Arbeitsgrössen darstellen, und mit ihnen müssen daher die beobachteten Erwärmungen verglichen werden.

Dabei darf man aber in dieser Versuchsreihe nicht eine so nahe Uebereinstimmung erwarten, wie in der vorher besprochenen, indem bei diesen Versuchen einige Uebelstände hervortreten, welche zwar auch bei den anderen nicht ganz fehlten, aber doch dort nicht so einflussreich sein konnten, als hier. Darunter ist besonders der hervorzuheben, dass durch jede bei der Entladung neu hinzugenommene Batterie auch der Schliessungsbogen verlängert wird. In der vorher betrachteten Versuchsreihe wurden nämlich bei der Vermehrung der Flaschen einer Batterie die neuen Flaschen neben den schon vorhandenen eingeschaltet, und wenn daher auch durch sie und ihre Verbindungsdrähte das unter der Einwirkung der electrischen Entladung stehende Körpersystem vergrössert wurde, so war diese Vergrösserung doch nicht als eine für sich bestehende Verlängerung des Schliessungsbogens zu rechnen, und ich habe deshalb diesen Umstand vorher unberücksichtigt gelassen, ebenso wie den ähnlichen früher bei der Vermehrung der Flaschen einer einzelnen Batterie. Bei der jetzt betrachteten Versuchsreihe dagegen ist jede neu hinzugenommene Batterie hinter den anderen eingeschaltet, so dass der zu ihr führende Zwischendraht und ihre beiden Belegungen selbständige Theile des Schliessungsbogens bilden.

Hieraus folgt, dass die Annahme, welche wir früher bei gleichbleibendem Schliessungsbogen gemacht haben, dass die Wärmeerregung an einer einzelnen Stelle der Gesammtwirkung propor-

tional sei, auf den Fall, wo die letztere durch Vermehrung der Elemente einer Cascadenbatterie vergrössert wird, nicht als gleich nahe richtig angewandt werden darf, sondern dass in diesem Falle das Verhältniss der beobachteten Wärmeerregungen ein etwas geringeres sein muss. Da sich nun aus den obigen Gleichungen die Gesammtwirkung oder die Abnahme des Potentials der Anzahl der zusammen entladenen Elemente proportional ergiebt, so muss man von einem in dem Schliessungsbogen befindlichen electrischen Thermometer bei stufenweiser Vermehrung der Elemente Anzeigen erwarten, die etwas hinter den auf einander folgenden ganzen Zahlen zurückbleiben.

In den von Dove[1]) mitgetheilten Versuchen tritt dieser Unterschied zwar nicht hervor, indem er bei vier Batterien für die Erwärmungen gerade die Zahlen 1, 2, 3 und 4 anführt. Die Versuche von Riess[2]) dagegen zeigen sogar eine ziemlich bedeutende Abweichung, indem bei vier Flaschen die Zahlen, statt von 1 bis 4, immer nur von 1 bis etwa 3, und bei drei Batterien, statt von 1 bis 3, nur von 1 bis 2,5 wachsen. Ein bestimmtes Gesetz lässt sich über diese Zahlenreihe natürlich nicht aufstellen, indem dieselbe sehr von der Beschaffenheit der angewandten Batterien und der Zwischenverbindungen abhängen muss.

Die Richtigkeit der im Vorigen gemachten Annahme, dass jede Verbindung je zweier Elemente als ein selbständiger Theil des Schliessungsbogens zu betrachten sei, ergiebt sich übrigens noch insbesondere daraus, dass nach den Beobachtungen beider Physiker die Erwärmung in diesen Zwischendrähten nahe ebenso stattfindet, wie im Hauptschliessungsbogen, und dass durch die Einschaltung eines schlechten Leiters in eine der Zwischenverbindungen die Erwärmung irgend einer Stelle des Hauptbogens nahe ebenso vermindert wird, als wenn jener Leiter in den Hauptbogen selbst eingeschaltet wäre.

Diesen letzteren Umstand muss man wohl berücksichtigen, wenn man sich von der bei der Vermehrung der Elemente einer Cascadenbatterie stattfindenden Zunahme der im Ganzen erzeugten Wärme Rechenschaft geben will. Hat man z. B. eine Cascadenbatterie von vier Elementen, so kommen in dieser vier getrennte Theile des Schliessungsbogens vor, der Hauptbogen, welcher die erste innere Belegung mit der letzten äusseren verbindet, und die

1) Pogg. Ann. Bd. 72, S. 408. — 2) Pogg. Ann. Bd. 80, S. 351.

drei Zwischenstücke, welche je eine äussere Belegung mit der nächsten inneren Belegung verbinden. Da man nun in jedem dieser vier Verbindungsbogen ein electrisches Luftthermometer einschalten kann, und darin jedesmal eine Wärmemenge erhält, die sich der vierfachen von derjenigen, welche ein einzelnes Element hervorbringen würde, wenigstens nähert, so könnte man vielleicht, wie es in der That geschehen ist, den Schluss ziehen, dass man bei gleichzeitiger Einschaltung von electrischen Luftthermometern in allen vier Verbindungsbogen angenähert die sechszehnfache Wärmemenge erhalten würde. Dabei ist aber zu bedenken, dass wenn nur Ein Luftthermometer, dessen Draht eine bedeutende reducirte Länge hat, eingeschaltet ist, fast die ganze Wirkung der Entladung sich in ihm concentrirt; wenn aber vier Luftthermometer eingeschaltet sind, die Wirkung sich über alle vier verbreiten und daher in jedem einzelnen entsprechend geringer werden muss. Die gesammte Wärmeerzeugung kann nicht grösser sein, als die bei der Entladung eingetretene Abnahme des Potentials, und diese ist dem Obigen nach bei einer Batterie von vier Elementen nicht sechzehnmal, sondern viermal so gross als bei einem einzelnen Elemente.

Fassen wir nun das Ergebniss aller bisher untersuchten Fälle zusammen, so sind die meisten derselben allerdings zu complicirt, um eine ganz strenge Vergleichung mit der Theorie zuzulassen; so weit aber die Vergleichung möglich war, ist sie immer zu Gunsten des Hauptsatzes ausgefallen, und mir ist auch sonst keine experimentell feststehende Thatsache bekannt, welche gegen diesen Satz spräche. Ich glaube daher, dass man denselben, sofern er dessen neben seiner theoretischen Begründung überhaupt noch bedarf, auch durch die Erfahrung als bestätigt ansehen kann.

ABSCHNITT V.

Arbeit und Wärmeerzeugung bei einem stationären electrischen Strome.

§. 1. Eigenthümlichkeit des zu betrachtenden Falles.

Im vorigen Abschnitte wurden die Wirkungen der Electricitätsbewegung in einem Falle betrachtet, welcher in einer gewissen Beziehung besonders einfach ist. Es wurde nämlich vorausgesetzt, dass sowohl der Anfangs- als auch der Endzustand der Electricität ein Ruhezustand sei. Für diesen Fall brauchte man den Verlauf der Bewegung, durch welche die Electricität aus dem einen Zustande in den anderen übergeht, gar nicht zu betrachten, sondern es genügte, das Potential der gesammten Electricität auf sich selbst für jeden der beiden Ruhezustände zu kennen, indem die während des Ueberganges von den electrischen Kräften geleistete Arbeit einfach durch die Differenz dieser beiden Potentiale dargestellt wird. Jetzt wollen wir dagegen die Electricität in der Bewegung selbst betrachten, wollen dabei aber andere vereinfachende Annahmen machen. Wir wollen die Bewegung als eine s t a t i o n ä r e voraussetzen, worunter wir eine solche verstehen, bei der der Bewegungszustand des betrachteten Systemes im Verlaufe der Zeit immer derselbe bleibt, oder wenigstens nur solche Aenderungen erleidet, deren Zeitdauer gegen die bei der Beobachtung in Betracht kommenden Zeiten so klein ist, dass man es bei der Beobachtung nur mit einem mittleren Bewegungszustande zu thun hat, welcher unveränderlich ist. Eine

solche stationäre Bewegung findet bei einem galvanischen und thermoelectrischen Strome statt, und mit Strömen dieser Art wollen wir uns jetzt beschäftigen. Dabei wollen wir noch eine Beschränkung einführen. Wir wollen nämlich nicht gleich den ganzen Stromkreis mit Einschluss der Stellen, wo die electromotorischen Kräfte wirken, und mit den diese Kräfte erzeugenden Vorgängen betrachten, sondern wollen die Betrachtung auf ein solches Leiterstück beschränken, in welchem keine electromotorische Kraft ihren Sitz hat, und welches durch den Strom keinerlei chemische oder mechanische Veränderungen erleidet. Auch wollen wir voraussetzen, dass keinerlei inducirende Wirkungen zwischen dem betrachteten Leiter und anderen Leitern oder Magneten stattfinden.

In diesem Falle ist die einzige Wirkung, welche der electrische Strom hervorbringt, eine Erwärmung des Leiters. Die Gesetze dieser Wärmeerzeugung sind für den einfachsten Fall, wo der Leiter ein Draht ist, empirisch von Joule [1]), Lenz [2]) und Becquerel [3]) ermittelt, welche gefunden haben, dass die während der Zeiteinheit in einem Drahte erzeugte Wärme proportional seinem Leitungswiderstande und dem Quadrate der Stromintensität ist. Es handelt sich nun darum, die in dem Leiter von den electrischen Kräften gethane Arbeit und die in Folge dessen erzeugte Wärme vom allgemeinen theoretischen Gesichtspuncte aus zu betrachten und mit den im vorigen Abschnitte betrachteten Wirkungen in Zusammenhang zu bringen.

§. 2. Das Ohm'sche Gesetz und die Kirchhoff'sche Deutung desselben.

Das Ohm'sche Gesetz, soweit es sich auf die Vorgänge innerhalb eines homogenen Leiters bezieht, lässt sich ganz allgemein in folgender Weise aussprechen. Sei $d\omega$ irgend ein Flächenelement innerhalb des Leiters, N die Normale darauf und $i\,d\omega$ die Electricitätsmenge, welche während der Zeiteinheit hindurchströmt, worin i positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem

1) Phil. Mag. S. 3, V. 19, p. 264 und Ser. 4, V. 3, p. 486.
2) Pogg. Ann. Bd. 61, S. 44.
3) Ann. de chim. et de phys. S. 3, T. 9, p. 21.

die Electricität von der in Bezug auf N negativen Seite nach der positiven oder umgekehrt strömt, so gilt die Gleichung:

$$i = -k \frac{\partial V}{\partial N}, \tag{1}$$

worin k das Leitungsvermögen des Körpers bedeutet, und V eine Function ist, welche, sobald der stationäre Zustand des Stromes eingetreten ist, nur von den Raumcoordinaten abhängt.

Es muss nämlich in jedem Puncte des durchströmten Leiters eine Kraft wirken, welche die Electricität trotz des Widerstandes, den sie fortwährend zu überwinden hat, doch in Bewegung erhält, und der negative Differential-Coëfficient $-\frac{\partial V}{\partial N}$ stellt offenbar die in die Richtung der Normale N fallende Componente dieser Kraft dar. Im Uebrigen aber war die physikalische Bedeutung der Function V früher zweifelhaft. Ohm nennt nämlich die durch diese Function dargestellte Grösse die electroskopische Kraft, und definirt sie als die Dichtigkeit der Electricität an dem betreffenden Puncte des Leiters [1]). Gegen diese Ansicht hat aber Kirchhoff [2]) mit Recht eingewandt, dass sie mit einem bekannten electrostatischen Satze geradezu im Widerspruche stehe. Nach ihr müsste nämlich die Electricität in einem Leiter in Ruhe bleiben, wenn sie durch den ganzen Rauminhalt desselben mit gleicher Dichtigkeit verbreitet wäre, während es doch hinlänglich bekannt ist, dass die getrennte (d. h. nicht mit einer gleichen Menge entgegengesetzter Electricität verbundene) Electricität eines Körpers, von welcher allein hier die Rede sein kann, da nur sie eine Kraft ausübt, im Zustande der Ruhe nur über die Oberfläche des Körpers verbreitet ist.

Dieser Einwand könnte vielleicht Misstrauen gegen die theoretische Zulässigkeit des Ohm'schen Gesetzes überhaupt einflössen, doch hat Kirchhoff selbst sogleich gezeigt, dass das Gesetz auch mit den Grundsätzen der Electrostatik sehr wohl in Einklang zu bringen ist, und welche Bedeutung man zu dem Zwecke der Function V beilegen muss.

---

[1]) Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet von Dr. G. S. Ohm, S. 95 und an anderen Stellen.

[2]) Pogg. Ann. Bd. 78, S. 506.

Wie schon gesagt, stellt $-\frac{\partial V}{\partial N}$ die in die Richtung von N fallende Componente der in dem betrachteten Puncte auf eine dort gedachte Electricitätseinheit wirkende Kraft dar, und ebenso werden natürlich auch die in die Richtungen der drei Coordinatenaxen fallenden Componenten durch $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$ und $-\frac{\partial V}{\partial z}$ dargestellt. Das deutet darauf hin, dass die Kraft von Anziehungen und Abstossungen herrührt, welche von festen Puncten ausgehen, und von denen jede ihrer Stärke nach nur von der Entfernung und nicht von der sonstigen Lage des wirksamen Punctes abhängt, wobei freilich das Gesetz dieser Abhängigkeit noch willkürlich bleibt. Aber auch dieses letztere lässt sich aus anderen Gründen schliessen, indem solche Anziehungen und Abstossungen in unserem Falle offenbar nur von der Electricität selbst ausgeübt werden können, und für deren Anziehungen und Abstossungen das Gesetz des umgekehrten Quadrates der Entfernung gilt. Daraus folgt, dass die Function V einfach als die Potentialfunction der gesammten getrennten Electricität zu betrachten ist [1]).

Hierdurch ist der oben erwähnte Widerspruch gehoben, denn bei dieser Bedeutung der Function V ist die Gleichung $V =$ const., welche in Folge von (1) ausdrückt, dass kein Strom stattfinde, dieselbe, welche auch aus der Electrostatik als Bedingungsgleichung für den Gleichgewichtszustand bekannt ist.

§. 3. Anordnung der getrennten Electricität und electrischer Zustand im Inneren des Leiters.

Aus der vorstehend angegebenen Bedeutung von V lässt sich, wie Kirchhoff gezeigt hat, leicht bestimmen, wo sich während eines stationären Stromes die getrennte Electricität befindet. Soll nämlich der Strom stationär sein, so muss die in jedem Raumelemente enthaltene Electricitätsmenge constant, und also die wäh-

---

[1]) Ich habe daher für diese Function, welche Ohm und Kirchhoff mit u bezeichnen, von vornherein den Buchstaben V gewählt, weil ich diesen in meinen sonstigen Untersuchungen für die Potentialfunction gebraucht habe.

rend irgend einer Zeit einströmende Electricitätsmenge gleich der ausströmenden sein. Betrachten wir nun ein beim Puncte (x, y, z) liegendes Element $dx\,dy\,dz$, so ist nach Gleichung (1) die während der Zeiteinheit durch die erste der beiden Flächen $dy\,dz$ in das Element einströmende Menge

$$= -k\,dy\,dz\,\frac{\partial V}{\partial x},$$

und die durch die gegenüberliegende Fläche ausströmende Menge

$$= -k\,dy\,dz\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\right),$$

also der Ueberschuss der ersteren über die letztere

$$= k\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Ebenso erhält man für das Flächenpaar $dx\,dz$ den Ueberschuss:

$$k\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

und für das Flächenpaar $dx\,dy$:

$$k\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Die Summe dieser drei Ausdrücke giebt den Ueberschuss der ganzen in das Element einströmenden Electricitätsmenge über die ausströmende, und da dieser Ueberschuss Null sein muss, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung folgt nun aber nach einem bekannten Satze über die Potentialfunction, dass der Punct (x, y, z) sich ausserhalb derjenigen Electricitätsmengen, von welchen V die Potentialfunction ist, befinden muss, und da dasselbe von allen Puncten des Leiters gilt, so folgt weiter, dass die getrennte Electricität sich überhaupt nicht innerhalb des Leiters befinden kann, und sie kann daher während eines stationären Stromes, ebenso wie im Gleichgewichtszustande, nur an der Oberfläche angehäuft sein.

Den Umstand, dass die im Inneren des Leiters strömende Electricität keine Anziehung oder Abstossung ausübt, muss man je nach der Hypothese, dass es zwei Electricitäten oder nur eine Electricität gebe, verschieden deuten. Bei der ersten Hypothese muss man annehmen, dass sich in jedem Raumelemente innerhalb

des Leiters stets gleich viel von beiden Electricitäten befinde. Bei der anderen Hypothese, bei welcher vorausgesetzt wird, dass ein Raumelement eines Körpers, wenn es eine gewisse normale Quantität von Electricität enthalte, auf ein fremdes Electricitätstheilchen keine Wirkung ausübe, indem die Abstossung der Electricität durch irgend eine andere Kraft compensirt werde, und dass erst dann eine wirksame Abstossung oder Anziehung eintrete, wenn das Raumelement zu viel oder zu wenig Electricität enthalte, muss man annehmen, dass sich während eines stationären Stromes in jedem Raumelemente innerhalb des Leiters fortwährend die normale Electricitätsmenge befinde.

Bei der ersten Hypothese, dass es zwei Electricitäten gebe, kann man aber in Bezug auf ihr Verhalten noch verschiedene Annahmen machen. Wenn man beide Electricitäten als gleich beweglich betrachtet, so muss man schliessen, dass sie sich beide mit gleichen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten bewegen. Man kann aber auch, wie es von C. Neumann geschehen ist, die Annahme machen, dass nur Eine der beiden Electricitäten, etwa die positive, in der Weise beweglich sei, dass sie im festen Leiter strömen könne, und dass die negative Electricität fest an die ponderablen Atome gebunden sei. Diese Annahme stimmt in Bezug darauf, dass der galvanische Strom nur aus einer einfachen Bewegung, nämlich der Bewegung der positiven Electricität besteht, mit jener anderen Hypothese, dass es nur Eine Electricität gebe, überein; sie ist aber im Uebrigen für die mathematische Behandlung bequemer, indem die von der ruhenden festen Electricität ausgeübten Kräfte sich in bestimmter und einfacher Weise ausdrücken lassen.

Wir wollen im Folgenden immer nur Eine Electricität als strömend annehmen. Die Gültigkeit der in diesem Abschnitte vorkommenden Schlüsse ist aber von dieser Annahme ganz unabhängig. Um alle hier vorkommenden Betrachtungen der anderen Annahme, dass beide Electricitäten gleich beweglich seien, anzupassen, braucht man immer nur statt Eines Stromes, welcher während der Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche die Electricitätsmenge Q nach Einer Richtung führt, zwei Ströme, welche die Electricitätsmengen $\frac{1}{2} Q$ und $- \frac{1}{2} Q$ nach entgegengesetzten Richtungen führen, zu substituiren, und dann dieselben Schlüsse, welche sich hier auf den einen Strom beziehen, auf beide Ströme einzeln anzuwenden.

Ferner muss noch ein anderer Umstand hier zur Sprache gebracht werden. Es sind im Vorigen bei Besprechung der Kraft, welche die bewegte Electricität erleidet, nur die gewöhnlich betrachteten Kräfte berücksichtigt, welche die Electricitätstheilchen unabhängig von ihrer Bewegung auf einander ausüben. Nun üben aber bewegte Electricitätstheilchen auch solche Kräfte auf einander aus, die nur durch ihre Bewegung entstehen, und welche wir kurz electrodynamische Kräfte nennen wollen. Es fragt sich nun, ob ein in dem Leiter sich bewegendes Electricitätstheilchen von allen übrigen bewegten Electricitätstheilchen, welche den ganzen geschlossenen Strom bilden, eine electrodynamische Kraft erleidet, welche durch ihr Hinzukommen zu der bisher besprochenen Kraft die oben erwähnten Gesetze modificirt.

In dieser Beziehung will ich zunächst als Resultat einer in einem späteren Abschnitte folgenden Untersuchung vorläufig anführen, dass die electrodynamische Kraft, welche ein bewegtes Electricitätstheilchen von einem ruhenden und constanten geschlossenen Strome erleidet, nur eine auf der Bewegungsrichtung senkrechte Richtung haben kann, und dass sie also bei der Bewegung keine Arbeit leisten kann. Demnach können wir bei der hier beabsichtigten Bestimmung der Arbeit und der damit zusammenhängenden Wärmeerzeugung von der electrodynamischen Kraft ganz absehen.

Bei der Frage aber, wo sich die getrennte Electricität befindet, und wie sie angeordnet ist, kommt allerdings die electrodynamische Kraft mit in Betracht. Man kann sich nämlich, wenn eine solche Kraft besteht, vorstellen, dass ausser derjenigen getrennten Electricität, von welcher V die Potentialfunction ist, noch andere getrennte Electricität vorhanden sei, deren Kraft der electrodynamischen Kraft das Gleichgewicht halte. Die nähere Erörterung dieses Gegenstandes würde hier, wo von der electrodynamischen Kraft noch nicht die Rede gewesen ist, nicht am Orte sein, und ich will mich daher hier darauf beschränken, durch eine gewisse Unterscheidung in der Benennungsweise anzudeuten, dass dieser Erörterung durch das hier Gesagte nicht vorgegriffen werden soll. Ich will nämlich V nicht einfach die Potentialfunction der getrennten Electricität, sondern die Potentialfunction der treibenden getrennten Electricität nennen, wodurch ausgedrückt werden soll, dass ausser dieser getrennten Electricität noch andere vorhanden sein kann, welche nicht treibend wirkt, indem die

in die Richtung der Bahn fallende Componente der von ihr ausgeübten Kraft Null ist.

§. 4. Bestimmung der im Leiter gethanen Arbeit.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Arbeit über, welche die innerhalb des Leiters wirksame Kraft bei der Bewegung der Electricität thut.

Es sei dazu irgend ein Electricitätselement dq, während es sich auf dem Wege s fortbewegt, betrachtet. Die in die Richtung der Bahn fallende Componente der auf eine Electricitätseinheit wirkenden Kraft wird für jeden Punct der Bahn durch $-\frac{\partial V}{\partial s}$, und daher die Componente der auf das Element dq wirkenden Kraft durch $-dq\cdot\frac{\partial V}{\partial s}$ dargestellt. Dabei ist zu bemerken, dass das Electricitätselement sich nach der Richtung bewegt, nach welcher die Kraft wirkt, und dass daher die in die Richtung der Bahn fallende Componente der Kraft zugleich die ganze Kraft ist. Denken wir uns nun die Bahn des Electricitätselementes dq gegeben, so können wir V einfach als Function der Bahnlänge s betrachten, und können daher statt $\frac{\partial V}{\partial s}$ auch $\frac{dV}{ds}$ schreiben, und demgemäss die obige Kraft durch $-dq\cdot\frac{dV}{ds}$ darstellen. Die bei der Bewegung um das Bahnelement ds von der Kraft gethane Arbeit ist daher

$$= -dq\cdot\frac{dV}{ds}\,ds,$$

und somit die auf der Strecke von s_0 bis s_1 gethane Arbeit

$$= -dq\int_{s_0}^{s_1}\frac{dV}{ds}\,ds = (V_0 - V_1)\,dq,$$

worin V_0 und V_1 die zu s_0 und s_1 gehörigen Werthe von V bezeichnen.

Man sieht hieraus zunächst, dass diese Arbeit durch die am Anfangs- und Endpuncte der Bahnstrecke stattfindenden Werthe der Potentialfunction vollständig bestimmt ist, ohne dass man den Weg zwischen diesen beiden Puncten zu kennen braucht. Ferner ist

das Product $V.dq$ das Potential der treibenden getrennten Electricität auf das Element dq, so dass der vorige Ausdruck die auf dem Wege von s_0 bis s_1 eingetretene Abnahme dieses Potentials darstellt, und da derselbe Ausdruck ebenso für jedes andere Electricitätselement gilt, und sich daher auch auf eine endliche Electricitätsmenge ausdehnen lässt, so erhält man folgenden Satz:

Die bei einer bestimmten Bewegung einer Electricitätsmenge von der im Leiter wirksamen Kraft gethane Arbeit ist gleich der bei der Bewegung eingetretenen Abnahme des Potentials dieser Electricitätsmenge und der treibenden getrennten Electricität auf einander.

Wir haben uns bei dieser Entwickelung die Bewegung der Electricität so vorgestellt, als ob eine bestimmte Electricitätsmenge den ganzen betrachteten Weg durchlaufe; es kann aber sein, dass die Bewegung der Electricität einen ganz anderen Charakter hat. Setzt man z. B. voraus, dass jedes Massenmolecül mit einer gewissen Menge von Electricität versehen sei, und denkt sich eine Anzahl solcher Molecüle 1, 2, 3, 4 etc. in einer Reihe hinter einander liegend, so kann die Electricitätsbewegung in der Weise stattfinden, dass eine kleine Quantität von 1 nach 2 geht, eine eben so grosse, aber andere Quantität von 2 nach 3, wieder eine eben so grosse aber andere von 3 nach 4 u. s. f. Für die Gültigkeit des vorigen Satzes ist es aber ganz gleichgültig, welche dieser beiden Arten von Bewegung man annimmt, denn der Satz fordert nur, dass alle Theile des ganzen Weges von einer gleich grossen, aber nicht, dass sie von derselben Electricitätsmenge durchlaufen werden.

Nach diesem Satze ist es nun auch leicht, die Arbeit zu bestimmen, welche in einem beliebigen Stücke eines von einem stationären Strome durchflossenen Leiters während der Zeiteinheit gethan wird.

Sei nämlich eine geschlossene Fläche gegeben, welche einen Theil des von dem Leiter erfüllten Raumes abgrenzt, so braucht man nur für jedes während der Zeiteinheit durch diesen abgegrenzten Raum hindurchströmende Electricitätstheilchen die Abnahme des Potentials zu bestimmen, oder, was dasselbe ist, es mit den am Eintritts- und Austrittspuncte stattfindenden Werthen der Potentialfunction zu multipliciren, und beide Producte von einander abzuziehen. Die Summe aller dieser Differenzen, welche die

gesuchte Arbeitsgrösse giebt, lässt sich bequem auf folgende Weise darstellen. Sei $d\omega$ ein Element der Oberfläche des abgegrenzten Raumes, und $i d\omega$ die während der Zeiteinheit durch dasselbe hindurchströmende Electricitätsmenge, welche positiv oder negativ genommen wird, je nachdem sie in den Raum hinein- oder aus ihm herausströmt, und bezeichne W die innerhalb des Raumes gethane Arbeit, so ist:

$$\text{(I.)} \qquad W = \int V i \, d\omega,$$

worin das Integral über die ganze Oberfläche genommen werden muss. Setzt man hierin nach (1):

$$i = -k \frac{\partial V}{\partial N},$$

wobei die Normale N nach Innen als positiv zu rechnen ist, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$\text{(Ia.)} \qquad W = -k \int V \frac{\partial V}{\partial N} d\omega.$$

§. 5. Bestimmung der im Leiter erzeugten Wärme.

An diese Gleichungen schliessen sich unmittelbar diejenigen an, welche die innerhalb des abgegrenzten Raumes erzeugte Wärme bestimmen.

Es muss nämlich die in demselben gethane Arbeit von einer ebenso grossen Zunahme an lebendiger Kraft begleitet sein. Die gethane Arbeit wird für unseren Fall durch die Gleichung (I.) oder (Ia.) vollständig dargestellt, da wir alle sonstigen Wirkungen, bei welchen eine Arbeit vorkommt, wie z. B. die Electrolyse, ausgeschlossen haben. Bei der lebendigen Kraft müssen wir, streng genommen, nicht nur die ponderable Masse des Leiters, sondern auch die Electricität berücksichtigen. Die Electricitätstheilchen können nämlich auf ihrem Wege durch den Raum beschleunigt oder verzögert werden, da mit der Bedingung des stationären Zustandes zwar ausgesprochen ist, dass die Geschwindigkeit an jeder Stelle des Leiters unveränderlich, aber nicht, dass sie an den verschiedenen Stellen gleich sei. Geht z. B. der Strom durch einen Leiter mit sehr verschiedenen Querschnitten, so kann sich die Electricität an den engeren Stellen schneller bewegen als an den

weiteren, ähnlich wie das Wasser eines Flusses an Stellen, wo das Flussbett beengt ist, schneller fliesst als an anderen.

Es würde sich also darum handeln, zu entscheiden, ob man der Electricität Beharrungsvermögen und daher der bewegten Electricität lebendige Kraft zuzuschreiben und wie man diese zu bestimmen hat. In dieser Beziehung ist nun zu bemerken, dass schon bei der Aufstellung des Ohm'schen Gesetzes stillschweigend eine Annahme hierüber gemacht ist. Wenn nämlich die unter (1) gegebene Gleichung

$$i = -k \frac{\partial V}{\partial N}$$

richtig ist, so hängt die an einem bestimmten Puncte stattfindende Geschwindigkeit der Electricität nach Grösse und Richtung nur von der an diesem Puncte wirksamen Kraft ab, und es muss daher das Beharrungsvermögen der Electricität entweder Null, oder doch so klein sein, dass die Kraft, welche nöthig ist, um solche Geschwindigkeitsänderungen, wie sie im Leiter vorkommen, zu bewirken, gegen die Kraft, welche zur Ueberwindung des Leitungswiderstandes nöthig ist, vernachlässigt werden kann. Demnach können wir auch bei der hier beabsichtigten Bestimmung von einer Berücksichtigung der lebendigen Kraft der Electricität absehen.

Wir haben also nur die lebendige Kraft der ponderablen Masse des Leiters zu betrachten, und da der Voraussetzung nach keine äusserlich wahrnehmbare Bewegung derselben hervorgebracht ist, so bleibt nur die Vermehrung oder Verminderung der Wärmemenge übrig. Man kann dieses kurz so aussprechen: die ganze Arbeit ist zur Ueberwindung des Leitungswiderstandes verwandt, und diese wiederum hat in ähnlicher Weise, wie die Ueberwindung einer Reibung, die Entstehung einer der Arbeit äquivalenten Wärmemenge zur Folge.

Denken wir uns nun die Wärme nach mechanischem Maasse gemessen, so ist die erzeugte Wärmemenge einfach gleich der von den electrischen Kräften gethanen Arbeit, und die für W gegebenen Formeln gelten also auch für die erzeugte Wärmemenge. Denken wir uns dagegen die Wärme nach gewöhnlichem Maasse gemessen und nennen die der Wärmeeinheit entsprechende Arbeit oder das mechanische Aequivalent der Wärme E, so haben wir, wenn wir die während der Zeiteinheit in dem abgegrenzten Raume erzeugte Wärmemenge mit H bezeichnen, zu setzen:

$$H = \frac{1}{E} W$$

und somit nach (I.) und (Ia.):

$$\text{(II.)} \qquad H = \frac{1}{E} \int V i \, d\omega$$

$$\text{(IIa.)} \qquad H = -\frac{k}{E} \int V \frac{\partial V}{\partial N} d\omega.$$

§. 6. Behandlung specieller Fälle.

Die in den Gleichungen (I.), (Ia.), (II.) und (IIa.) enthaltenen Integrale lassen in den in der Praxis vorkommenden Fällen gewöhnlich grosse Vereinfachungen zu.

Ist die Fläche, welche den betrachteten Raum abgrenzt, zum Theil zugleich die Oberfläche des Leiters, und vernachlässigen wir die geringe Electricitätsmenge, welche der Leiter während des Stromes an die umgebende Luft abgiebt, gegen die ganze ihn durchströmende Electricitätsmenge, so brauchen wir diesen Theil der Fläche bei der Integration gar nicht zu berücksichtigen. Bildet z. B., wie es gewöhnlich der Fall ist, der Leiter einen langgestreckten Körper, welcher seiner Länge nach von der Electricität durchströmt wird, und betrachten wir von ihm ein zwischen zwei Querschnitten liegendes Stück, so brauchen wir die Integration nur für die Flächen dieser beiden Querschnitte auszuführen.

Hat ferner der Leiter an der Stelle, wo sich der eine Querschnitt befindet, eine angenähert prismatische oder cylindrische Gestalt, so dass man annehmen kann, dass die Electricitätstheilchen sich hier alle unter einander und mit der Axe parallel bewegen, so muss auch die treibende Kraft hier diese Richtung haben. Legt man daher ein rechtwinkliges Coordinatensystem so, dass die Coordinatenaxe der x mit der Axe des Leiters parallel ist, so stellt $-\frac{\partial V}{\partial x}$ die ganze treibende Kraft dar, und $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ sind Null. Daraus folgt, dass wenn der Querschnitt gegen die Axe senkrecht genommen ist, innerhalb desselben V constant sein muss, und man kann also schreiben:

$$\int V i\, d\omega = V \int i\, d\omega.$$

Hierin stellt das Integral $\int i\, d\omega$, positiv oder negativ genommen, je nachdem dieser Querschnitt in Bezug auf die Richtung des Stromes der erste oder zweite ist, die ganze während der Zeiteinheit durch den Querschnitt strömende Electricitätsmenge dar, welche man gewöhnlich die Intensität des Stromes nennt, und welche wir daher mit J bezeichnen wollen, wodurch der vorige Ausdruck in

$$\pm V . J$$

übergeht. Nehmen wir nun an, dass bei dem anderen Querschnitte dieselben Bedingungen erfüllt seien, und bezeichnen die im ersten und zweiten Querschnitte geltenden Werthe von V resp. mit V_0 und V_1, so ist die innerhalb des ganzen Stückes gethane Arbeit:

$$W = (V_0 - V_1) . J, \tag{3}$$

und die erzeugte Wärme:

$$H = \frac{1}{E} (V_0 - V_1) . J. \tag{4}$$

Nun ist aber nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$J = \frac{V_0 - V_1}{l}, \tag{5}$$

worin l den Leitungswiderstand des zwischen den beiden Querschnitten liegenden Stückes bedeutet, und dadurch gehen die beiden vorigen Gleichungen über in:

$$W = l . J^2 \tag{6}$$

$$H = \frac{1}{E} l . J^2. \tag{7}$$

Die letztere dieser Gleichungen enthält die beiden Eingangs erwähnten von Joule gefundenen, und von Lenz und Becquerel bestätigten Gesetze.

Nachdem ich diese Gleichung (7), in welcher E das mechanische Aequivalent der Wärme bedeutet, in einer in Poggendorff's Annalen [1]) veröffentlichten Abhandlung so, wie es vorstehend mitgetheilt ist, nur aus dem Ohm'schen Gesetze abgeleitet hatte [2]),

[1]) Bd. 87, S. 164.

[2]) In einer von W. Thomson ausgeführten Untersuchung dieses Gegenstandes (Phil. Mag. Ser. 4, Vol. 2, p. 551) waren ausser dem Ohm'schen

hat von Quintus-Icilius dieselbe zu einer numerischen Bestimmung von E angewandt[1]). Durch eine Reihe sorgfältiger Messungen ist er zu dem Werthe 399·7 oder rund 400 Kilogrammeter gelangt, welcher in Anbetracht der grossen Schwierigkeit der dabei auszuführenden Beobachtungen hinlänglich genau mit dem von Joule durch Reibung des Wassers bestimmten Werthe 424 übereinstimmt.

§. 7. Verhalten galvanisch erwärmter Drähte in verschiedenen Gasen.

Grove hat im Jahre 1845[2]) die Beobachtung gemacht, dass, wenn man einen Draht durch einen galvanischen Strom zur Weissgluth gebracht hat und darauf ein Gefäss mit Wasserstoff darüber stülpt, dann sein Licht so plötzlich erlischt, wie es mit der Flamme einer Kerze geschehen sein würde. In einer späteren Arbeit[3]) ist er auf diesen Gegenstand noch specieller eingegangen, wobei besonders der folgende Versuch von Wichtigkeit ist. Er schaltete in den Schliessungsbogen einer Volta'schen Batterie zwei ganz gleiche Stücke Platindraht ein, welche schraubenförmig gewunden in zwei kleine Glasröhren eingeschlossen waren, deren eine Sauerstoff, die andere Wasserstoff enthielt, und legte die so vorgerichteten Röhren in zwei gleiche, mit gleichen Quantitäten Wasser versehene Gefässe, welche als Calorimeter dienten. Wurde nun die Verbindung mit der Batterie hergestellt, so dass beide Drähte von demselben Strome durchflossen wurden, so gerieth der in Sauerstoff befindliche Draht in Weissgluth, während der in Wasserstoff befindliche nicht sichtbar glühte. Zugleich stieg durch die von den Drähten abgegebene Wärme die Temperatur in den Calorimetern in verschiedenem Grade, nämlich in dem die Wasserstoffröhre umgebenden von 60° F. bis 70° und in dem die Sauerstoffröhre umgebenden von 60° bis 81°.

In ähnlicher Weise verglich Grove auch andere Gase mit dem Wasserstoff und fand dabei unter anderen folgende Zahlen,

---

Gesetze auch noch die Gesetze der electromagnetischen Induction in Anwendung gebracht.

1) Pogg. Ann. Bd. 101, S. 69. — 2) Phil. Mag. Sér. 3, Vol. 27, p. 445.
3) Phil. Mag. Ser. 3, Vol. 35, p. 114 und Pogg. Ann. Bd. 78, S. 366.

welche ich zur leichteren Uebersicht dadurch reducirt habe, dass ich immer die in demselben Versuche beim Wasserstoff beobachtete Wärmemenge als Einheit genommen habe.

Gase, in denen der Draht sich befand.	Stickstoff.	Sauerstoff.	Kohlensäure.	Oelbildendes Gas.	Wasserstoff.
Abgegebene Wärmemenge	2·26	2·10	1·90	1·57	1

Bei der Uebersetzung eines Aufsatzes, welcher die erste oben erwähnte Beobachtung enthält, hat Poggendorff in einer Anmerkung die Ansicht ausgesprochen [1]), dass das Erkalten eines galvanisch glühenden Drahtes in verschiedenen Gasen wohl *mutatis mutandis* nach denselben Gesetzen geschehe, welche Dulong und Petit für das Erkalten eines auf gewöhnliche Weise erhitzten Körpers aufgestellt haben, und nach welchen ebenfalls das Wasserstoffgas das stärkste Abkühlungsvermögen besitzt. Als aber der spätere Versuch mit den beiden Calorimetern von Grove veröffentlicht war, trat J. Müller gegen die Poggendorff'sche Ansicht auf, indem er sagte [2]): „Dieser Versuch beweist entschieden, dass das schwächere Glühen des Drahtes in Wasserstoff bei vollkommen gleicher Stromstärke nicht etwa darin zu suchen ist, dass das Wasserstoffgas dem Drahte seine Wärme schneller entzieht, sonst müsste ja gerade das Wasser sich schneller erwärmen, welches die Wasserstoffröhre umgiebt. Alles deutet darauf hin, dass in dem Drahte, wenn er vom Wasserstoff umgeben ist, wirklich eine geringere Wärmeproduction stattfindet.“ Nach einigen weiteren Betrachtungen schloss er seine Auseinandersetzung mit dem Ausspruche: „Nach meinem Dafürhalten steht die Erscheinung noch ganz isolirt und völlig unerklärt da.“

Diese Bemerkungen von Müller gaben mir Veranlassung zu einer erweiterten Betrachtung des Gegenstandes [3]), wobei ich neben dem von Poggendorff erwähnten Unterschiede des Abkühlungsvermögens verschiedener Gase, noch die Abhängigkeit des Lei-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 71, S. 197.

[2]) Bericht über die neuesten Fortschritte der Physik. Braunschweig 1849, S. 397.

[3]) Pogg. Ann. Bd. 87, S. 501.

tungswiderstandes von der Temperatur und die Abhängigkeit der Wärmeerzeugung vom Leitungswiderstande berücksichtigte.

Die von mir gegebene Erklärung lässt sich kurz so aussprechen. Wenn zwei Gase, als welche wir beispielsweise atmosphärische Luft und Wasserstoff annehmen wollen, in der Weise verschieden wirken, dass der Wasserstoff einem heissen Körper seine Wärme schneller entzieht, als die Luft, so würde der Platindraht, selbst bei gleicher Wärmeerzeugung im Wasserstoff weniger warm werden, als in der Luft. Nun ist aber der Leitungswiderstand im kälteren Drahte geringer, als im wärmeren, und daher wird bei gleicher Stromstärke im kälteren Drahte weniger Wärme erzeugt. Daraus ergiebt sich für den im Wasserstoff befindlichen Draht eine noch niedrigere Temperatur, als die, welche man bei gleicher Wärmeerzeugung erhalten würde. Auf diese Weise ist also gleichzeitig einerseits die viel niedrigere Temperatur und andererseits die geringere Wärmeerzeugung und Wärmeabgabe an das Calorimeter erklärt.

Um auch eine ungefähre numerische Vergleichung machen zu können, hat man die Rechnungen in folgender Weise anzustellen.

Die Wärmemenge H, welche durch einen galvanischen Strom während der Zeiteinheit in dem Drahte erzeugt wird, lässt sich durch die unter (7) gegebene Gleichung

$$H = \frac{1}{E} l J^2$$

darstellen. Der hierin vorkommende Leitungswiderstand l bestimmt sich als Function der Temperatur durch die Gleichung

$$l = l_0 (1 + kt),$$

worin l_0 den Leitungswiderstand beim Gefrierpuncte und t die vom Gefrierpuncte an gerechnete Temperatur in C.-Graden darstellt, während k eine Constante bedeutet, welche wir für Platin nach Arndtsen gleich 0·00327 setzen können[1]). Demnach geht die für H geltende Gleichung über in

$$H = \frac{1}{E} l_0 J^2 (1 + kt). \tag{8}$$

---

[1]) In meinem oben citirten Aufsatze von 1852 habe ich für k den Werth 0·0023 angewandt, welcher damals nach den Versuchen von Lenz der wahrscheinlichste war; jetzt aber glaube ich den später von Arndtsen gefundenen Werth vorziehen zu müssen.

Was nun die Wärmemenge H' anbetrifft, welche der Draht theils durch Strahlung, theils durch Berührung mit dem umgebenden Gase während der Zeiteinheit verliert und an das Calorimeter abgiebt, so haben wir bei deren Bestimmung die von Dulong und Petit gegebene Gleichung in Anwendung zu bringen. Diese Gleichung halte ich zwar, wenn man sie als eine für alle Temperaturen gültige betrachten wollte, für durchaus fehlerhaft; aber in dem Temperaturintervall, innerhalb dessen die Versuche von Dulong und Petit angestellt sind, nämlich von 0° bis 300°, wird man sie wohl als angenähert richtig ansehen dürfen. Die Gleichung ist für einen an der Oberfläche aus Silber bestehenden Körper aufgestellt, wir wollen aber annehmen, dass sie sich auch auf Platin anwenden lasse. Machen wir ferner noch der Einfachheit wegen die Voraussetzung, dass die Temperatur des Calorimeters constant gleich 0° gewesen sei (wie es der Fall gewesen sein würde, wenn Grove statt der Wassercalorimeter Eiscalorimeter angewandt hätte), so können wir die Dulong-Petit'sche Gleichung in folgender Form schreiben:

$$H' = B\,(a^t - 1 + p t^b), \tag{9}$$

worin B eine von der Form und Grösse des angewandten Körpers (also in unserem Falle des Platindrahtes) abhängige Constante ist. Innerhalb der Klammer bezieht sich die Differenz $a^t - 1$ auf den Wärmeverlust durch Strahlung, und die darin vorkommende Grösse a hat den Werth 1·0077. Das Glied pt^b bezieht sich auf die Wärmeabgabe an das umgebende Gas. Darin hat b ein- für allemal den Werth 1·233, während p von der Natur des umgebenden Gases abhängt, und für die von Dulong und Petit untersuchten Gase unter dem Drucke von einer Atmosphäre folgende Werthe hat:

	In Kohlensäure.	In atm. Luft.	In ölbild. Gase.	In Wasserstoff.
p	0·0220	0·0227	0·0305	0·0784

Wenn nun in Bezug auf die Temperatur des Drahtes ein stationärer Zustand eingetreten ist, wie es bei den Grove'schen Versuchen der Fall war, so muss die Gleichung

$$H - H' = 0$$

gelten, und diese nimmt durch Einsetzung der für H und H' in

(8) und (9) gegebenen Ausdrücke, wenn man dabei zugleich für den Bruch $\frac{l_0 J^2}{EB}$ zur Abkürzung das Zeichen C einführt, folgende Form an:

$$C(1 + kt) - a^t + 1 - pt^b = 0. \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Temperaturen, welche der Draht bei einer bestimmten Stromstärke in den verschiedenen Gasen annimmt, berechnen, wenn man bei unverändertem Werthe der Grösse C für p die verschiedenen in der Tabelle angeführten Werthe anwendet. Die von der Stromstärke abhängige Grösse C muss dabei aber einen solchen Werth haben, dass keine der Temperaturen höher wird, als 300°, weil sonst die Gleichung (9) und demnach auch die Gleichung (10) ihre Anwendbarkeit verlieren würde.

Ich habe eine solche Rechnung für atmosphärische Luft und Wasserstoff ausgeführt, indem ich angenommen habe, die Stromstärke sei so gewählt, dass der Draht in atmosphärischer Luft gerade die Temperatur

$$t_1 = 300^0$$

annehme, und dann die Temperatur t_2, welche er bei derselben Stromstärke in Wasserstoff annehmen muss, berechnet habe. Um zunächst den der gewählten Stromstärke entsprechenden Werth von C zu bestimmen, hat man in (10) für t den Werth 300 und für p den in atmosphärischer Luft geltenden Werth 0·0227 zu setzen. Die so entstehende Gleichung giebt für C den Werth 17·52. Führt man nun diesen Werth von C in die Gleichung (10) ein, und wendet jetzt für p den in Wasserstoff geltenden Werth 0·0784 an, so kann man aus der Gleichung die Temperatur t_2, welche der Draht bei derselben Stromstärke in Wasserstoff annimmt, berechnen, und erhält:

$$t_2 = 97^0.$$

Man sieht also, dass der Draht in Wasserstoff in der That eine viel niedrigere Temperatur annehmen muss, als in atmosphärischer Luft.

Nachdem die Temperaturen t_1 und t_2 bestimmt sind, kann man auch das Verhältniss der Wärmemengen H_1 und H_2, welche in dem Drahte während der Zeiteinheit erzeugt und an das Calorimeter abgegeben werden, leicht berechnen. Man braucht dazu

nur in der Gleichung (8) für t nach einander 300 und 97 zu setzen, wodurch man erhält:

$$H_1 : H_2 = 1{\cdot}981 : 1{\cdot}317 = 1{\cdot}5 : 1.$$

Also auch in dieser Beziehung stimmt das Resultat der Rechnung mit der Grove'schen Beobachtung überein, indem die durch den Strom erzeugte und an das Calorimeter abgegebene Wärmemenge für den in Wasserstoff befindlichen Draht geringer gefunden wird, als für den in atmosphärischer Luft befindlichen.

Eine genaue Vergleichung der Zahlen ist allerdings nicht möglich, weil wir unsere Rechnung wegen der beschränkten Gültigkeit der empirischen Formeln auf viel engere Temperaturgrenzen beschränken mussten, als in Grove's Versuchen vorgekommen sind, wo der in Luft befindliche Draht weissglühend geworden ist. Da indessen für die engeren Temperaturgrenzen die Erklärung so unzweifelhaft der Erfahrung entspricht, so wird man keinen Anstand nehmen, sie auch für weitere Temperaturgrenzen als richtig anzuerkennen. Wenn man dieses thut, so kann man nun umgekehrt die Grove'schen Beobachtungen dazu anwenden, zu prüfen, ob die von Dulong und Petit aufgestellte Formel auch für solche Temperaturen, die bis zur Weissglühhitze gehen, noch als zulässig anzusehen ist. Auf diese Betrachtungen will ich hier nicht eingehen, sondern verweise in dieser Beziehung auf meinen oben citirten Aufsatz.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass jedes andere Mittel, durch welches die Wärmeabgabe des Drahtes geändert wird, im Wesentlichen dieselben Erscheinungen zur Folge haben muss, wie die Anwendung verschiedener Gase. Ein sehr einfaches Mittel der Art besteht darin, die Grösse der Oberfläche des Drahtes zu ändern. Nimmt man z. B. zwei Drähte von gleichem Stoffe, gleicher Länge und gleichem Querschnitte, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass der eine cylindrisch und der andere plattgewalzt ist, so besitzt der letztere eine grössere Oberfläche und demgemäss eine schnellere Wärmeabgabe, als der erstere. Zwei solche Drähte werden sich in einem und demselben Gase ganz ähnlich verhalten, wie zwei gleiche Drähte in verschiedenen Gasen, indem der platte Draht weniger erhitzt und in ihm weniger Wärme erzeugt wird.

§. 8. Zunahme des Leitungswiderstandes einfacher fester Metalle mit der Temperatur.

Der electrische Leitungswiderstand der Metalle ändert sich bekanntlich mit der Temperatur. Bei Legirungen aus zwei oder mehreren Metallen ist diese Aenderung sehr verschieden; bei den einfachen festen Metallen dagegen ist die verhältnissmässige Zunahme des Leitungswiderstandes mit der Temperatur angenähert gleich. Diese letztere Uebereinstimmung tritt besonders deutlich in der im Jahre 1858 veröffentlichten werthvollen Untersuchung von Arndtsen[1]) hervor, welcher am Schlusse seines Aufsatzes darauf hinweist, ohne jedoch die Grösse dieser auf das electrische Verhalten der Metalle ausgeübten Wärmewirkung mit der anderer Wärmewirkungen in Beziehung zu bringen.

Als ich jenen Hinweis las, stieg mir der Gedanke auf, dass, wenn die verhältnissmässige Zunahme des Leitungswiderstandes von der Natur des Stoffes unabhängig und nur von der Temperaturzunahme abhängig sei, sie nothwendig zur absoluten Temperatur in einer einfachen Beziehung stehen müsse. Dieses fand ich dann bei einer Vergleichung der Zahlen in der That bestätigt. Die absolute Temperatur wächst bekanntlich, wenn man die vom Gefrierpuncte an in C.-Graden gezählte Temperatur mit t bezeichnet, im Verhältnisse der Summe $1 + 0{\cdot}003665 . t$. Ganz ähnlich verhält sich auch die Zunahme des Leitungswiderstandes der einfachen festen Metalle mit der Temperatur. Bei fünf Metallen (Platin, Aluminium, Silber, Kupfer und Blei) konnte Arndtsen die Zunahme des Leitungswiderstandes durch eine in Bezug auf die Temperatur lineare Formel darstellen, und nur beim Eisen musste er ein quadratisches Glied hinzufügen, welches aber innerhalb der bei seinen Versuchen eingehaltenen Temperaturgrenzen im Verhältniss zum linearen Gliede unbedeutend ist. Die Coëfficienten von t liegen bei allen sechs Metallen (wenn wir bei jedem den bei 0^0 stattfindenden Leitungswiderstand zur Einheit nehmen) zwischen 0·00327 und 0·00413 und ihr Mittelwerth ist 0·00366. Auch die schon ein Jahr früher von Matthiessen mit Kalium und Natrium angestellten Versuche[2]) hatten Zunahmen des Lei-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 104, S. 1. — [2]) Pogg. Ann. Bd. 100, S. 178.

tungswiderstandes gegeben, welche zwischen denselben Grenzen liegen.

Dieses veranlasste mich in einer in Pogg. Ann. veröffentlichten kurzen Notiz[1]) darauf aufmerksam zu machen, dass die Abhängigkeit des Leitungswiderstandes der festen einfachen Metalle von der Temperatur sich mit einer gewissen Annäherung durch den einfachen Satz ausdrücken lasse, dass der Leitungswiderstand der absoluten Temperatur proportional sei. Wenn dieser Satz auch nur angenähert richtig ist (wie es ja auch die meisten anderen physicalischen Sätze nur sind), so schien er mir doch geeignet zu sein, als Anknüpfungspunct für weitere Betrachtungen über den electrischen Leitungswiderstand zu dienen und insofern einiges Interesse darzubieten.

§. 9. Beziehung zwischen der chemischen Action, welche in einer Volta'schen Säule stattfindet, und den durch den Strom hervorgebrachten Wirkungen.

Es ist in den in diesem Abschnitte vorgekommenen Betrachtungen über die während eines stationären Stromes geleistete Arbeit und erzeugte Wärme nur von homogenen Leitern die Rede gewesen und dabei angenommen, dass der in ihnen stattfindende Strom keine Wirkung nach Aussen hin ausübe und von Aussen her erleide. Es wird aber vielleicht nicht unzweckmässig sein, zum Schlusse noch einen Blick auf die galvanische Kette im Ganzen zu werfen, um zu sehen, wie die chemischen Kräfte, welche den Strom hervorrufen, bei der Betrachtung der Aequivalenz von Wärme und Arbeit in Rechnung zu bringen sind, und wie es sich verhält, wenn der Strom ausserhalb des Leiters eine Arbeit leistet und dabei die entsprechende Rückwirkung erfährt.

Wenn ein electrischer Strom durch eine Volta'sche Säule hervorgebracht wird, so findet in dieser eine chemische Action statt, welche nicht unmittelbar die Wärme entwickelt, die sie entwickeln könnte, wenn sie unter anderen Umständen stattfände. Diejenige bei dieser Action von den molecularen Kräften gethane Arbeit, welche, anstatt unmittelbar Wärme zu erzeugen, den electrischen Strom hervorruft, möge kurz die verbrauchte Arbeit

---

[1]) Bd. 104, S. 650.

genannt werden. Der Strom seinerseits, indem er den Leitungswiderstand überwindet, erzeugt in den Leitern Wärme. Sofern der Strom keine äusseren Wirkungen hervorbringt, ist diese erzeugte Wärme der verbrauchten Arbeit äquivalent.

Wenn dagegen der Strom eine äussere Wirkung hervorzubringen, z. B. eine electromagnetische Maschine zu treiben hat, so nimmt die Stärke des Stromes ab, und damit wird zugleich einerseits die chemische Action und der mit ihr verbundene Arbeitsverbrauch, und andererseits die bei der Ueberwindung des Leitungswiderstandes stattfindende Wärmeerzeugung geringer. Es fragt sich nun, in welcher Beziehung jetzt diese beiden Grössen zu einander stehen, ob wiederum die erzeugte Wärme der verbrauchten Arbeit äquivalent ist, oder ob sich unter Anwendung der in der Electricitätslehre geltenden Gesetze ein Ueberschuss an verbrauchter Arbeit in der Säule nachweisen lässt, welcher als Aequivalent der äusserlich hervorgebrachten Wirkungen zu betrachten ist.

Diese Frage lässt sich sehr kurz so beantworten. Wenn die Intensität des Stromes, während er äusserlich eine Arbeit thut, abnimmt, so nimmt dabei die chemische Action im einfachen Verhältnisse und die erzeugte Wärme im quadratischen Verhältnisse ab. Folglich muss die erzeugte Wärme kleiner als die verbrauchte Arbeit werden. Es bleibt somit von der in der Säule verbrauchten Arbeit ein Ueberschuss, welcher das Aequivalent der äusserlich gethanen Arbeit ist.

Die Sache wird noch klarer durch einige einfache Formeln.

Sei a die Menge des Zinks, welche in einem galvanischen Elemente durch einen Strom von der Einheit der Intensität während der Einheit der Zeit aufgelöst wird. Wenn dann Z die Menge des Zinks bezeichnet, welche in einer Säule von n Elementen durch einen Strom von der Intensität I während der Zeiteinheit aufgelöst wird, so haben wir die Gleichung:

$$(11) \qquad Z = anI.$$

Die übrigen chemischen Actionen, welche die Auflösung des Zinks begleiten, sind in den verschiedenen galvanischen Elementen verschieden, und ebenso verhält es sich folglich auch mit der in den Elementen verbrauchten Arbeit. Sei e die verbrauchte Arbeit für die Gewichtseinheit Zink, eine Arbeitsgrösse, welche je nach den Elementen ungleich und z. B. in einem Grove'schen

Elemente grösser als in einem Daniell'schen Elemente ist. Sei ferner W die Arbeit, welche in der ganzen Säule während der Zeiteinheit verbraucht wird, wenn der Strom die Intensität I hat. Dann hat man die Gleichung:

$$W = eZ = aenI. \tag{12}$$

Die Wärmemenge H, welche durch denselben Strom bei Ueberwindung des Leitungswiderstandes erzeugt wird, wird dem Obigen nach bestimmt durch die Gleichung:

$$H = \frac{1}{E} lI^2, \tag{13}$$

worin l den ganzen Leitungswiderstand der Schliessung und E das mechanische Aequivalent der Wärme bedeutet, vorausgesetzt dass die Stromintensität und der Leitungswiderstand nach mechanischen Maassen gemessen wird.

Wenn eine Schliessung, welche eine galvanische Säule enthält, sich unter solchen Umständen befindet, wo sie keine äusserliche Wirkung ausübt oder erleidet, so nimmt der Strom von selbst diejenige Intensität an, welche nothwendig ist, damit die erzeugte Wärme der verbrauchten Arbeit äquivalent werde. Wenn also W_1 und H_1 die speciellen Werthe von W und H sind, welche diesem Falle entsprechen, so hat man:

$$H_1 = \frac{1}{E} W_1, \tag{14}$$

welche Gleichung dazu dient, die Intensität I_1 des Stromes, welcher unter diesen Umständen entsteht, zu bestimmen. Unter Anwendung der Gleichungen (12) und (13) geht diese Gleichung nämlich über in:

$$\frac{1}{E} lI_1^2 = \frac{1}{E} aenI_1, \tag{15}$$

woraus folgt:

$$I_1 = \frac{aen}{l}. \tag{16}$$

Die in dieser Gleichung vorkommende Grösse aen ist diejenige, welche man gewöhnlich die electromotorische Kraft der Säule nennt.

Wir wollen nun annehmen, der Strom vollbringe äusserlich eine Arbeit, und dadurch sei seine Intensität um die Grösse i vermindert. Der Einfachheit wegen wollen wir noch annehmen, dass diese Verminderung constant sei, denn wenn sie veränderlich wäre,

so müssten wir statt einer Zeiteinheit nur ein Element der Zeit betrachten. Die gegenwärtige Intensität des Stromes ist also:

$$I = I_1 - i.$$

Indem man diesen Werth in die Gleichungen (12) und (13) einführt, erhält man:

$$W = aen(I_1 - i) \tag{17}$$

$$H = \frac{1}{E} l (I_1 - i)^2 \tag{18}$$

$$= \frac{1}{E} [l I_1 (I_1 - i) - li(I_1 - i)].$$

Substituirt man in der letzten Gleichung für I_1 einmal seinen Werth aus (16), so kann man schreiben:

$$H = \frac{1}{E} [aen(I_1 - i) - li(I_1 - i)]$$

und folglich auch, gemäss der Gleichung (17):

$$H = \frac{1}{E} [W - li(I_1 - i)]. \tag{19}$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass die erzeugte Wärme zu klein ist, um der verbrauchten Arbeit äquivalent zu sein. Der Rest dieser letzteren, nämlich die Grösse

$$li(I_1 - i)$$

stellt denjenigen Verbrauch dar, welcher der äusserlich gewonnenen Arbeit entspricht.

Ebenso findet man, dass in dem Falle, wo durch einen äusseren Einfluss die Intensität des Stromes vermehrt wird, die erzeugte Wärme die in der Säule verbrauchte Arbeit übertrifft. Man braucht für diesen Fall nur die Grösse i mit dem Pluszeichen einzuführen, wodurch man an der Stelle von (19) erhält:

$$H = \frac{1}{E} [W + li(I_1 + i)]. \tag{20}$$

Wenn die Schliessung, in welcher der Strom i inducirt wird, keine eigene Stromquelle enthält, so muss man $W = 0$ und $I_1 = 0$ setzen, wodurch die Gleichungen (19) und (20) übergehen in:

$$H = \frac{1}{E} li^2,$$

welches für einen inducirten Strom dieselbe Gleichung ist, wie (13) für einen beliebigen Strom.

ABSCHNITT VI.

Electricitätsleitung in Electrolyten.

§. 1. Arbeitleistung und Wärmeerzeugung in einem electrolytischen Leiter.

Im vorigen Abschnitte haben wir die Wirkungen eines galvanischen Stromes innerhalb eines Leiters erster Classe (d. h. eines solchen, welcher ohne Electrolyse leitet) betrachtet, ohne dabei auf die Art der Entstehung des Stromes Rücksicht zu nehmen. Es hat sich dort ergeben, dass die Gesetze, nach welchen die Wärmeerzeugung in diesen Leitern stattfindet, eine unmittelbare Folge des Ohm'schen Gesetzes und des Satzes von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit sind. In ähnlicher Weise kann man auch bei einem Leiter zweiter Classe, welcher durch Electrolyse leitet, wenn man ihn ganz für sich, ohne Rücksicht auf die übrigen Theile der Kette betrachtet, einige theils streng begründete, theils wenigstens wahrscheinliche Folgerungen ziehen, welche mir von Interesse zu sein scheinen, und welche ich hier so, wie ich sie in einer in Pogg. Ann.[1]) veröffentlichten Abhandlung entwickelt habe, mittheilen will.

Was zunächst die Gesetze der Arbeitleistung anbetrifft, so lassen sich, wenn man das Ohm'sche Gesetz auch bei den Leitern zweiter Classe als richtig anerkennt, die im vorigen Abschnitte gezogenen Schlüsse in unveränderter Weise auch auf diesen Fall

[1]) Bd. 101, S. 338.

ausdehnen. Um den Strom trotz des Leitungswiderstandes aufrecht zu erhalten, muss an jeder Stelle des Leiters eine Kraft thätig sein, welche positiv electrische Theilchen nach einer und negativ electrische Theilchen nach der entgegengesetzten Richtung zu treiben sucht. Diese Kraft wird ausgeübt von getrennter Electricität, welche sich, wie Kirchhoff bewiesen hat, nur an der Oberfläche des Leiters oder an der Grenzfläche zweier verschiedener Leiter befinden kann, während man von dem Inneren eines homogenen Leiters annehmen muss, dass dort positiv und negativ electrische Theilchen so gleichmässig gemischt sind, dass man jeden messbaren Raum als unelectrisch betrachten darf. Die von jener treibenden Kraft geleistete Arbeit lässt sich durch dieselben Formeln ausdrücken, welche im vorigen Abschnitte entwickelt sind.

Wenn man nun die durch den Strom erzeugte Wärme bestimmen will, so könnte es auf den ersten Blick vielleicht scheinen, als ob in dieser Beziehung zwischen den Leitern erster und zweiter Classe eine Verschiedenheit obwalten müsse. In den Leitern erster Classe bleiben die Massenmolecüle unverändert in ihrer Lage, und nur die Electricität bewegt sich; bei den Leitern zweiter Classe dagegen werden die Bestandtheile der Massenmolecüle mit in die Bewegung gezogen, und es finden Zerlegungen und Wiederzusammensetzungen statt, bei denen ohne Zweifel die Molecularkräfte, mit welchen die Bestandtheile auf einander wirken, eine bedeutende Thätigkeit entwickeln. Bei näherer Betrachtung überzeugt man sich jedoch leicht, dass bei der Bestimmung der erzeugten Wärme die von den Molecularkräften gethanen Arbeitsgrössen, so bedeutend sie auch im Einzelnen sein mögen, doch nicht berücksichtigt zu werden brauchen, weil sie sich gegenseitig vollständig aufheben.

Wenn man, während der Leiter von einem stationären Strome durchflossen wird, ein zur Betrachtung ausgewähltes, von einer geschlossenen Fläche umgrenztes Stück desselben zu Anfang und zu Ende einer Zeiteinheit untersucht, so findet man, dass sein Zustand während dieser Zeit keine wesentliche Veränderung erlitten hat. Es haben sich zwar die electro-positiven Bestandtheile vieler Molecüle von electro-negativen, mit welchen sie bisher verbunden waren, getrennt, aber dafür haben sie sich mit anderen ganz gleichen wieder verbunden, und die Arbeit, welche die Molecularkräfte bei einer solchen Verbindung thun, ist unzweifelhaft eben so gross, wie die, welche sie bei der Trennung erleiden (oder

negativ thun). Ebenso sind für alle Massentheile, welche an der einen Seite aus dem Raume ausgetreten sind, eben so viele solche an der anderen Seite eingetreten, so dass die ganze in dem Raume befindliche Masse zu Ende der Zeit dieselbe Dichtigkeit, dieselbe Zusammensetzung und dieselbe Anordnung der Molecüle hat, wie zu Anfang. Man kann daher, ohne die Arbeitsgrössen, welche bei den einzelnen Vorgängen von den Molecularkräften gethan sind, zu kennen, mit Sicherheit den Schluss ziehen, dass die algebraische Summe dieser Arbeitsgrössen Null ist. Es bleibt also nur die Arbeit übrig, welche die treibende electrische Kraft bei der Ueberwindung des Leitungswiderstandes gethan hat, und welche sich, da sie keine bleibende Veränderung in dem Leiter hervorgebracht hat, in lebendige Kraft, und da keine andere lebendige Kraft vorkommt, in Wärme verwandelt haben muss.

§. 2. Electrisches Verhalten der Theilmolecüle.

Wir wollen nun auf die Art, wie man sich die Electricitätsleitung innerhalb eines Electrolyten vorstellen muss, etwas specieller eingehen.

Die Molecüle des Electrolyten werden durch den Strom in zwei Bestandtheile zerlegt, welche entweder einfache Atome oder selbst auch schon aus mehreren Atomen zusammengesetzte Molecüle sein können, wie z. B. im Kupfervitriol der eine Bestandtheil Cu einfach und der andere SO_4 zusammengesetzt ist. Ich werde diese Bestandtheile, mögen sie nun aus einem oder aus mehreren Atomen bestehen, die *Theilmolecüle* nennen, und ein ganzes Molecül des Electrolyten, wo es zur Unterscheidung nöthig ist, ein *Gesammtmolecül*.

Aus der Art, wie die Zersetzung des Electrolyten mit der Electricitätsleitung zusammenhängt, muss man schliessen, dass die beiden Theilmolecüle in ihrer Verbindung zu einem Gesammtmolecül entgegengesetzte electrische Zustände haben, welche auch nach ihrer Trennung fortbestehen. Unter der Voraussetzung, dass es zwei Electricitäten gebe, muss man also annehmen, dass das eine Theilmolecül einen Ueberschuss an positiver, das andere einen eben so grossen Ueberschuss an negativer Electricität habe; unter der Voraussetzung von nur Einer Electricität dagegen muss man

annehmen, dass das eine Theilmolecül mehr und das andere weniger Electricität besitze, als zum neutralen Zustande nöthig ist.

Dass zwei Molecüle von verschiedener Natur bei ihrer Berührung solche entgegengesetzten electrischen Zustände annehmen können, ist sehr wohl denkbar. Eben so liegt keine Schwierigkeit darin, sich diese Zustände auch nach der Trennung als fortbestehend zu denken, so lange man nur annimmt, dass nirgends innerhalb des Leiters eine grössere Anzahl positiver Theilmolecüle allein oder negativer Theilmolecüle allein angehäuft sei, sondern dass beide Arten von Theilmolecülen überall so gleichmässig verbreitet seien, dass sich in jedem messbaren Raume gleich viel Molecüle beider Arten befinden. In diesem Falle kann nämlich aus den Kräften, welche die an einem Theilmolecül haftende Electricitätsmenge von den Electricitätsmengen der umgebenden Theilmolecüle erleidet, wegen der entgegengesetzten Wirkungen der positiven und negativen Theilmolecüle, keine starke Resultante entstehen, welche jene erstere Electricitätsmenge nach einer bestimmten Richtung zu treiben und dadurch von seinem Molecül, wenn dieses an der Bewegung verhindert wäre, zu trennen suchte.

Wäre dagegen in einem Raume eine grosse Anzahl von Molecülen befindlich, welche alle mit gleicher Electricität geladen wären, so würde die Electricitätsmenge irgend eines zur Betrachtung ausgewählten Molecüls von den Electricitätsmengen aller anderen abgestossen werden, und diese Kräfte würden, wenn sich das betrachtete Molecül nicht gerade in der Mitte der Masse befände, durch ihre Vereinigung eine beträchtliche in der Richtung von innen nach aussen wirkende Kraft bilden können. Da auch die an den anderen Molecülen haftenden Electricitätsmengen ganz ähnlichen Wirkungen unterworfen wären, indem jede durch die Gesammtwirkung aller übrigen nach aussen gedrängt würde, so würde in dem electrischen Zustande der ganzen Masse eine Spannung obwalten, welche sich nur dann unverändert erhalten könnte, wenn die Masse absolut nichtleitend wäre. Im anderen Falle würde die freie Electricität aller Molecüle, je nach der Güte der Leitung mehr oder weniger schnell nach aussen strömen, zunächst an die Oberfläche der Masse, und von da, wenn die Masse nicht vollkommen isolirt wäre, in die weiteren Umgebungen.

§. 3. Bedingung, welche als erfüllt vorauszusetzen ist.

Betrachten wir ferner den Vorgang der Zersetzung selbst, wie er in der Flüssigkeit, welche als Electrolyt dient, oder den Electrolyten aufgelöst enthält, stattfindet, so darf zunächst so viel als feststehend betrachtet werden, dass nicht die an der einen Electrode frei werdenden Theilmolecüle sich durch die Flüssigkeit bis zur anderen Electrode fortbewegen, sondern dass in der ganzen zwischen den beiden Electroden befindlichen Flüssigkeitsmasse überall Zersetzungen und neue Verbindungen geschehen, so dass die positiven Theilmolecüle, welche während der Zeiteinheit an der Kathode ankommen, zwar der Anzahl nach mit denen übereinstimmen, welche von der Anode ausgehen, aber nicht dieselben sind, und ebenso in Bezug auf die negativen Theilmolecüle, welche an der Anode ankommen.

Die Art, wie die in den verschiedenen Flüssigkeitsschichten stattfindenden Zersetzungen unter einander zusammenhängen, bedarf aber noch einer näheren Feststellung, und namentlich muss eine Ansicht, welche ziemlich nahe zu liegen scheint, welche aber entschieden unrichtig ist, von vornherein ausgeschlossen werden.

Man könnte sich nämlich möglicherweise vorstellen, dass die Zersetzung von der einen Electrode, z. B. von der Anode, ausginge, dass die negativen Theilmolecüle der zersetzten Gesammtmolecüle hier festgehalten würden, die positiven dagegen zur nächsten Flüssigkeitsschicht gingen und dort eine neue Zersetzung bewirkten, indem sie sich mit den negativen Theilmolecülen dieser Schicht verbänden, und die positiven frei machten, dass diese letzteren dann weiter zur folgenden Schicht gingen, und hier abermals dieselbe Wirkung ausübten u. s. f. Hiernach würde die Zersetzung einer Schicht die Ursache für die Zersetzung der folgenden Schicht sein, und die Wirkung der in dem Leiter vorhandenen treibenden Kraft würde sich darauf beschränken, erstens die frei gewordenen positiven Theilmolecüle der vorigen Schicht nach der folgenden zu bewegen, und zweitens dadurch, dass sie die positiven Theilmolecüle dieser Schicht ebenfalls vorwärts drängt, die Zersetzung zu erleichtern.

Die Unrichtigkeit dieser Vorstellungsweise ergiebt sich aber sogleich daraus, dass nach ihr innerhalb der Flüssigkeit während

des Stromes stets ein Ueberschuss von positiven Theilmolecülen, und somit auch von positiver Electricität vorhanden sein müsste, was, wie schon erwähnt, nach den Gesetzen über die Vertheilung der getrennten Electricität für einen stationären Strom eben so unzulässig ist, wie für den Gleichgewichtszustand. In derselben Weise würde man, wenn man die vorher beschriebene Art der Fortpflanzung der Zersetzungen in umgekehrter Richtung von der Kathode zur Anode annehmen wollte, einen Ueberschuss von negativen Theilmolecülen innerhalb der Flüssigkeit erhalten, welcher natürlich gleichfalls unstatthaft ist.

Als Grundbedingung für alle weiteren Betrachtungen müssen wir an dem Satze festhalten, dass sich innerhalb jedes messbaren Raumes der Flüssigkeit gleich viel positive und negative Theilmolecüle befinden, mögen diese nun alle je zwei zu Gesammtmolecülen verbunden sein, oder mögen einige im unverbundenen Zustande zwischen den Gesammtmolecülen zerstreut sein.

Hieraus folgt, dass in einer electrolytischen Flüssigkeit, welche sich in ihrem natürlichen Zustande befindet, indem keine Art von Theilmolecülen in ihr überwiegt, unter dem blossen Einflusse derjenigen Kraft, welche dazu dient, den Leitungswiderstand zu überwinden, solche abwechselnde Zersetzungen und Wiederverbindungen der Molecüle, wie sie zur Electricitätsleitung nöthig sind, stattfinden können [1]).

Die Erklärung dieser Thatsache bietet eine eigenthümliche Schwierigkeit dar, welche, wie es mir scheint, nur dadurch gehoben werden kann, dass man ein durchaus anderes Verhalten der Flüssigkeiten annimmt, als es bisher gebräuchlich war. Ich will versuchen, dieses in den nächsten Paragraphen auseinander zu setzen.

---

[1]) Um einen Fall zu haben, wo gar keine Electroden vorkommen, kann man folgende Annahme machen. Es sei aus einem electrolytischen Leiter ein in sich geschlossener Ring gebildet. In der Nähe dieses leitenden Ringes werde ein kreisförmiger electrischer Strom oder ein Magnet bewegt, z. B. angenähert oder entfernt. Dadurch wird in dem Ringe ein Inductionsstrom erzeugt, und man hat somit in dem Electrolyten einen electrischen Strom, welcher nicht von einer Electrode zu einer anderen, sondern im Kreise durch einen überall gleichartigen Ring geht und durch eine electromotorische Kraft hervorgerufen ist, die nicht bloss an einzelnen Stellen des Ringes, sondern in allen seinen Theilen wirkt.

§. 4. Schwierigkeit der Erklärung.

Es sei eine Flüssigkeit gegeben, welche entweder ganz oder zum Theil aus electrolytischen Molecülen besteht, und wir wollen zunächst einmal annehmen, diese Molecüle hätten sich im natürlichen Zustande der Flüssigkeit in irgend einer bestimmten Anordnung gelagert, in welcher sie, so lange keine fremde Kraft auf sie einwirkt, verharrten, indem die einzelnen Molecüle zwar vielleicht um ihre Gleichgewichtslagen oscilliren, aber nicht ganz aus denselben heraustreten könnten; ferner sei, wie man es bei jeder derartigen Anordnung voraussetzen muss, die Anziehung zwischen zwei Theilmolecülen, welche zu einem Gesammtmolecül verbunden sind, und daher einander sehr nahe sind, grösser, als die Anziehung zwischen dem positiven Theilmolecül eines Gesammtmolecüls und dem negativen eines anderen. Wenn nun innerhalb dieser Masse eine electrische Kraft wirkt, welche die positiv electrischen Theilmolecüle nach einer und die negativ electrischen nach der entgegengesetzten Richtung zu treiben sucht, so fragt es sich, welchen Einfluss diese auf das Verhalten der Molecüle ausüben muss.

Die erste Wirkung würde offenbar, sofern die Molecüle als drehbar vorausgesetzt werden, darin bestehen, alle Molecüle in gleicher Weise zu richten, indem die beiden entgegengesetzt electrischen Bestandtheile jedes Gesammtmolecüls sich nach den Seiten drehen würden, wohin sie durch die wirksame Kraft getrieben werden.

Ferner würde die Kraft die zu einem Gesammtmolecül vereinigten Theilmolecüle zu trennen und nach entgegengesetzten Richtungen zu bewegen suchen, und wenn diese Bewegung einträte, so würde dadurch das positive Theilmolecül des einen Gesammtmolecüls mit dem negativen des folgenden zusammenkommen und sich mit ihm verbinden. Nun muss aber, um die einmal verbundenen Theilmolecüle zu trennen, die Anziehung, welche sie auf einander ausüben, überwunden werden, wozu eine Kraft von bestimmter Stärke nöthig ist, und dadurch wird man zu dem Schlusse geführt, dass, so lange die in dem Leiter wirksame Kraft diese Stärke nicht besitzt, gar keine Zersetzung der Molecüle stattfinden könne, dass dagegen, wenn die Kraft bis zu dieser Stärke angewachsen ist, sehr viele

Molecüle mit einem Male zersetzt werden müssen, indem sie alle unter dem Einflusse derselben Kraft stehen und fast gleiche Lage zu einander haben. In Bezug auf den electrischen Strom kann man diesen Schluss, wenn man voraussetzt, dass der Leiter nur durch Electrolyse leiten könne, so ausdrücken: So lange die im Leiter wirksame treibende Kraft unter einer gewissen Grenze ist, bewirkt sie gar keinen Strom, wenn sie aber diese Grenze erreicht hat, so entsteht plötzlich ein sehr starker Strom.

Dieser Schluss widerspricht aber der Erfahrung vollkommen. Schon die geringste Kraft [1]) bewirkt einen durch abwechselnde Zersetzungen und Wiederverbindungen geleiteten Strom, und die Intensität dieses Stromes wächst nach dem Ohm'schen Gesetze der Kraft proportional.

Demnach muss die obige Annahme, dass die Theilmolecüle eines Electrolyten in fester Weise zu Gesammtmolecülen verbunden sind, und diese eine bestimmte regelmässige Anordnung haben, unrichtig sein. Man kann dieses Resultat noch allgemeiner folgendermaassen aussprechen. Jede Annahme, welche darauf hinauskommt, dass der natürliche Zustand einer electrolytischen Flüssigkeit ein Gleichgewichtszustand ist, in welchem jedes positive Theilmolecül mit einem negativen fest verbunden ist, und dass ferner, um die Flüssigkeit aus diesem Gleichgewichtszustande in einen anderen, welcher sich vom vorigen nur dadurch unterscheidet, dass eine Anzahl positiver Theilmolecüle mit anderen negativen, als vorher, verbunden ist, überzuführen, eine Kraft von bestimmter Stärke auf diejenigen Molecüle, welche diese Veränderung erleiden sollen, wirken muss, — jede solche Annahme steht im Widerspruche mit dem Ohm'schen Gesetze.

Ich glaube daher, dass die folgende Annahme, bei welcher dieser Widerspruch gehoben ist, und welche, wie es mir scheint,

---

[1]) Ich muss hierbei noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass hier, wie in diesem ganzen Abschnitte, nicht von den Kräften die Rede ist, welche an den Electroden wirken, wo die Zersetzungsproducte ausgeschieden werden und die Polarisation überwunden werden muss, sondern lediglich von der Kraft, welche innerhalb des Electrolyten selbst wirkt, wo jedes Theilmolecül, welches von dem bisher mit ihm verbundenen Theilmolecül getrennt wird, sich sogleich wieder mit einem anderen Theilmolecül derselben Art verbindet, so dass die Masse im Wesentlichen ungeändert bleibt, und nur der Leitungswiderstand zu überwinden ist.

auch mit den sonst bekannten Thatsachen vereinbar ist, einige Beachtung verdient.

§. 5. Veränderte Annahme über das moleculare Verhalten electrolytischer Flüssigkeiten.

In meiner Abhandlung „über die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen“ [1]), habe ich die Ansicht ausgesprochen, dass in Flüssigkeiten die Molecüle nicht bestimmte Gleichgewichtslagen haben, um welche sie nur oscilliren, sondern dass ihre Bewegungen so lebhaft sind, dass sie dadurch in ganz veränderte und immer neue Lagen zu einander kommen, und sich unregelmässig durch einander bewegen.

Unter Zugrundelegung dieser Ansicht wollen wir uns in der electrolytischen Flüssigkeit zunächst einmal ein einzelnes Theilmolecül, z. B. ein electro-positives, befindlich denken, von welchem wir voraussetzen wollen, dass sein electrischer Zustand noch ganz derselbe sei, wie in dem Momente, wo es aus einem Gesammtmolecül ausgeschieden wurde. Ich glaube nun, dass, indem dieses Theilmolecül sich zwischen den Gesammtmolecülen umherbewegt, unter den vielen Lagen, die es annehmen kann, auch zuweilen solche vorkommen, in welchen es das negative Theilmolecül irgend eines Gesammtmolecüls mit stärkerer Kraft anzieht, als die, mit welcher die beiden zu dem Gesammtmolecül gehörigen Theilmolecüle, deren Lage zu einander auch nicht ganz unveränderlich ist, sich in diesem Augenblicke gegenseitig anziehen. Sobald es in eine solche Lage getreten ist, verbindet es sich mit diesem negativen Theilmolecül, und das bisher mit demselben verbundene positive Theilmolecül wird dadurch frei. Dieses bewegt sich nun ebenfalls allein umher und zerlegt nach einiger Zeit ein anderes Gesammtmolecül auf dieselbe Art u. s. f., und alle diese Bewegungen und Zersetzungen geschehen eben so unregelmässig, wie die Wärmebewegungen, durch welche sie veranlasst werden.

Betrachten wir ferner das Verhalten der Gesammtmolecüle unter einander, so glaube ich, dass es auch hier zuweilen geschieht, dass das positive Theilmolecül eines Gesammtmolecüls zu dem negativen eines anderen in eine günstigere Lage kommt, als jedes

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 100, S. 353.

dieser beiden Theilmolecüle im Augenblicke gerade zu dem anderen Theilmolecül seines eigenen Gesammtmolecüls hat. Dann werden sich jene beiden bisher fremden Theilmolecüle zu einem Gesammtmolecül verbinden, und die beiden dadurch frei werdenden Theilmolecüle (das negative des ersten und das positive des zweiten Gesammtmolecüls) werden sich entweder ebenfalls unter einander verbinden, oder wenn die Wärmebewegung sie daran verhindern sollte, so werden sie sich unter die übrigen Gesammtmolecüle mischen, und dort ähnliche Zersetzungen hervorbringen, wie sie vorher von einem einzelnen Theilmolecül beschrieben wurden.

Wie häufig in einer Flüssigkeit solche gegenseitige Zerlegungen vorkommen, wird erstens von der Natur der Flüssigkeit abhängen, ob die Theile der einzelnen Gesammtmolecüle mehr oder weniger innig zusammenhängen, und zweitens von der Lebhaftigkeit der Molecularbewegung, d. h. von der Temperatur.

§. 6. Neue Erklärung der electrolytischen Leitung.

Wenn nun in einer Flüssigkeit, deren Molecüle sich schon von selbst in einer solchen Bewegung befinden, wobei sie ihre Theilmolecüle in unregelmässiger Weise austauschen, eine electrische Kraft wirkt, welche alle positiven Theilmolecüle nach einer und alle negativen nach der entgegengesetzten Richtung zu treiben sucht, so lässt sich leicht einsehen, welcher Unterschied dadurch in der Art der Molecularbewegung eintreten muss.

Ein freies Theilmolecül wird dann nicht mehr ganz den unregelmässig wechselnden Richtungen, nach welchen es durch die Wärmebewegungen getrieben wird, folgen, sondern es wird die Richtung seiner Bewegung im Sinne der wirksamen Kraft ändern, so dass unter den Richtungen der freien positiven Theilmolecüle, obwohl sie noch sehr unregelmässig sind, doch eine gewisse Richtung vorherrscht, und ebenso die negativen Theilmolecüle sich vorherrschend nach der entgegengesetzten Richtung bewegen. Ausserdem werden bei der Einwirkung eines Theilmolecüls auf ein Gesammtmolecül und bei der Einwirkung zweier Gesammtmolecüle auf einander solche Zerlegungen, bei welchen die Theilmolecüle in ihren Bewegungen zugleich der electrischen Kraft folgen können, erleichtert werden und daher häufiger stattfinden, als ohne die

Kraft, indem auch in Fällen, wo die Lage der Molecüle noch nicht günstig genug ist, dass die Zerlegung von selbst eintreten könnte, die Mitwirkung der electrischen Kraft ihr Eintreten veranlassen kann. Umgekehrt solche Zerlegungen, bei denen die Theilmolecüle sich der electrischen Kraft entgegen bewegen müssten, werden durch diese Kraft erschwert und dadurch seltener gemacht werden.

Betrachtet man im Inneren dieser Flüssigkeit, während die electrische Kraft wirkt, ein kleines auf der Richtung der Kraft senkrechtes Flächenstück, so gehen durch dieses während der Zeiteinheit mehr positive Theilmolecüle in positiver als in negativer Richtung hindurch, und mehr negative Theilmolecüle in negativer als in positiver Richtung. Da nun für jede Art von Theilmolecülen zwei in entgegengesetzter Richtung stattfindende Durchgänge sich gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben, und nur der für die eine Richtung bleibende Ueberschuss von Durchgängen in Betracht kommt, so kann man das Vorige auch einfacher so ausdrücken: es geht eine gewisse Anzahl positiver Theilmolecüle in positiver und eine Anzahl negativer Theilmolecüle in negativer Richtung durch das Flächenstück. Die Grösse dieser beiden Zahlen braucht nicht gleich zu sein, weil sie ausser von der treibenden Kraft, welche für beide Arten von Theilmolecülen gleich ist, auch noch von dem Grade der Beweglichkeit abhängt, welcher bei verschiedenartigen Theilmolecülen aus mehreren Gründen verschieden sein kann.

Diese entgegengesetzte Bewegung der beiden Arten von Theilmolecülen bildet den galvanischen Strom innerhalb der Flüssigkeit. Um die Stärke des Stromes zu bestimmen, ist es nicht nöthig, die Anzahl der in positiver Richtung durch das Flächenstück gehenden positiven Theilmolecüle und die Anzahl der in negativer Richtung hindurchgehenden negativen Theilmolecüle einzeln zu kennen, sondern es genügt, wenn man die Summe beider Zahlen kennt. Mag man nämlich von der Vorstellung ausgehen, dass es zwei Electricitäten gebe, und dass ein negativ electrisches Theilmolecül mit einer gewissen Quantität freier negativer Electricität begabt sei, oder von der Vorstellung, dass es nur eine Electricität gebe, und dass ein negativ electrisches Theilmolecül weniger Electricität besitze, als für den neutralen Zustand nöthig ist, in beiden Fällen muss man annehmen, dass es zur Vermehrung eines

galvanischen Stromes gleich viel beiträgt, ob ein positiv-electrisches Theilmolecül sich nach der Richtung des Stromes, oder ob ein eben so stark negativ-electrisches Theilmolecül sich nach der entgegengesetzten Richtung bewegt. Wenn wir also für den Fall, dass die Molecularbewegung der Art wäre, dass nur für die positiven Theilmolecüle ein Ueberschuss der Bewegung nach einer Richtung stattfände, und dass während der Zeiteinheit n positive Theilmolecüle in positiver Richtung durch das Flächenstück gingen, die dadurch bedingte Stromstärke mit $C.n$ bezeichnen, so müssen wir dem entsprechend bei einer Bewegung, bei welcher gleichzeitig n positive Theilmolecüle in der positiven und n' negative Theilmolecüle in der negativen Richtung hindurchgehen, die Stromstärke mit $C\,(n + n')$ bezeichnen.

§. 7. Uebereinstimmung der neuen Erklärung mit der Erfahrung und Unterschied zwischen ihr und der Grotthuss'schen Erklärung.

Bei dieser Auffassung des Zustandes der Flüssigkeiten fällt die oben erwähnte Schwierigkeit fort. Man sieht leicht, dass der Einfluss, welchen die electrische Kraft auf die schon von selbst stattfindenden, aber noch unregelmässigen Zersetzungen und Bewegungen der Molecüle übt, nicht erst beginnt, wenn die Kraft eine gewisse Stärke erreicht hat, sondern dass schon die geringste Kraft in der vorher angegebenen Weise ändernd auf dieselben einwirken, und dass die Grösse dieser Wirkung mit der Stärke der Kraft wachsen muss. Der ganze Vorgang stimmt also mit dem Ohm'schen Gesetze sehr gut überein.

Weshalb das electrische Leitungsvermögen, welches von der Leichtigkeit, mit welcher die Zerlegungen der Molecüle und die Bewegungen der Theilmolecüle innerhalb der Flüssigkeit geschehen, abhängt, bei verschiedenen Flüssigkeiten so verschieden ist, weshalb z. B. bei den Molecülen des Schwefelsäurehydrats die Zerlegungen so sehr viel leichter stattfinden, als bei den Wassermolecülen, und woher der bedeutende Einfluss kommt, welchen die Verdünnung der Schwefelsäure auf die Güte der Leitung ausübt, ist freilich bisher nicht hinlänglich erklärt, indessen sehe ich darin auch nichts, was als Widerspruch gegen die vorstehende Theorie geltend gemacht werden könnte.

Der Umstand dagegen, dass bei Leitern zweiter Classe das Leitungsvermögen mit wachsender Temperatur zunimmt, erklärt sich aus dieser Theorie in sehr ungezwungener Weise, indem die grössere Lebhaftigkeit der inneren Bewegung offenbar dazu beitragen muss, die gegenseitigen Zerlegungen der Molecüle zu erleichtern.

Vergleichen wir die ältere Grotthuss'sche Theorie mit der hier entwickelten, so liegt der Unterschied hauptsächlich darin, dass in jener angenommen wird, die Bewegung werde erst durch die electrische Kraft hervorgerufen, und finde nur nach zwei bestimmten Richtungen statt, indem die Zersetzungen regelmässig von Molecül zu Molecül fortschreiten, während nach dieser die schon vorhandenen Bewegungen nur geändert werden, und auch das nicht so, dass sie vollkommen regelmässig werden, sondern nur so, dass in der noch immer grossen Mannichfaltigkeit von Bewegungen die beiden bestimmten Richtungen vorherrschen.

§. 8. Eine frühere ähnliche Ansicht über moleculare Vorgänge.

Nachdem ich im Jahre 1857 die vorstehende Ansicht über das Verhalten electrolytischer Flüssigkeiten niedergeschrieben hatte, erfuhr ich in der Unterhaltung mit einem Chemiker, dass eine ähnliche Ansicht über das Verhalten zusammengesetzter flüssiger und luftförmiger Körper schon von Williamson in einer Abhandlung über die Theorie der Aetherbildung [1]) ausgesprochen ist. Es heisst in dieser Abhandlung unter anderen [2]): „Wir werden auf diese Weise zu der Annahme geführt, dass in einem Aggregat von Molecülen jeder Verbindung ein fortwährender Austausch zwischen den in ihr enthaltenen Elementen vor sich geht. Angenommen z. B., ein Gefäss mit Salzsäure würde durch eine grosse Zahl von Molecülen von der Zusammensetzung ClH ausgefüllt, so würde uns die Betrachtung, zu der wir gelangt sind, zu der Annahme führen, dass jedes Atom Wasserstoff nicht in ruhiger Gegeneinanderlagerung neben dem Atom Chlor bleibe, mit dem es

---

[1]) Annalen der Chemie und Pharmacie Bd. 77, S. 37. Gelesen vor der *British Association* zu Edinburg.

[2]) A. a. O. S. 46.

zuerst verbunden war, sondern dass ein fortwährender Wechsel des Platzes mit anderen Wasserstoffatomen stattfindet.“

Hiernach scheint Williamson sogar eine bei weitem grössere Wandelbarkeit in der Gruppirung der Theilmolecüle anzunehmen, als zur Erklärung der Electricitätsleitung nöthig ist. Er spricht von einem fortwährenden Wechsel eines Wasserstoffatoms mit anderen Wasserstoffatomen, während es zur Erklärung der Electricitätsleitung genügt, wenn bei den Zusammenstössen der Gesammtmolecüle hin und wieder und vielleicht verhältnissmässig selten ein Austausch der Theilmolecüle stattfindet.

Williamson führt zur Bestätigung seiner Ansicht das Verhalten an, welches stattfindet, wenn in einer Flüssigkeit zwei Verbindungen mit verschiedenen electro-positiven und verschiedenen electro-negativen Bestandtheilen gelöst sind, dass dann die beiden ursprünglichen Verbindungen nicht einfach bestehen bleiben, oder eine andere Anordnung der Art entsteht, bei welcher ein electropositiver Bestandtheil ausschliesslich mit Einem der beiden electronegativen Bestandtheile verbunden ist, und umgekehrt, sondern dass alle vier möglichen Combinationen sich in einem gewissen Verhältnisse bilden, woher es kommt, dass, wenn irgend eine der vier Verbindungen unlöslich ist, diese sich ausscheidet. Auch ich glaube, dass dieses Verhalten sich sehr natürlich daraus erklärt, dass die Verbindungen je zweier Theilmolecüle nicht fest, sondern wandelbar sind, und dass ein positives Theilmolecül nicht bloss ein positives Theilmolecül derselben Art, sondern auch ein solches von anderer Art verdrängen kann, und ich habe dieses Verhalten bei der Aufstellung der oben entwickelten Theorie gleich mit im Auge gehabt. Indessen halte ich es auch hierbei nicht für nöthig, dass alle Molecüle in fortwährendem Wechsel begriffen sind, sondern es scheint mir zu genügen, wenn sie sich hin und wieder gegenseitig austauschen, denn wenn die Anzahl der Austausche auch im Verhältniss zur Anzahl der Stösse gering ist, so kann sie doch an sich betrachtet noch sehr gross sein, und daher in kurzer Zeit eine bedeutende Aenderung in der ursprünglichen Verbindungsart hervorbringen.

Da ich zu dem Schlusse über die im Inneren einer Flüssigkeit stattfindenden Austausche der Theilmolecüle ganz unabhängig und auf einem durchaus anderen Wege wie Williamson gelangt bin, so habe ich, auch nachdem ich die Abhandlung desselben kennen gelernt habe, doch noch geglaubt, meine Betrachtun-

gen unverändert mittheilen zu dürfen, indem es dadurch am besten ersichtlich sein wird, in wie fern diese beiden Betrachtungsweisen einander gegenseitig zur Bestätigung dienen.

§. 9. Metallische Leitung in Electrolyten.

Es ist in neuerer Zeit mehrfach die Frage erörtert, ob in Leitern zweiter Classe neben der Leitung durch Electrolyse auch noch eine Electricitätsleitung der Art, wie in Leitern erster Classe stattfinde.

Vom theoretischen Gesichtspuncte aus scheint mir der Annahme, dass beide Arten von Leitung in demselben Körper gleichzeitig stattfinden können, nichts entgegen zu stehen. Die Bestimmung aber, wie sich in einzelnen Fällen die beiden verschiedenen Leitungen ihrer Grösse nach zu einander verhalten, wird bei dem Mangel an genau festgestellten Thatsachen, welche als Grundlage für theoretische Schlüsse dienen könnten, für jetzt wohl ganz der experimentellen Untersuchung überlassen bleiben müssen.

Für diejenigen Körper, welche bis jetzt in dieser Beziehung untersucht sind, und welche ihrer vielfachen Anwendung wegen die wichtigsten sind, hat sich gezeigt, dass die Leitung ohne Electrolyse, wenn sie überhaupt existirt, jedenfalls sehr gering ist, und es wird daher nicht nöthig sein, auf diese Art von Leitung, welche übrigens theoretisch nichts wesentlich Neues darbieten würde, hier näher einzugehen.

ABSCHNITT VII.

Die thermoelectrischen Ströme.

§. 1. Electrischer Zustand an der Berührungsfläche zweier Stoffe.

Während die beiden vorigen Abschnitte nur die in einem homogenen Leiter während eines stationären electrischen Stromes stattfindenden Vorgänge behandelten, soll nun eine Verbindung mehrerer ohne Electrolyse leitender Stoffe betrachtet werden, welche, wenn sie eine in sich geschlossene Leitung bilden und die Verbindungsstellen der Stoffe auf verschiedenen Temperaturen erhalten werden, einen thermoelectrischen Strom geben.

Man nimmt gewöhnlich als Sitz der electromotorischen Kräfte, welche den thermoelectrischen Strom hervorbringen, die eben erwähnten Verbindungsstellen verschiedener Stoffe an, während man innerhalb eines einzelnen Stoffes, auch wenn seine Theile verschiedene Temperaturen haben, keine electromotorischen Kräfte voraussetzt. Wir wollen diese Annahme, welche die einfachste ist, zunächst auch machen, und untersuchen zu welchen Folgerungen sie führt. Die Vergleichung dieser Folgerungen mit der Erfahrung wird dann von selbst herausstellen, ob jene einfache Annahme zur Erklärung aller beobachteten Thatsachen genügt, oder ob und in welcher Weise sie noch modificirt werden muss.

Für die Berührungsfläche zweier Stoffe machen wir die Annahme, dass dort eine Spannungsdifferenz zwischen den Stoffen eintrete, indem die Electricität sich ungleich unter ihnen theile. Hiernach muss man für den Zustand des Gleichgewichtes anneh-

men, dass die Potentialfunction zwar innerhalb eines jeden einzelnen Stoffes constant sei, aber in zwei sich berührenden Stoffen verschiedene Werthe habe [1]), und für den während eines continuirlichen Stromes stattfindenden Zustand, dass die Potentialfunction sich innerhalb jedes einzelnen Stoffes nur allmälig, an der Berührungsfläche zweier Stoffe aber plötzlich ändere. Wir können somit, wenn wir die Potentialfunction innerhalb zweier Leiter, welche a und b heissen mögen, zur Unterscheidung mit V_a und V_b bezeichnen, für je zwei Puncte, welche sich zu beiden Seiten der Berührungsfläche sehr nahe gegenüberliegen, die Gleichung

$$V_b - V_a = E_{ab}, \tag{1}$$

bilden, worin E_{ab} eine von der Beschaffenheit der sich berührenden Stoffe abhängige Grösse ist, welche wir die Potentialniveaudifferenz der beiden Stoffe nennen wollen.

Man darf diese plötzliche Aenderung der Potentialfunction natürlich nicht im streng mathematischen Sinne als einen Sprung betrachten, welcher in einer mathematischen Fläche stattfindet, sondern nur als eine sehr schnelle Aenderung in der Nähe dieser Fläche. Zur Erklärung derselben muss man, wie schon mehrfach, und besonders bestimmt von Helmholtz [2]) ausgesprochen ist, zwei zu beiden Seiten der Berührungsfläche sich gegenüberliegende entgegengesetzt electrische Schichten annehmen, also eine ähnliche Anordnung, wie bei einer geladenen Leidener Flasche oder Franklin'schen Tafel. Wir wollen den die beiden electrischen Schichten und ihren Zwischenraum umfassenden Raum, welcher im Ganzen nur eine sehr dünne Schicht bildet, die Uebergangsschicht der beiden Stoffe nennen.

§. 2. Grund der Potentialniveaudifferenz.

Es entsteht nun aber die Frage, was es für eine Kraft ist, welche diese beiden Schichten, die doch durch keinen nichtleiten-

[1]) In electrostatischen Untersuchungen legt man gewöhnlich den Satz zu Grunde, dass in einem ganzen Systeme unter sich verbundener Leiter im Zustande des Gleichgewichtes die Potentialfunction überall denselben Werth habe; dadurch sollen aber die durch Verschiedenheit der Stoffe bedingten Unterschiede nicht bestritten werden, sondern sie sind nur ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt, da man es in der Electrostatik gewöhnlich mit viel grösseren Unterschieden zu thun hat.

[2]) Pogg. Ann. Bd. 89.

den Körper von einander getrennt sind, hindert, sich in ihrem electrischen Zustande auszugleichen, und welche sogar, wenn die Electricität einen anderen Weg zur Ausgleichung hat, in demselben Maasse, wie dadurch die Differenz an der Berührungsfläche geringer werden würde, immer neue Electricität von der negativen nach der positiven Seite hinübertreibt, und so einen fortwährenden electrischen Strom möglich macht.

Helmholtz spricht sich darüber in seiner Schrift „über die Erhaltung der Kraft" S. 47 folgendermaassen aus: „Es lassen sich nämlich offenbar alle Erscheinungen in Leitern erster Classe (d. h. solchen, in denen die Leitung der Electricität ohne Electrolyse stattfindet) herleiten aus der Annahme, dass die verschiedenen chemischen Stoffe verschiedene Anziehungskräfte haben gegen die beiden Electricitäten und dass diese Anziehungskräfte nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirken, während die Electricitäten auf einander es auch in grösseren thun. Die Contactkraft würde danach in der Differenz der Anziehungskräfte bestehen, welche die der Berührungsstelle zunächst liegenden Metalltheilchen auf die Electricitäten dieser Stelle ausüben, und das electrische Gleichgewicht eintreten, wenn ein electrisches Theilchen, welches von dem einen zum anderen übergeht, nichts mehr an lebendiger Kraft verliert oder gewinnt."

Mit dieser Erklärung stimmen meines Wissens auch die Ansichten der meisten anderen Physiker überein, wenn die darüber vorhandenen Aussprüche auch minder klar und bestimmt sind; dessen ungeachtet glaube ich ihr wenigstens theilweise widersprechen zu müssen. Ob überhaupt eine Potentialniveaudifferenz in der hier angegebenen Weise bloss durch die verschiedenen Anziehungskräfte verschiedener chemischer Stoffe gegen die Electricität hervorgebracht wird, mag vorläufig dahingestellt bleiben, dass sich aber hieraus, wie behauptet wird, alle Erscheinungen in Leitern erster Classe herleiten lassen, muss ich bestreiten. Zur Erklärung der thermoelectrischen Ströme, und der von Peltier entdeckten, durch einen electrischen Strom verursachten Wärme- und Kälteerregung an der Berührungsstelle zweier Stoffe reicht diese Annahme nicht hin, sondern dazu ist eine andere Annahme nothwendig, nämlich die, dass die Wärme selbst bei der Bildung und Erhaltung der Potentialniveaudifferenz an der Berührungsstelle wirksam ist, indem die Molecularbewegung, welche wir Wärme nennen, die Electricität von dem einen

Stoffe zum anderen zu treiben strebt, und nur durch die entgegenwirkende Kraft der beiden dadurch gebildeten electrischen Schichten, wenn diese eine gewisse Dichtigkeit erreicht haben, daran verhindert werden kann.

Um dieses zuerst aus den thermoelectrischen Strömen nachzuweisen, denken wir uns irgend eine aus zwei Stoffen, als welche wir der Regel nach Metalle annehmen können, gebildete Kette gegeben. Wenn sich die ganze Kette in gleicher Temperatur befindet, so sind natürlich die Potentialniveaudifferenzen an den beiden Berührungsstellen gleich gross, und die Potentialfunction kann daher in jedem Metalle für sich einen constanten Werth haben, wie es dem Gleichgewichtszustande entspricht. Werden nun aber die beiden Berührungsstellen in verschiedene Temperaturen gebracht, so entsteht ein Strom, und daraus muss man schliessen, dass in Bezug auf die Vertheilung der Electricität eigenthümliche Bedingungen eingetreten sind, die sich durch keinen Gleichgewichtszustand erfüllen lassen.

Solche Bedingungen lassen sich aus der Annahme, dass die Potentialniveaudifferenzen nur durch die verschiedenen Anziehungskräfte chemisch verschiedener Stoffe gegen die Electricität hervorgebracht werden, nicht herleiten. Zunächst ist es überhaupt sehr unwahrscheinlich, dass solche Anziehungskräfte sich mit der Temperatur ändern sollten, und wenn dieses nicht der Fall wäre, so würde die Wärmevertheilung auf die Electricitätsvertheilung gar keinen Einfluss haben. Aber wenn man auch diesen Einwand fallen lässt, und die Abhängigkeit der Anziehungskräfte von der Temperatur als möglich zugiebt, so ist damit doch zur Erklärung einer fortwährenden Bewegung der Electricität noch gar nichts gewonnen, denn alsdann würde einfach jeder Theil der Kette so viel Electricität zu sich heranziehen, wie seiner augenblicklichen Anziehungskraft entspräche, und würde diese, so lange die Temperaturverhältnisse der Kette dieselben blieben, festhalten. Man kann denselben Schluss auch in folgender Weise aussprechen. Wenn ein Stoff bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Anziehungskräfte gegen die Electricität besässe, so würden sich verschieden warme Theile desselben Stoffes in dieser Beziehung eben so zu einander verhalten, wie verschiedene Stoffe bei gleicher Temperatur, so dass auch zwischen ihnen Potentialniveaudifferenzen entstehen müssten, und zwar in der Weise, dass eine Temperaturverschiedenheit in den Theilen einer thermoelectrischen Kette ge-

rade so wirken würde, wie eine vermehrte Stoffverschiedenheit bei gleicher Temperatur, welche wohl einen veränderten electrischen Gleichgewichtszustand, aber nie einen dauernden electrischen Strom zur Folge haben kann.

Anders verhält es sich, wenn man annimmt, dass die Wärme selbst bei der Bildung der Potentialniveaudifferenzen an den Berührungsstellen wirksam sei. Diese Annahme macht es nicht nur möglich, sondern sogar sehr wahrscheinlich, dass die Grösse der Differenzen von den dort stattfindenden Temperaturen abhänge, und giebt dabei doch durchaus keine Veranlassung zu dem Schlusse, dass auch zwischen den verschieden warmen Theilen eines und desselben Stoffes entsprechende Potentialniveaudifferenzen entstehen müssen. Man erhält also bei dieser Annahme in der That den eigenthümlichen Fall, dass einerseits die Verschiedenheit der Potentialniveaudifferenzen an den beiden Berührungsstellen es nothwendig macht, dass die Potentialfunction in den verschiedenen Theilen der einzelnen Stoffe verschiedene Werthe besitzt, und dass sich andererseits innerhalb jedes einzelnen Stoffes der electrische Zustand so auszugleichen sucht, dass die Potentialfunction in allen seinen Theilen denselben Werth hat. Diese beiden Bedingungen lassen sich durch einen Gleichgewichtszustand nicht gleichzeitig erfüllen, sondern erfordern einen continuirlichen Strom, ganz so, wie es der wirklichen Beobachtung entspricht.

Wir wenden uns nun zu der zweiten der oben erwähnten Erscheinungen, zu der von Peltier entdeckten, an der Berührungsfläche zweier Stoffe durch einen electrischen Strom verursachten Wärme- oder Kälteerregung. Von dieser Wirkung gilt natürlich dasselbe, was oben von der Veränderung der Potentialfunction gesagt ist, dass sie nicht auf eine mathematische Fläche beschränkt sein kann, sondern über den körperlichen Raum derjenigen Schicht vertheilt sein muss, welche wir oben mit dem Namen Uebergangsschicht bezeichnet haben. Zur Erklärung der in dieser Schicht stattfindenden Erzeugung oder Vernichtung von Wärme ist es erforderlich, eine entprechende, von irgend einer Kraft gethane positive oder negative Arbeit nachzuweisen.

Um zu sehen, wie die beiden einander gegenüberstehenden Annahmen sich in Bezug auf dieses Erforderniss verhalten, wollen wir zunächst wieder von der von Helmholtz ausgesprochenen Annahme ausgehen. Nach dieser wirken auf ein in diesem Raume

befindliches Electricitätstheilchen zwei verschiedene Kräfte, erstens eine rein electrische Kraft, indem das Theilchen zwischen den beiden electrischen Schichten von der einen angezogen und von der anderen abgestossen wird, und zweitens eine Molecularkraft, indem das Theilchen von den auf beiden Seiten befindlichen verschiedenartigen Molecülen verschieden stark angezogen wird. Wenn sich der Gleichgewichtszustand hergestellt hat, so wirken sich diese beiden Kräfte mit gleicher Stärke entgegen, so dass beim Uebergange des Theilchens eine eben so grosse Arbeit von der einen erlitten, wie von der anderen gethan werden würde, und daher, wie es auch Helmholtz ausspricht, weder ein Gewinn noch ein Verlust an lebendiger Kraft eintreten könnte. Während eines Stromes dagegen ist die electrische Kraft ein wenig grösser oder kleiner, als die Molecularkraft, so dass das Electricitätstheilchen jener oder dieser folgen muss. Man kann dieses Verhältniss am einfachsten dadurch darstellen, dass man die während des Gleichgewichts wirksamen einander gleichen Kräfte auch jetzt ganz unverändert beibehält, ausserdem aber noch eine kleine electrische Kraft als dritte hinzufügt, welche nach der einen oder anderen Seite gerichtet ist, und gerade nur dazu hinreicht, den Leitungswiderstand innerhalb der Uebergangsschicht zu überwinden, und so die Electricität in Bewegung zu erhalten. Diese Kraft ist ganz dieselbe, welche bei gleicher Stromstärke auch in jeder mit einem gleichen Leitungswiderstande versehenen Schicht eines homogenen Leiters vorhanden sein muss, und somit können auch die von ihr gethane Arbeit und erzeugte Wärme keine anderen sein, als die, welche in einer solchen homogenen Schicht vorkommen, und welche bei der Kleinheit des Leitungswiderstandes einer so dünnen Schicht hier vernachlässigt werden können. Die an der Berührungsstelle stattfindende eigenthümliche Erscheinung, welche von Peltier beobachtet ist, bleibt bei dieser Annahme also unerklärt.

Wir wollen nun in gleicher Weise von der anderen Annahme ausgehen, nach der es die Wärme ist, welche innerhalb der Uebergangsschicht die Electricität von der einen nach der anderen Seite zu treiben strebt, und dadurch der electrischen Kraft entgegenwirkt. Während des Gleichgewichtszustandes wird dieses Streben von der electrischen Kraft gerade compensirt; während eines Stromes dagegen ist die letztere, wie vorher erwähnt, etwas vergrössert oder verkleinert und dadurch wird der Uebergang der

Electricität in der einen oder anderen Richtung veranlasst. Dabei thut oder erleidet die electrische Kraft eine gewisse Arbeit, und diese kann nicht durch eine entgegengesetzte Arbeit einer anderen Kraft aufgehoben werden, da unserer Annahme nach keine zweite Kraft vorhanden ist, sondern die Wirkungen, welche Helmholtz einer solchen zuschreiben zu müssen glaubte, durch die Wärme, also durch eine Bewegung, hervorgebracht werden. Demnach muss jene ganze Arbeit eine äquivalente Vermehrung oder Verminderung der lebendigen Kraft zur Folge haben, und daraus erhalten wir, da lebendige Kraft hier nur in der Form von Wärme vorkommt, die von Peltier beobachtete Wärme- oder Kälteerregung.

Ich glaube den ganzen Zustand in der Uebergangsschicht am besten mit dem vergleichen zu können, wenn ein in einer ausdehnsamen Hülle befindliches Quantum Gas durch einen äusseren Druck zusammengehalten wird, während die Wärmebewegung seiner Molecüle es auszudehnen sucht. Wird die äussere Kraft, welche vorher dem Ausdehnungsbestreben der Wärme gerade das Gleichgewicht hielt, ein Wenig vergrössert oder verkleinert, so drückt sie das Gas weiter zusammen oder lässt es sich weiter ausdehnen; dabei thut oder erleidet sie eine gewisse Arbeit, und zugleich wird in dem Gase eine äquivalente Menge Wärme erzeugt oder vernichtet.

Will man in Bezug auf die Arbeit diejenige Ausdrucksweise anwenden, welche in der mechanischen Wärmetheorie gebräuchlich ist, dass man die durch die Wärme bewirkte Ueberwindung einer Kraft als gewonnene Arbeit und die von der Kraft selbst gethane Arbeit als verbrauchte Arbeit bezeichnet, so kann man sagen: wenn die Electricität sich unter dem Einflusse der Wärme in dem der electrischen Kraft entgegengesetzten Sinne bewegt, so wird Arbeit gewonnen und dafür eine entsprechende Menge Wärme verbraucht. Findet dagegen die Bewegung der Electricität im Sinne der electrischen Kraft statt, so wird Arbeit verbraucht und dafür Wärme gewonnen, gerade so wie bei der Ausdehnung eines Gases und der dabei stattfindenden Ueberwindung des Gegendruckes Arbeit gewonnen und Wärme verbraucht, und bei der Zusammendrückung des Gases Arbeit verbraucht und Wärme gewonnen wird.

§. 3. Unterscheidung der hier angenommenen Potentialniveaudifferenz von einer anderen.

Es hat sich also ergeben, dass wenn man an der Berührungsstelle zweier Stoffe eine durch die Wärme verursachte Potentialniveaudifferenz annimmt, dann die durch den Strom je nach seiner Richtung erregte Wärme oder Kälte eine nothwendige Folge davon ist. Demgemäss können wir nun auch umgekehrt die letztere Erscheinung als einen Beweis für das Vorhandensein, und zugleich als ein Maass jener Potentialniveaudifferenz betrachten. Hiermit scheint aber eine andere Thatsache im Widerspruche zu stehen. Da nämlich die Wärme- oder Kälteerregung am stärksten beim Wismuth und Antimon stattfindet, so muss man schliessen, dass zwischen diesen beiden Metallen auch die Potentialniveaudifferenz am grössten ist; electroskopische Versuche dagegen zeigen zwischen anderen Metallen, wie z. B. Kupfer und Zink, viel grössere Differenzen, als zwischen Wismuth und Antimon. Dieser Widerspruch lässt sich auf zwei verschiedene Weisen erklären.

Erstens kann man annehmen, dass ausser der durch die Wärme verursachten Potentialniveaudifferenz gleichzeitig noch eine andere bestehe, welche in der von Helmholtz angegebenen Weise nur durch die verschiedenen Molecularanziehungen hervorgebracht werde, und dass diese, wenn sie auch auf die thermoelectrischen Erscheinungen keinen Einfluss übe, doch bei den electroskopischen Erscheinungen zur vollen Geltung komme, und sich dabei sogar meistens als die grössere von beiden erweise. Zweitens kann man annehmen, dass die bei electroskopischen Versuchen beobachtete Differenz nicht durch die unmittelbare Berührung der beiden untersuchten Stoffe, z. B. des Kupfers und Zinks, entstehe, und überhaupt gar nicht zur Zahl derjenigen Erscheinungen gehöre, welche bei der Berührung von nur Leitern erster Classe eintreten, sondern zur Zahl derer, welche durch die Mitwirkung von Leitern zweiter Classe (d. h. von solchen, die die Electricität durch Electrolyse leiten) veranlasst werden. Man kann in dieser Beziehung anführen, dass bei einem electroskopischen Versuche, selbst wenn die untersuchten Metalle mit keinem fremden Körper, wie z. B. mit der Hand, sondern nur unter sich in Berührung gebracht werden, dadurch doch die Mitwirkung fremder Stoffe nicht

ganz ausgeschlossen werden könne, denn die Metalle selbst seien an ihrer Oberfläche von einer Schicht comprimirter Gase und vielleicht auch condensirter Dämpfe bedeckt, welche bei nicht zusammengelötheten, sondern nur zusammengedrückten Metallstücken den wirklich metallischen Contact verhindere, und durch ihr Dazwischentreten die electroskopischen Erscheinungen wesentlich modificire.

Welche von diesen beiden Erklärungsarten vorzuziehen ist, soll hier nicht erörtert werden, da es für die Untersuchung der thermoelectrischen Ströme und ihrer Wirkungen gleichgültig ist. Für diese genügt es, wenn die durch die Wärme verursachte Potentialniveaudifferenz dem obigen Schlusse gemäss als existirend anerkannt wird, denn nur mit ihr haben wir es hier zu thun, und wenn daher im Folgenden kurz von der Potentialniveaudifferenz die Rede ist, so soll damit immer nur diese eine gemeint sein, ganz abgesehen davon, ob daneben noch eine andere besteht, oder nicht.

§. 4. Stromstärke in einer aus zwei Stoffen bestehenden Thermokette.

Wir wollen nun die Thermokette im Ganzen betrachten, und dazu zunächst eine solche wählen, die nur aus zwei leitenden Stoffen besteht. Dabei wollen wir die Voraussetzung machen, dass die Thermokette keinerlei inducirende Wirkungen nach Aussen hin ausübe oder von Aussen her erleide, sondern einfach sich selbst überlassen sei.

Die beiden der Einfachheit wegen als linear vorausgesetzten Leiter mögen a und b und ihre Verbindungsstellen p' und p'' heissen, und die dort herrschenden absoluten Temperaturen mit T' und T'' bezeichnet werden. Für den Strom und ebenso für die electromotorische Kraft nehmen wir eine bestimmte Richtung als die positive an, und zwar wollen wir dazu die Richtung $p'ap''bp'$ wählen. Die Potentialfunction im Leiter a bezeichnen wir mit V_a und ihre Grenzwerthe an den Puncten p' und p'' mit V'_a und V''_a, und ebenso bezeichnen wir im Leiter b die Potentialfunction allgemein mit V_b und ihre Grenzwerthe mit V'_b und V''_b. Die an den Verbindungsstellen stattfindenden Potentialniveaudifferenzen, beide im Sinne des positiven Stromes genommen, mö-

gen für p'' mit E''_{ab} und für p' mit E'_{ba} bezeichnet werden; dann haben wir zu setzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} E''_{ab} = V''_b - V''_a \\ E'_{ba} = V'_a - V'_b. \end{cases}$$

Um nun die durch diese Potentialniveaudifferenzen verursachte Stromstärke zu bestimmen, bilden wir zunächst, indem wir die Leitungswiderstände in den beiden Leitern a und b mit l_a und l_b bezeichnen, folgende zwei Gleichungen:

$$\text{Stromstärke in } a = \frac{V'_a - V''_a}{l_a}$$

$$\text{Stromstärke in } b = \frac{V''_b - V'_b}{l_b}.$$

Beide Stromstärken müssen unter einander gleich sein, und wir wollen ihren gemeinsamen Werth, welchen wir einfach die Stromstärke der Thermokette nennen, mit J bezeichnen. Indem wir nun die vorigen Brüche beide gleich J setzen und die so entstehenden Gleichungen mit l_a und l_b multipliciren, erhalten wir:

$$Jl_a = V'_a - V''_a$$

$$Jl_b = V''_b - V'_b.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen kommt:

$$J(l_a + l_b) = V'_a - V'_a + V''_b - V'_b.$$

Führen wir hierin gemäss (2) die Zeichen E''_{ab} und E'_{ba} ein, und bezeichnen zugleich die Summe $l_a + l_b$, welche den ganzen Leitungswiderstand der Kette bedeutet, mit L, so kommt:

$$JL = E''_{ab} + E'_{ba}$$

oder auch:

$$(3) \qquad J = \frac{E''_{ab} + E'_{ba}}{L}.$$

Aus dieser Gleichung folgt nach dem Ohm'schen Gesetze, dass die im Zähler des Bruches stehende Summe der beiden Potentialniveaudifferenzen die ganze electromotorische Kraft der Thermokette ist. Bezeichnen wir diese mit F, so haben wir zu setzen:

$$(4) \qquad F = E''_{ab} + E'_{ba}.$$

§. 5. Arbeitsleistung und Wärmeerzeugung in der Thermokette.

Da jedes Theilchen der in der Kette strömenden Electricität nach einander an Stellen von verschiedenem Potentialniveau kommt, so wird dabei von den electrischen Kräften Arbeit geleistet, welche an einigen Stellen positiv, an anderen negativ ist.

Betrachten wir zuerst eine Uebergangsschicht, z. B. die bei p'', so gelangt jedes Electricitätstheilchen dq, indem es sich durch die Schicht bewegt, vom Potentialniveau V''_a zum Potentialniveau V''_b. Die dabei von der electrischen Kraft gethane Arbeit, welche durch die Abnahme des Potentials der getrennt vorhandenen Electricität auf das Theilchen dq dargestellt wird, ist gleich $(V''_a - V''_b)\,dq$ oder $-E''_{ab}\,dq$. Wenn wir dieses auf alle während der Zeiteinheit durch die Schicht strömende Electricität, deren Menge gleich J ist, anwenden, so erhalten wir für die Arbeit, welche während der Zeiteinheit in dieser Uebergangsschicht von der electrischen Kraft gethan wird, den Ausdruck $-E''_{ab}\,J$. Ebenso erhalten wir für die in der Uebergangsschicht bei p' gethane Arbeit den Ausdruck $-E'_{ba}\,J$. Setzen wir in diese Ausdrücke für J seinen Werth aus (3) ein, so erhalten wir:

$$(5)\quad\begin{cases}\text{Arbeit in der Uebergangsschicht bei } p'' = -E''_{ab}\,\dfrac{E''_{ab}+E'_{ba}}{L}\\[2ex]\text{Arbeit in der Uebergangsschicht bei } p' = -E'_{ba}\,\dfrac{E''_{ab}+E'_{ba}}{L}.\end{cases}$$

Diese Arbeitsgrössen sind negativ oder positiv, je nachdem die die Schicht durchströmende Electricität von niedrigerem zu höherem oder von höherem zu niedrigerem Potentialniveau gelangt.

Fasst man beide Ausdrücke zusammen, so erhält man:

$$(6)\quad \text{Arbeit in beiden Uebergangsschichten} = -\frac{(E''_{ab}+E'_{ba})^2}{L}.$$

Dieser Ausdruck ist jedenfalls negativ und der Durchgang der Electricität durch beide Uebergangsschichten zusammen findet also gegen die electrischen Kräfte statt, was daraus zu erklären ist, dass die electrischen Kräfte durch die Wirkung der Wärme überwunden werden.

Betrachten wir nun weiter die homogenen Leiter a und b, so wird in diesen von den electrischen Kräften beim Strömen der Electricität diejenige Arbeit geleistet, welche zur Ueberwindung des Leitungswiderstandes nöthig ist. Diese Arbeit ist, gemäss der in Abschnitt V. unter (6) gegebenen Gleichung, im Leiter a gleich $l_a J^2$ und im Leiter b gleich $l_b J^2$. Für beide Leiter zusammen erhalten wir also, wenn wir wieder die Summe $l_a + l_b$ mit L bezeichnen, den Ausdruck LJ^2, und wenn wir hierin für J seinen Werth aus (3) setzen, so kommt:

$$(7) \qquad \text{Arbeit in den Leitern} = \frac{(E''_{ab} + E'_{ba})^2}{L}.$$

Da dieser Ausdruck dem in (6) gegebenen Ausdrucke der in den beiden Uebergangsschichten zusammen gethanen Arbeit gleich und entgegengesetzt ist, so folgt daraus, dass die Summe aller in der Thermokette von den electrischen Kräften gethanen Arbeitsgrössen gleich Null ist. Dieses ist auch von vornherein selbstverständlich. Wenn nämlich die electrischen Kräfte während einer gegebenen Zeit innerhalb der Thermokette im Ganzen eine Arbeit thun oder erleiden sollten, so könnte dieses nur durch eine veränderte Anordnung der Electricität geschehen, und jede solche Aenderung ist durch die Annahme, dass der Strom stationär sei, ausgeschlossen.

Mit der vorher besprochenen in den verschiedenen Theilen der Kette von den electrischen Kräften gethanen, theils positiven, theils negativen Arbeit hängt nun auch Erzeugung und Verbrauch von Wärme zusammen. In den Uebergangsschichten wird, je nachdem die Bewegung der Electricität im Sinne der electrischen Kraft oder ihr entgegen geschieht, Wärme erzeugt oder verbraucht. In beiden Uebergangsschichten zusammen findet Verbrauch von Wärme statt, weil dem Obigen nach die Summe der in ihnen gethanen Arbeitsgrössen negativ ist. In den homogenen Leitern, wo die electrischen Kräfte den Leitungswiderstand zu überwinden haben, findet Erzeugung von Wärme statt. Was die Mengen der erzeugten und verbrauchten Wärme anbetrifft, so sind sie unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass die Thermokette, ohne Wirkungen nach Aussen hin auszuüben oder von Aussen her zu erleiden, nur sich selbst überlassen ist, und dass in ihr neben den Wärmeveränderungen keine weiteren Veränderungen mechanischer oder chemischer Natur vorkommen, den oben bestimmten Arbeits-

grössen äquivalent. Wenn wir uns die Wärme nach **mechanischem** Maasse gemessen denken, so werden die Wärmemengen einfach durch dieselben Ausdrücke dargestellt, wie die betreffenden Arbeitsgrössen, und es wird daher nicht nöthig sein, länger dabei zu verweilen. Es möge nur noch angeführt werden, dass die algebraische Summe aller in der Thermokette erzeugten Wärmemengen (wobei verbrauchte Wärmemengen negativ gerechnet werden), ebenso wie die Summe aller von den electrischen Kräften gethanen Arbeitsgrössen, gleich Null ist.

Wir können diejenigen Theile der Thermokette, in welchen die Wärme selbst thätig ist, indem sie entweder die Electricität nach einer bestimmten Richtung treibt, oder der vorhandenen Bewegung widerstrebt, also in unserem bisher betrachteten einfachen Falle die beiden Uebergangsschichten bei p' und p'', mit jeder vollkommenen durch Wärme getriebenen Maschine vergleichen. Wie durch die Maschine z. B. ein Gewicht gehoben, also der Schwerkraft entgegen bewegt werden kann, wobei die Schwerkraft eine Arbeit erleidet, so wird hier die Electricität zu einer Bewegung gezwungen, welche der electrischen Kraft entgegengerichtet ist, und bei der diese daher eine Arbeit erleidet. Wie man ferner dort das gehobene Gewicht nachher wieder sinken und somit der Schwerkraft folgen lassen kann, wobei diese eine Arbeit thut, die der vorher erlittenen genau gleich ist, und welche man zur Hervorbringung verschiedener Wirkungen benutzen kann, so strömt auch hier die Electricität wieder zurück, indem sie innerhalb der homogenen Leiter der electrischen Kraft folgt, und die von dieser dabei gethane Arbeit kann ebenfalls zu verschiedenen Wirkungen benutzt werden, da man ja aus den electrischen Strömen eine mechanische Triebkraft gewinnen kann. Wenn wir, um die Uebereinstimmung noch vollständiger zu machen, auch die beschränkende Voraussetzung, welche wir über die Wirkungen des Stromes im Vorigen gemacht haben, in entsprechender Weise bei der Maschine machen wollen, so müssen wir annehmen, dass die ganze Arbeit der Maschine nur zur Ueberwindung von Reibung benutzt werde. In diesem Falle wird durch die Reibung gerade so viel Wärme erzeugt, wie in der Maschine selbst verbraucht wird, und betrachten wir daher, um ein mit der ganzen Thermokette vergleichbares System zu erhalten, die sich reibenden Körper als mit der Maschine zusammengehörig, so findet in diesem Systeme ebenfalls weder ein Gewinn noch ein Verlust an Wärme statt.

§. 6. Vorhandensein eines durch die Thermokette vermittelten Wärmeüberganges.

Indem wir vorher die Theile der Thermokette, in welchen die Wärme selbst thätig ist, also die beiden Uebergangsschichten, mit einer thermodynamischen Maschine verglichen, richteten wir unser Augenmerk nur auf den Verbrauch oder die Erzeugung von Wärme. Nun findet aber in einer thermodynamischen Maschine, ausser der Veränderung der Quantität der im Ganzen vorhandenen Wärme, auch ein Uebergang von Wärme von einem warmen zu einem kalten Körper statt, welcher durch den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie näher bestimmt wird, und wir müssen daher die Thermokette auch von diesem Gesichtspuncte aus betrachten.

Zunächst wollen wir uns die allgemeinere Frage stellen, ob sich in der Thermokette überhaupt ein Wärmeübergang von einem warmen zu einem kalten Körper nachweisen lässt. Wir betrachten dabei wieder, wie bisher, die aus nur zwei homogenen Stoffen bestehende Kette, bei welcher die Wärme nur in den beiden Uebergangsschichten thätig ist. Oben wurde gezeigt, dass der Ausdruck für die in beiden Schichten zusammen erzeugte Wärme negativ ist; daraus darf man aber nicht denselben Schluss für jede Schicht einzeln ziehen, sondern man kann vielmehr, wenigstens für geringe Temperaturintervalle, im Voraus als Regel annehmen, dass die beiden einzelnen Ausdrücke von entgegengesetzten Vorzeichen sind. Bei gleichen Temperaturen sind nämlich die Potentialniveaudifferenzen an beiden Berührungsstellen gleich und entgegengesetzt; wenn sich nun die Temperatur der einen Stelle ändert, so ändert sich auch ihre Potentialniveaudifferenz, da diese Aenderung aber stetig vor sich geht, so kann sie wenigstens nicht gleich anfänglich eine Umkehrung des Vorzeichens bewirken, und so lange dieses nicht geschieht, behalten die Potentialniveaudifferenzen, und mit ihnen natürlich auch die entsprechenden Arbeitsgrössen und Wärmemengen entgegengesetzte Vorzeichen. Dieses Verhalten wollen wir daher auch in der von uns betrachteten Thermokette voraussetzen, indem wir die bei grossen Temperaturunterschieden zuweilen vorkommenden Abweichungen, von denen später die Rede sein wird, für jetzt unberücksichtigt lassen. Da

der Zustand der ganzen Kette der Annahme nach stationär sein soll, und somit die an den beiden Berührungsstellen stattfindenden Temperaturen T' und T'' constant sein müssen, so denken wir uns dieses dadurch bewirkt, dass die beiden Berührungsstellen mit zwei Körpern in Verbindung gesetzt sind, welche bleibend auf den Temperaturen T' und T'' erhalten werden, und von denen der eine seiner Berührungsstelle die verbrauchte Wärme wieder ersetzt, der andere der seinigen die erzeugte Wärme entzieht. Dadurch erfährt der eine Körper einen Verlust, der andere einen Gewinn an Wärme, und wir erhalten somit wirklich einen durch die Thermokette vermittelten Uebergang von Wärme von einem Körper zu einem anderen.

Es fragt sich nun noch, ob dieser Uebergang auch der Bedingung genüge, dass er vom warmen zum kalten Körper, und nicht etwa in umgekehrter Richtung geschieht. Betrachten wir in dieser Beziehung die beiden Stoffe, deren thermoelectrische Wirkungen am meisten experimentell untersucht sind, und bei denen die Entscheidung daher am sichersten ist, nämlich Wismuth und Antimon, so ergiebt sich in der That das erstere, denn bei einer aus diesen Stoffen zusammengesetzten Kette geht der Strom an der warmen Berührungsstelle vom Wismuth zum Antimon, und an der kalten vom Antimon zum Wismuth, und andererseits weiss man, dass ein durch die Berührungsstellen gehender Strom bei der ersteren Richtung Abkühlung hervorbringt, also Wärme verbraucht, und bei der letzteren Wärme erzeugt. Demnach erfährt, wie es sein muss, der wärmere Körper den Verlust und der kältere den Gewinn an Wärme, und in ähnlicher Weise stellt sich die Uebereinstimmung auch bei den anderen bis jetzt untersuchten Stoffen heraus. Man sieht leicht, wie durch dieses Resultat die oben durchgeführte Analogie zwischen der Thermokette und einer durch die Wärme getriebenen Maschine noch vervollständigt wird, denn offenbar entspricht die warm gehaltene Berührungsstelle dem geheizten Theile der Maschine, und die kalt gehaltene dem Condensator der Dampfmaschine oder dem Theile, wo die kalte Luft comprimirt wird, in der durch warme Luft getriebenen Maschine.

§. 7. Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie.

Nachdem so das Vorhandensein des Wärmeüberganges nachgewiesen ist, wollen wir den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie auf ihn anwenden. Eine sehr einfache Form dieses Satzes erhält man, wenn man die Temperaturen der beiden Körper, welche die Wärmezu- und -abfuhr bewirken, als unendlich wenig von einander verschieden annimmt. Wir wollen die bei p'' stattfindende, bisher mit T'' bezeichnete Temperatur, welche wir als die höhere voraussetzen, jetzt einfach mit T bezeichnen, und die bei p' stattfindende, bisher mit T' bezeichnete Temperatur gleich $T - dT$ setzen. Dann gilt für den vollständigen Process, bei welchem eine gewisse Wärmemenge in Arbeit verwandelt oder, wie man auch sagen kann, zu Arbeit verbraucht wird, und eine andere Wärmemenge von dem wärmeren zu dem kälteren Körper übergeht, die Gleichung:

$$\text{(8)} \qquad \frac{\text{die verbrauchte Wärme}}{\text{die übergegangene Wärme}} = \frac{dT}{T}.$$

Um nun die an der linken Seite dieser Gleichung im Zähler und Nenner stehenden Wärmemengen zu bestimmen, müssen wir die auf die beiden Uebergangsschichten bezüglichen Gleichungen (5) anwenden, welche zunächst für die dort gethanen Arbeitsgrössen aufgestellt sind, aber auch für die dort erzeugten Wärmemengen gelten, und in welche wir nur für die die Potentialniveaudifferenzen darstellenden Zeichen die auf unseren Fall bezüglichen Werthe einzusetzen haben. Die bei p'' stattfindende Potentialniveaudifferenz wollen wir jetzt einfach mit E bezeichnen, so dass zu setzen ist:

$$E''_{ab} = E.$$

Was die bei p' stattfindende Potentialniveaudifferenz E'_{ba} anbetrifft, so ist erstens zu bemerken, dass sie wegen der umgekehrten Reihenfolge der Stoffe a und b das entgegengesetzte Vorzeichen hat, und zweitens ist ihr absoluter Werth um so viel vom vorigen verschieden anzunehmen, wie es der um dT niedrigeren Temperatur entspricht. Es ist also zu setzen:

$$E'_{ba} = -\left(E - \frac{dE}{dT}\,dT\right).$$

Aus der Vereinigung beider Gleichungen folgt:

$$E''_{ab} + E'_{ba} = \frac{dE}{dT}\,dT.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen (5) ein, so kommt:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{Bei } p'' \text{ erzeugte Wärme} = -\dfrac{E}{L}\dfrac{dE}{dT} \\ \text{Bei } p' \text{ erzeugte Wärme} = \dfrac{E}{L}\dfrac{dE}{dT}\,dT - \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{dE}{dT}\right)^2 dT^2, \end{cases}$$

und hieraus folgt weiter:

$$(10)\quad \text{Bei } p' \text{ und } p'' \text{ erzeugte Wärme} = -\frac{1}{L}\left(\frac{dE}{dT}\right)^2 dT^2.$$

Da der letzte Ausdruck negativ ist, so ergiebt sich daraus, wie schon oben besprochen wurde, für beide Uebergangsschichten zusammen ein Wärmeverbrauch, und der absolute Werth des Ausdruckes stellt die Menge der verbrauchten Wärme dar, also die Grösse, welche in dem in der Gleichung (8) vorkommenden Bruche den Zähler bildet.

Was ferner die im Nenner stehende übergegangene Wärmemenge anbetrifft, so ist als solche die bei p' erzeugte Wärmemenge anzusehen, welche durch die zweite der Gleichungen (9) bestimmt wird, wobei noch zu bemerken ist, dass wir in dem betreffenden Ausdrucke das in Bezug auf dT quadratische Glied gegen das lineare vernachlässigen können. Die Gleichung (8) geht also über in:

$$\frac{\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{dE}{dT}\right)^2 dT^2}{\dfrac{E}{L}\dfrac{dE}{dT}\,dT} = \frac{dT}{T},$$

welche Gleichung sich vereinfacht in:

$$(11)\qquad \frac{dE}{E} = \frac{dT}{T},$$

und aus welcher sich durch Integration ergiebt:

$$(12)\qquad E = \varepsilon T,$$

worin ε eine von der Natur der sich berührenden Stoffe abhängige Constante bedeutet.

Wir sind somit in Bezug auf die Art, wie die zwischen zwei verschiedenen Stoffen stattfindende Potentialniveaudifferenz sich mit der Temperatur ändert, zu dem einfachen Gesetze gelangt, dass die Potentialniveaudifferenz der absoluten Temperatur proportional ist. Dabei ist aber wohl zu beachten, dass die das Gesetz ausdrückende Gleichung (12) in der einfachen Form, dass ε constant ist, nur so weit als gültig angesehen werden darf, wie die unserer bisherigen Entwickelung zu Grunde liegende Voraussetzung, dass innerhalb der einzelnen Stoffe keine electromotorischen Kräfte auftreten, erfüllt ist.

Wenden wir jenen für E gewonnenen Ausdruck auf eine Thermokette an, deren Verbindungsstellen p' und p'' beliebige Temperaturen T' und T'' haben, so haben wir zu setzen:

$$E''_{ab} = \varepsilon_{ab}\, T''$$
$$E'_{ba} = \varepsilon_{ba}\, T' = -\,\varepsilon_{ab}\, T'.$$

Dadurch geht die für die ganze electromotorische Kraft der Thermokette geltende Gleichung (4) über in:

$$F = \varepsilon_{ab}\,(T'' - T'). \tag{13}$$

Wir wollen uns nun statt der aus zwei Stoffen bestehenden Thermokette eine solche gegeben denken, welche aus einer beliebigen Anzahl n von leitenden Stoffen besteht, die a, b, $c \dots h$ heissen mögen. Die Verbindungsstellen wollen wir, vom Anfangspuncte des Leiters a beginnend, mit p', p'', $p''' \dots\dots p^{(n)}$ bezeichnen, so dass p'' die Verbindungsstelle zwischen a und b, p''' die Verbindungsstelle zwischen b und c und zuletzt p' die Verbindungsstelle zwischen h und a ist. Die an diesen Verbindungsstellen stattfindenden Potentialniveaudifferenzen mögen E''_{ab}, $E'''_{bc} \dots\dots E'_{ha}$ heissen. Dann haben wir zur Bestimmung der electromotorischen Kraft der Thermokette, entsprechend der Gleichung (4), zu setzen:

$$F = E''_{ab} + E'''_{bc} + \cdots + E'_{ha}. \tag{14}$$

Bezeichnen wir ferner die in den Ausdrücken der Potentialniveaudifferenzen vorkommenden constanten Factoren der Reihe nach mit ε_{ab}, $\varepsilon_{bc} \dots\dots \varepsilon_{ha}$ und nennen die Temperaturen der Verbindungsstellen, von derjenigen, welche den Anfangspunct des Leiters a bildet, beginnend, T', T'', $T''' \dots\dots T^{(n)}$, so geht die vorige Gleichung über in:

$$F = \varepsilon_{ab}\, T'' + \varepsilon_{bc}\, T''' + \cdots\cdots + \varepsilon_{ha}\, T'. \tag{15}$$

§. 8. Uebereinstimmungspuncte des obigen Resultates mit der Erfahrung.

Vergleicht man das in der Gleichung (12) ausgedrückte Resultat der obigen Entwickelungen mit der Erfahrung, so findet man in mehrfacher Beziehung eine unzweifelhafte Uebereinstimmung.

Der erste zu besprechende Punct bezieht sich nur darauf, dass der in (12) gegebene Ausdruck einem allgemeinen Erfordernisse entspricht. Wenn in einer aus beliebig vielen Stoffen a, b, c .... h bestehenden Thermokette alle Verbindungsstellen eine und dieselbe Temperatur T haben, so entsteht kein Strom und die electromotorische Kraft der Kette muss somit Null sein. Man hat also für diesen Fall, gemäss (14), zu setzen:

$$E_{ab} + E_{bc} + \cdots + E_{ha} = 0,$$

und dieser Gleichung müssen die Potentialniveaudifferenzen für jeden beliebigen Werth der gemeinsamen Temperatur T genügen. Setzt man nun für die Potentialniveaudifferenzen ihre Ausdrücke nach (12), indem man bei allen dieselbe Temperatur T in Anwendung bringt, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \cdots + \varepsilon_{ha})\, T = 0,$$

und aus der Form dieser Gleichung ersieht man sofort, dass, wenn die Constanten solche Werthe haben, dass die Gleichung für Eine Temperatur erfüllt ist, sie auch für alle Temperaturen erfüllt ist.

Wir wollen nun einige specielle Folgerungen, welche sich aus (12) ergeben, mit der Erfahrung vergleichen.

1. Nach (12) nehmen die Potentialniveaudifferenzen bei wachsender Temperatur zu und nicht ab. Um die Richtigkeit dieses Schlusses zu prüfen, müssen wir uns erinnern, dass der Strom immer die Richtung wählt, in welcher die Summe der Potentialniveaudifferenzen positiv ist, also für den Fall, wo nur zwei Differenzen vorkommen, die Richtung, in welcher die grössere von ihnen positiv ist. Es braucht also zum Beweise, dass die Potentialniveaudifferenz an der wärmeren Berührungsstelle die grössere ist, nur gezeigt zu werden, dass sie in Bezug auf die Stromrichtung die positive ist, und dieses ist schon oben geschehen, indem aus der Erfahrung nachgewiesen ist, dass an der

wärmeren Berührungsstelle ein Verbrauch von Wärme stattfindet, was einer negativen Arbeit und somit einer im Sinne des Stromes stattfindenden Zunahme des Potentialniveaus entspricht.

2. Nach (12) sind die Aenderungen jeder Potentialniveaudifferenz den entsprechenden Temperaturänderungen proportional. Hiernach muss, wie aus (13) zu ersehen ist, bei jeder aus zwei homogenen Stoffen zusammengesetzten Thermokette die electromotorische Kraft [1]) dem an beiden Berührungsstellen angewandten Temperaturunterschiede proportional sein, und dieses kann in der That für nicht zu grosse Temperaturunterschiede im Allgemeinen als Regel bezeichnet werden.

3. Nach (12) müssen diejenigen Potentialniveaudifferenzen, deren Zunahme mit der Temperatur am grössten ist, auch ihren ganzen Werthen nach die grössten sein. Betrachten wir nämlich irgend zwei Combinationen von je zwei Stoffen, etwa a, b und c, d, so haben wir zu setzen:

$$E_{ab} = \varepsilon_{ab}\, T \text{ und } E_{cd} = \varepsilon_{cd}\, T,$$

woraus folgt:

$$\frac{dE_{ab}}{dT} = \varepsilon_{ab} \text{ und } \frac{dE_{cd}}{dT} = \varepsilon_{cd}$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich die Proportion:

$$\frac{dE_{ab}}{dT} : \frac{dE_{cd}}{dT} = E_{ab} : E_{cd}.$$

Auch dieser Schluss bestätigt sich, indem diejenigen Stoffcombinationen, welche bei einem bestimmten Temperaturunterschiede die stärksten Ströme geben, wie z. B. die von Wismuth und Antimon, sich auch dadurch auszeichnen, dass ein durch ihre Berührungsstelle gehender Strom dort am meisten Wärme erzeugt oder vernichtet, wobei die erstere Eigenschaft auf einen grossen Werth des Differentialcoëfficienten $\frac{dE}{dt}$, und die letztere auf einen grossen Werth der Function E selbst schliessen lässt.

---

[1]) Man darf hier statt der electromotorischen Kraft nicht ohne Weiteres die Stromstärke setzen, weil die letztere auch vom Leitungswiderstande abhängt, welcher sich mit der Temperatur ändert.

§. 9. Abweichungen des obigen Resultates von der Erfahrung und ihre Erklärung.

Die vorstehend erwähnten Bestätigungen lassen wohl keinen Zweifel daran bestehen, dass der in der Gleichung (12) gegebene Ausdruck nicht bloss, wie eine empirische Formel innerhalb gewisser Grenzen eine äusserliche, vielleicht zufällige Aehnlichkeit mit dem Verhalten der Potentialniveaudifferenzen zeigt, sondern dass er in der Natur der Sache selbst begründet ist. Dessen ungeachtet stellt er allein die Erscheinungen noch nicht genau dar, vielmehr findet man bei näherer Untersuchung derselben, besonders in den Fällen, wo hohe Temperaturen vorkommen, erhebliche Abweichungen, welche zeigen, dass bei der Hervorbringung dieser Erscheinungen noch Nebenumstände mitwirken müssen, die bei der Ableitung des Ausdruckes nicht berücksichtigt sind. Am deutlichsten tritt dieses bei einer aus Eisen und Kupfer bestehenden Thermokette hervor, welche bekanntlich bei allmälig fortschreitender Erwärmung der einen Berührungsstelle statt beständiger Zunahme des Stromes von einer gewissen Temperatur an eine Abnahme, und bei der Glühhitze sogar eine Umkehrung des Stromes zeigt.

Diese Abweichungen lassen darauf schliessen, dass die unserer obigen Entwickelung zu Grunde gelegte Voraussetzung, dass die in einer Thermokette vorkommenden electromotorischen Kräfte nur an den Verbindungsstellen verschiedener Stoffe ihren Sitz haben, während im Inneren eines einzelnen Stoffes, auch wenn seine Theile verschiedene Temperaturen haben, keine electromotorischen Kräfte vorkommen, ungenau sein muss. Wollte man z. B. bei der Eisen-Kupferkette die Entstehung des Stromes nur aus den beiden an den Berührungsstellen stattfindenden Potentialniveaudifferenzen erklären, so müsste man schliessen, dass bei der Temperatur, bei welcher die Umkehrung des Stromes eintritt, die Potentialniveaudifferenz an der warmen Berührungsstelle gerade wieder gleich der an der kalten geworden wäre, und sich so auf dem Durchgangspuncte aus einem grösseren in einen kleineren, oder aus einem kleineren in einen grösseren Werth befände. Bei dieser Aenderung ihres Werthes würde natürlich ihr Vorzeichen zunächst ungeändert bleiben, und es müssten sich daher bei der

Umkehrung des Stromes auch seine thermischen Wirkungen an den beiden Berührungsstellen in die entgegengesetzten verwandeln, so dass, wenn vorher Wärme von einem warmen zu einem kalten Körper überging, nun der umgekehrte Uebergang einträte, was dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie direct widerspricht. Man ist also zu der Annahme genöthigt, dass auch im Inneren der beiden verbundenen Metalle, oder eines derselben, Potentialniveaudifferenzen entstanden seien, welche als electromotorische Kräfte zur Hervorbringung des Stromes mitwirken, und hat zugleich durch die Bedingung, dass der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie immer erfüllt bleiben muss, ein Mittel über das Verhältniss, in welchem diese verschiedenen Differenzen zu einander stehen müssen, wenigstens Einiges zu schliessen.

Damit ist aber nicht gesagt, dass jede Temperaturverschiedenheit schon als solche nothwendig von einer Potentialniveaudifferenz begleitet sein müsse, sondern ich glaube, dass es zur Erklärung jener Abweichungen, so weit sie bis jetzt beobachtet sind, hinreicht, wenn man die im Inneren eines Metalles entstehende Potentialniveaudifferenz nur als eine secundäre Wirkung der Temperaturverschiedenheit betrachtet, welche dann eintritt, wenn durch die Temperaturänderung des einen Theiles eine Aenderung seines Molecularzustandes veranlasst ist, so dass der veränderte und der unveränderte Theil desselben Metalles sich wie verschiedene Metalle zu einander verhalten. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn beide Theile ihren Molecularzustand geändert haben, aber die Aenderungen nicht gleich sind.

Dass dergleichen Aenderungen in bedeutendem Maasse stattfinden, lässt sich in manchen Fällen mit ziemlicher Sicherheit nachweisen, und es möge als ein Beispiel der Art hier der Stahl betrachtet werden, bei welchem die Wirkungen der Wärme besonders auffällig sind. Harter und weicher Stahl stehen sich in den bedeutendsten Eigenschaften, wie Härte, Elasticität und Sprödigkeit, so fern, wie zwei ganz verschiedene Metalle, und es ist bekannt, dass bei ihrer Berührung auch eine electrische Potentialniveaudifferenz entsteht, indem sich aus ihnen eine wirksame Thermokette, und durch mehrfache Wiederholung eine ziemlich kräftige Thermosäule bilden lässt. Da der ganze zwischen hartem und weichem Stahl bestehende Unterschied seine Ursache nur in der grösseren oder geringeren Geschwindigkeit der Abkühlung hat,

so muss man annehmen, dass die bei höherer Temperatur stattfindende Art der Verbindung des Eisens mit der Kohle, und der damit zusammenhängende Molecularzustand der ganzen Masse sich bei der Abkühlung zu ändern sucht, dass diese Aenderung aber einiger Zeit bedarf, und daher durch die Schnelligkeit der Abkühlung ganz oder theilweise verhindert werden kann, während sie bei langsamer Abkühlung wirklich eintritt. In Uebereinstimmung hiermit kann man aus der Verschiedenheit, welche man zwischen langsam und schnell gekühltem Stahle beobachtet, auf eine entsprechende Verschiedenheit zwischen langsam gekühltem und heissem Stahle schliessen, und denselben Schluss hat auch Seebeck aus seinen thermoelectrischen Versuchen gezogen [1]).

Für das häufige Vorkommen und den electrischen Einfluss solcher Verschiedenheiten des Molecularzustandes sprechen ferner alle thermoelectrischen Ströme, welche man bei Anwendung eines einzigen Metalles erhält, wenn man einzelne Stellen desselben erwärmt. Besonders stark sind diese bei solchen Metallen, die ein deutlich ausgeprägtes krystallinisches Gefüge zeigen. So beobachtete Seebeck [2]) z. B. bei einem im Ganzen gegossenen Ringe aus Antimon, dass er sich gerade so verhielt, als ob er aus zwei verschiedenen Metallen bestände, deren Grenzen sich genau feststellen liessen. Als später der Ring zerbrochen wurde, fand sich, dass der eine Theil sternförmig krystallisirt war, während der andere ein feinkörniges Gefüge besass, und eine weitere Untersuchung des Gegenstandes ergab als Ursache dieses Unterschiedes die verschiedene Erkaltungsgeschwindigkeit der beiden Theile. Für dehnbare Metalle ist in neuerer Zeit Magnus durch sorgfältige experimentelle Untersuchungen [3]) ebenfalls zu dem Resultate gelangt, dass die in einem einzigen Metalle entstehenden Ströme ihren Grund in dem verschiedenen Zustande seiner Theile, besonders in der verschiedenen Härte haben. Da demnach durch verschiedene Behandlung in den Theilen eines Metalles bleibend ein solcher Unterschied des Zustandes entstehen kann, dass sie sich in Bezug auf die Bildung von thermoelectrischen Strömen wie ver-

---

[1]) Ueber die magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz, von Dr. T. J. Seebeck, Denkschr. der Berliner Akad. für 1822 u. 1823, und Pogg. Ann. Bd. 6, §. 47.

[2]) A. a. O. §. 46.

[3]) Denkschriften der Berliner Akad. für 1851, und Pogg. Ann. Bd. 83, S. 469.

schiedene Metalle verhalten, so ist es wohl keine unwahrscheinliche Annahme, dass auch durch Temperaturverschiedenheit vorübergehend ein solcher Unterschied hervorgerufen werden könne.

Wenn nun in einer Thermokette dieser Fall eintritt, dass ein Theil des einen Metalles seinen Molecularzustand ändert, so entsteht dabei erstens, wie erwähnt, zwischen diesem veränderten und dem unveränderten Theile desselben Metalles eine vorher nicht vorhandene Potentialniveaudifferenz, und zweitens erleidet an der Stelle, wo der veränderte Theil ein anderes Metall berührt, die dort schon vorhandene Potentialniveaudifferenz eine Aenderung, welche in der Gleichung (12) nicht mit ausgedrückt ist, und daher noch besonders in Rechnung gebracht werden muss, und beide Umstände vereinigen sich in ihrer Wirkung auf den Strom. Um in solchen Fällen mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie im Einklange zu bleiben, braucht man sich nur die durch die Wärme in der Thermokette hervorgebrachten electrischen Wirkungen in zwei Theile zerlegt zu denken, nämlich in die unmittelbaren und die durch Aenderungen des Molecularzustandes vermittelten, und dann die letzteren so zu behandeln, als ob sie durch wirkliche Stoffveränderungen veranlasst wären, für die ersteren dagegen die Gleichung (12) ungeändert beizubehalten und diese nach jeder Aenderung des Molecularzustandes auf die veränderte Kette gerade so anzuwenden, wie vorher auf die unveränderte. Ob die Aenderung des Molecularzustandes bei einer bestimmten Temperatur sprungweise eintritt, oder ob ein allmäliger Uebergang aus dem einen Zustande in den anderen stattfindet, macht hierbei keinen wesentlichen Unterschied, denn im letzteren Falle kann man statt Einer endlichen Differenz eine unendliche Reihe von unendlich kleinen Differenzen annehmen.

§. 10. Erweiterung der Theorie.

Nachdem ich die vorstehend mitgetheilte Theorie der thermoelectrischen Ströme in einer zuerst im Jahre 1853 erschienenen und später wieder abgedruckten Abhandlung auseinandergesetzt hatte, und am Schlusse derselben von den noch vorkommenden Abweichungen der Resultate von der Erfahrung die im vorigen Paragraphen enthaltene Erklärung gegeben und zugleich angedeutet hatte, wie die Entwickelungen zu erweitern sein würden, um

die vollständige Uebereinstimmung mit der Erfahrung herzustellen, hat Hr. Budde in einer im Jahre 1874 veröffentlichten schönen Abhandlung [1]) den Gegenstand wieder aufgenommen und jene Erweiterung der Entwickelungen ausgeführt. Von dieser Behandlung will ich das Wesentlichste in etwas veränderter Form hier hinzufügen, indem ich in Bezug auf die mehr ins Einzelne gehende Durchführung auf die Abhandlung selbst verweise.

Die im vorigen Paragraphen besprochenen Verschiedenheiten des Molecularzustandes oder der Structur, welche in einem chemisch gleichartigen Stoffe vorkommen und dann bewirken können, dass zwei Theile dieses Stoffes sich in thermoelectrischer Beziehung wie zwei verschiedene Stoffe zu einander verhalten, können in doppelter Weise von der Temperatur abhängen.

Es giebt Fälle, wo durch eine Aenderung der Temperatur auch eine Aenderung der Structur des Stoffes hervorgerufen wird, wo aber die Temperatur und die Structur doch nicht in so bestimmtem Zusammenhange unter einander stehen, dass der Stoff bei der Rückkehr zur ursprünglichen Temperatur auch nothwendig seine ursprüngliche Structur wieder annehmen müsste. So ist es z. B. bekannt, dass Körper, welche in verschiedener Weise krystallisiren können, zuweilen bei der Temperaturerhöhung eine Aenderung des crystallinischen Gefüges erleiden, ohne dass bei nachheriger Abkühlung das erste crystallinische Gefüge sich wieder herstellt. Ebenso weiss man, dass Stahl, wenn er erwärmt und nachher wieder zur ursprünglichen Temperatur abgekühlt wird, dadurch eine bedeutende Aenderung der Härte erleiden kann. Bei Stoffen dieser Art würde es schwer sein, ihr Verhalten in der Thermokette durch allgemeingültige Gleichungen darzustellen, und es möge hier nur gesagt werden, dass man für jeden Theil eines solchen Stoffes die seiner augenblicklich stattfindenden Structur entsprechenden thermoelectrischen Eigenschaften in Rechnung zu bringen hat.

Es kommen aber auch Stoffe vor, besonders Metalle, welche mit der Temperatur ihre Structur in der Weise ändern, dass bei derselben Temperatur auch immer wieder, wenigstens angenähert, dieselbe Structur eintritt. Nimmt man dieses Wiedereintreten derselben Structur als wirklich genau an, so kann man bei einem solchen Stoffe die von der Structur abhängigen Grössen als Functio-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 153, S. 343.

nen der Temperatur betrachten, was bei der Behandlung seines thermoelectrischen Verhaltens von Wichtigkeit ist. Auf Stoffe dieser Art beziehen sich die von Budde ausgeführten Entwickelungen.

§. 11. Verallgemeinerter Ausdruck der electromotorischen Kraft.

In §. 7 wurde die an der Berührungsstelle zweier Stoffe stattfindende Potentialniveaudifferenz E durch die unter (12) gegebene Gleichung

$$E = \varepsilon T$$

bestimmt, worin ε als eine von der Natur der sich berührenden Stoffe abhängige Constante angesehen wurde. Wenn nun die Stoffe mit der Temperatur ihre Structur ändern, so braucht die Grösse ε nicht constant zu sein, sondern ist als Function der Temperatur zu betrachten. Wenn ferner verschiedene Theile eines und desselben Stoffes verschieden warm sind, und dadurch in ihrer Structur Verschiedenheiten eingetreten sind, so können auch zwischen ihnen Potentialniveaudifferenzen obwalten.

Um die Potentialniveaudifferenz zwischen irgend zwei Stoffen oder irgend zwei Theilen eines Stoffes in einer für das Folgende bequemen Form darstellen zu können, wollen wir zunächst alle Stoffe mit einem Stoffe vergleichen, von dem wir annehmen, dass er eine durchweg gleichmässige und auch bei Temperaturänderungen unveränderliche Structur habe, so dass zwischen verschieden warmen Theilen dieses Stoffes keine electrischen Potentialniveaudifferenzen bestehen. Ob ein so unveränderlicher Stoff wirklich existirt, ist für die Gültigkeit des Folgenden ohne Bedeutung, da er nur dazu dienen soll, für die Bestimmung aller Potentialniveaux einen gemeinsamen Ausgangspunct zu gewinnen, dessen Lage die auf Thermoketten bezüglichen Gleichungen, in welchen es sich nur um die Differenzen der vorkommenden Potentialniveaux handelt, nicht beeinflusst. Wir wollen diesen hypothetischen Vergleichsstoff mit r bezeichnen. Betrachten wir nun irgend einen anderen Stoff a, so denken wir uns diesen mit r in Berührung gebracht und bilden für die an der Berührungsstelle bei der Temperatur T entstehende Potentialniveaudifferenz E_{ra} gemäss (12) die Gleichung:

$$E_{ra} = \varepsilon_{ra} T. \tag{16}$$

Ganz entsprechend haben wir dann auch für einen anderen Stoff b die Gleichung:

(16a) $$E_{rb} = \varepsilon_{rb}\, T$$

zu bilden, und aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich weiter:

(17) $$E_{ab} = E_{rb} - E_{ra} = T\,(\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{ra}).$$

Da man nun andererseits gemäss (12) setzen kann:

$$E_{ab} = \varepsilon_{ab}\, T,$$

so folgt:

(18) $$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{rb} - \varepsilon_{ra},$$

wodurch die Temperaturfunction ε_{ab}, welche von der Natur der beiden Stoffe a und b abhängt, auf zwei Temperaturfunctionen, von denen jede nur von der Natur eines dieser beiden Stoffe abhängt, zurückgeführt ist. Um auch noch für die Bezeichnung die Vereinfachung zu gewinnen, dass wir den auf den Vergleichsstoff bezüglichen Buchstaben r nicht immer mitzuschreiben brauchen, wollen wir unter Einführung des neuen Buchstabens η setzen:

(19) $$\varepsilon_{ra} = \eta_a \text{ und } \varepsilon_{rb} = \eta_b,$$

so dass wir die vorige Gleichung schreiben können:

(20) $$\varepsilon_{ab} = \eta_b - \eta_a.$$

Hierdurch geht dann auch (17) über in:

(21) $$E_{ab} = T\,(\eta_b - \eta_a).$$

Wir wollen nun eine aus zwei linearen Leitern a und b bestehende Thermokette betrachten, deren Verbindungsstellen die Temperaturen T' und T'' haben.

Es möge zunächst für den Leiter a, dessen Temperatur sich vom Anfangspuncte bis zum Endpuncte von T' bis T'' ändert, bestimmt werden, wie sich die bei geöffneter Kette an seinen verschiedenen Puncten stattfindenden Potentialniveaux unter einander verhalten. Wenn an zwei unendlich wenig von einander entfernten Puncten des Leiters die Temperaturen T und $T + dT$ stattfinden, so unterscheiden sich die beiden betreffenden Werthe von η_a um $\frac{d\eta_a}{dT}\,dT$ von einander, und die entsprechende Differenz der an den beiden Puncten stattfindenden Potentialniveaux ist:

(22) $$\frac{dV_a}{dT}\,dT = T\,\frac{d\eta_a}{dT}\,dT.$$

Daraus folgt, wenn wir den Anfangs- und Endwerth von V_a mit V_a' und V_a'' bezeichnen:

$$V_a'' - V_a' = \int_{T'}^{T''} T \frac{d\eta_a}{dT} dT. \tag{23}$$

Wenn die Kette geschlossen ist, und daher ein continuirlicher electrischer Strom durch den Leiter a geht, so finden natürlich andere Potentialniveaux auf ihm statt, als bei geöffneter Kette. Für die Bestimmung der electromotorischen Kräfte sind aber die bei geöffneter Kette stattfindenden Potentialniveaudifferenzen maassgebend. Zwischen zwei Stellen, deren Temperaturen T und $T + dT$ sind, wirkt eine electromotorische Kraft, welche durch $\frac{dV_a}{dT} dT$ oder durch $T \frac{d\eta_a}{dT} dT$ dargestellt wird, und demnach gilt für die Summe aller innerhalb des Leiters a wirkenden electromotorischen Kräfte der in (23) gegebene Ausdruck:

$$\int_{T'}^{T''} T \frac{d\eta_a}{dT} dT.$$

Aus der Form dieses Ausdruckes sieht man sofort, dass sein Werth nur von der Anfangs- und Endtemperatur des Leiters und nicht von der Art, wie die Zwischentemperaturen über ihn vertheilt sind, abhängt.

In entsprechender Weise wird für den Leiter b, der an seinem Anfangspuncte die Temperatur T'' und am Endpuncte die Temperatur T' hat, die Summe der in ihm wirkenden electromotorischen Kräfte durch den Ausdruck

$$\int_{T''}^{T'} T \frac{d\eta_b}{dT} dT$$

dargestellt.

Betrachten wir nun die ganze Thermokette, so wirken in dieser, ausser den eben bestimmten, noch die an den Verbindungsstellen p' und p'' stattfindenden electromotorischen Kräfte. Bezeichnen wir die Werthe, welche die Grössen η_a und η_b bei den Temperaturen T' und T'' haben, mit η'_a, η'_b und η''_a, η''_b, so sind die an den Verbindungsstellen wirkenden electromotorischen Kräfte

$$T''(\eta''_b - \eta''_a) \text{ und } T'(\eta'_a - \eta'_b).$$

Aus der Zusammenfassung der vier vorstehenden Ausdrücke erhalten wir für die ganze electromotorische Kraft F der Kette die Gleichung:

$$(24) \quad F = \int_{T'}^{T''} T \frac{d\eta_a}{dT} dT + T''(\eta_b'' - \eta_a'') + \int_{T''}^{T'} T \frac{d\eta_b}{dT} dT + T'(\eta_a' - \eta_b').$$

Hierin kann man unter Ausführung der theilweisen Integration setzen:

$$\int_{T'}^{T''} T \frac{d\eta_a}{dT} dT = T''\eta_a'' - T'\eta_a' - \int_{T'}^{T''} \eta_a dT$$

$$\int_{T''}^{T'} T \frac{d\eta_b}{dT} dT = T'\eta_b' - T''\eta_b'' - \int_{T''}^{T'} \eta_b dT.$$

Dann heben sich die meisten Glieder auf und es bleibt:

$$(25) \qquad F = -\int_{T'}^{T''} \eta_a dT - \int_{T''}^{T'} \eta_b dT$$

oder anders geschrieben:

$$(25\text{a}) \qquad F = \int_{T'}^{T''} (\eta_b - \eta_a) dT = \int_{T'}^{T''} \varepsilon_{ab} dT.$$

Macht man in dieser Gleichung die specielle Annahme, dass ε_{ab} constant sei, so geht sie in die unter (13) gegebene Gleichung

$$F = \varepsilon_{ab}(T'' - T')$$

über. Betrachtet man dagegen ε_{ab} als eine noch zu bestimmende Temperaturfunction, so kann man durch geeignete Wahl der Form dieser Function die von dem gewöhnlichen Verhalten abweichenden Beobachtungen, welche man bei manchen Ketten in Bezug auf die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft von den Temperaturen der Löthstellen gemacht hat, aus dieser Gleichung sehr gut erklären.

Die Gleichungen (24) und (25) lassen sich leicht auch in der Weise erweitern, dass sie für eine aus beliebig vielen Stoffen bestehende Thermokette gelten. Seien n Leiter $a, b, c \ldots h$ als Bestandtheile der Thermokette gegeben, und seien die Temperaturen

ihrer Verbindungsstellen vom Anfangspuncte des Leiters a an der Reihe nach mit T', T'', T'''.... $T^{(n)}$ bezeichnet, so lauten die erweiterten Gleichungen:

$$(26)\quad F = \int_{T'}^{T''} T \frac{d\eta_a}{dT} dT + T''(\eta''_b - \eta''_a) + \int_{T''}^{T'''} T \frac{d\eta_b}{dT} dT$$

$$+ T'''(\eta'''_c - \eta'''_b) + \cdots + \int_{T^{(n)}}^{T'} T \frac{d\eta_h}{dT} dT + T'(\eta'_a - \eta'_h)$$

$$(27)\quad F = -\int_{T'}^{T''} \eta_a \, dT - \int_{T''}^{T'''} \eta_b \, dT - \cdots\cdots - \int_{T^{(n)}}^{T'} \eta_h \, dT.$$

§. 12. Wärmeverbrauch und Wärmeerzeugung in der Thermokette.

Nachdem die in der Thermokette vorkommenden electromotorischen Kräfte ausgedrückt sind, kann auch das in ihren verschiedenen Theilen stattfindende Verschwinden oder Entstehen von Wärme leicht bestimmt werden.

Es sind dabei, wie schon früher in §. 5 auseinandergesetzt ist, zwei Vorgänge in Betracht zu ziehen. Derjenige, bei welchem die Wärme selbst thätig ist, indem sie electromotorische Kräfte hervorbringt, die an manchen Stellen im Sinne des Stromes, an anderen Stellen im entgegengesetzten Sinne stattfinden, wodurch dann Verbrauch oder Erzeugung von Wärme bedingt ist, und derjenige, welcher nur in der Ueberwindung des Leitungswiderstandes besteht, wobei ebenso, wie bei der Ueberwindung einer Reibung, Wärme erzeugt wird. In dem früher betrachteten einfachen Falle, wo die electromotorischen Kräfte nur an den Berührungsflächen verschiedener Stoffe ihren Sitz haben, waren beide Vorgänge räumlich getrennt. Wenn aber auch innerhalb der einzelnen Stoffe electromotorische Kräfte vorkommen, so finden hier beide Vorgänge in demselben Raume neben einander statt. Dessenungeachtet kann man sie für die Betrachtung von einander trennen.

Sie unterscheiden sich nämlich wesentlich dadurch, dass der eine durch Umkehrung des Stromes ebenfalls eine Umkehrung er-

leidet, indem Wärmeverbrauch und Wärmeerzeugung sich gegenseitig vertauschen, während der andere bei Umkehrung des Stromes ungeändert bleibt, indem bei ihm immer nur Wärmeerzeugung stattfindet. Dadurch wird es möglich, in jedem Stücke einer Thermokette die durch die beiden Vorgänge erzeugten Wärmemengen (wobei verbrauchte Wärmemengen als erzeugte negative Wärmemengen gerechnet werden) durch Beobachtung einzeln zu bestimmen. Nachdem man für den durch die thermoelectromotorischen Kräfte hervorgebrachten Strom die ganze in dem betrachteten Stücke erzeugte Wärme beobachtet hat, lasse man die Kette von einem durch fremde electromotorische Kräfte hervorgebrachten eben so starken entgegengesetzten Strom durchfliessen und beobachte dabei wieder die ganze in dem Stücke erzeugte Wärmemenge. Wenn man dann die beiden Wärmemengen addirt und von der Summe die Hälfte nimmt, so stellt diese die durch den thermoelectrischen Strom bei der Ueberwindung des Leitungswiderstandes erzeugte Wärmemenge dar. Wenn man dagegen die durch den zweiten Strom in dem Stücke erzeugte Wärme von der durch den ersten Strom erzeugten abzieht, und von der Differenz die Hälfte nimmt, so stellt diese diejenige durch den thermoelectrischen Strom erzeugte Wärmemenge dar, welche der selbstthätigen Wirkung der Wärme entspricht.

Auch mathematisch lassen sich beide Wärmemengen für lineare Leiter leicht ausdrücken. Diejenige in irgend einem Stücke eines Leiters erzeugte Wärmemenge, welche der selbstthätigen Wirkung der Wärme entspricht, also mit der Hervorbringung von electromotorischen Kräften zusammenhängt, wird dargestellt durch das negative Product aus der in dem Leiterstücke wirkenden electromotorischen Kraft und der Stromstärke. Die bei der Ueberwindung des Leitungswiderstandes erzeugte Wärmemenge dagegen wird dargestellt durch das Product aus dem Leitungswiderstande des betrachteten Stückes und dem Quadrate der Stromstärke.

Betrachten wir nun zunächst die Thermokette im Ganzen und nennen ihre gesammte electromotorische Kraft F, ihren gesammten Leitungswiderstand L und die in ihr stattfindende Stromstärke J, so ist die ganze durch den ersten Vorgang in der Kette erzeugte Wärmemenge:

$$-FJ$$

und die durch den zweiten Vorgang in ihr erzeugte Wärmemenge:

$$LJ^2.$$

Setzen wir hierin:

$$J = \frac{F}{L},$$

so gehen die beiden Ausdrücke über in:

$$-\frac{F^2}{L} \text{ und } \frac{F^2}{L}.$$

Sie sind also den Vorzeichen nach entgegengesetzt (indem bei dem einen Vorgange Wärme verbraucht und bei dem anderen Vorgange Wärme erzeugt wird), und den absoluten Werthen nach gleich, so dass ihre algebraische Summe Null ist, wie es nach dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie sein muss.

Um nun weiter zu sehen, ob auch der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie erfüllt ist, haben wir unser Augenmerk nur auf die Wärmemengen zu richten, welche durch den ersten Vorgang, bei welchem die Wärme selbst thätig ist, erzeugt werden. Dividiren wir die in den verschiedenen Theilen der Thermokette durch diesen Vorgang erzeugten Wärmemengen durch die absoluten Temperaturen der betreffenden Theile und bilden aus den so entstehenden Quotienten die Summe, so muss diese nach dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie gleich Null sein.

Wir wählen zunächst den Leiter a zur Betrachtung und nehmen von demselben ein unendlich kleines Stück, dessen Anfangspunct die Temperatur T und dessen Endpunct die Temperatur $T + dT$ hat. Die innerhalb dieses Stückes wirkende electromotorische Kraft ist $T\frac{d\eta_a}{dT}dT$, und daher die in ihm während der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge $-JT\frac{d\eta_a}{dT}dT$. Dieses mit T dividirt giebt: $-J\frac{d\eta_a}{dT}dT$. Denken wir uns solche Ausdrücke für alle Elemente des Leiters a, welcher an seinem Anfangspuncte die Temperatur T' und an seinem Endpuncte die Temperatur T'' hat, gebildet und nehmen die Summe aller dieser Ausdrücke, welche in diesem Falle ein Integral wird, so erhalten wir:

$$- J \int_{T'}^{T''} \frac{d\eta_a}{dT} dT = J(\eta'_a - \eta''_a).$$

Ebenso erhalten wir für die folgenden Leiter $b, c \ldots. h$ der Reihe nach die Ausdrücke:

$$J(\eta''_b - \eta'''_b) \ldots\ldots. J(\eta^{(n)}_h - \eta'_h).$$

Wir haben nun weiter die Verbindungsstellen der verschiedenen Leiter zu betrachten. Die an der Verbindungsstelle der Leiter a und b stattfindende electromotorische Kraft ist $T''(\eta''_b - \eta''_a)$ und daher die dort erzeugte Wärmemenge $JT''(\eta''_a - \eta''_b)$, woraus wir durch Division mit T'' erhalten:

$$J(\eta''_a - \eta''_b).$$

Ebenso erhalten wir für die anderen Verbindungsstellen der Reihe nach die Ausdrücke:

$$J(\eta'''_b - \eta'''_c) \ldots\ldots J(\eta'_h - \eta'_a).$$

Bilden wir nun aus sämmtlichen für die n Leiter und die n Verbindungsstellen geltenden Ausdrücken die Summe, so heben sich darin alle Glieder auf und es entsteht der Werth Null. Somit ist auch der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie erfüllt, und es wird sich daher vom Standpuncte dieser Theorie aus nichts gegen die aufgestellten Gleichungen einwenden lassen.

Budde hat sie auch noch einer experimentellen Prüfung unterworfen, indem er dazu einen speciellen Fall ausgewählt hat, welcher sich auf die Eisenkupferkette bezieht. Wie schon erwähnt, nimmt bei dieser, wenn man die Temperatur der warmen Löthstelle fortwährend steigert, die electromotorische Kraft nicht fortwährend zu, sondern erreicht ein Maximum und nimmt von da an wieder ab. Betrachtet man nun speciell die Temperatur, bei welcher die electromotorische Kraft ihr Maximum hat, so findet bei dieser eine characteristische Eigenthümlichkeit statt. Differentiirt man nämlich die Gleichung (25a) nach T'', so kommt:

$$\frac{dF}{dT''} = \varepsilon''_{ab},$$

worin ε''_{ab} den der Temperatur T'' entsprechenden Werth von ε_{ab} bedeuten soll. Hieraus folgt nach der Gleichung $E_{ab} = \varepsilon_{ab} T$, wenn man den der Temperatur T'' entsprechenden Werth von E_{ab} mit E''_{ab} bezeichnet:

$$E''_{ab} = T'' \frac{dF}{dT''}.$$

Für den Werth der Temperatur T'', für welchen F ein Maximum ist, muss nun der Differentialcoëfficient $\frac{dF}{dT''}$ gleich Null sein, und daraus ergiebt sich auch für die Potentialniveaudifferenz E''_{ab} der Werth Null. Wenn hiernach an der Löthstelle von Eisen und Kupfer bei dieser Temperatur keine Potentialniveaudifferenz vorhanden ist, so kann auch die Peltier'sche Erscheinung (der Verbrauch oder die Erzeugung von Wärme beim Durchgange eines Stromes) bei dieser Temperatur dort nicht stattfinden. Dieses Resultat der Theorie hat Budde experimentell geprüft und, soweit die Versuchsschwierigkeiten eine Entscheidung zuliessen, bestätigt gefunden.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass über den eigentlichen Grund der Entstehung der electromotorischen Kraft einer Thermokette von W. Thomson und F. Kohlrausch Ansichten aufgestellt sind, welche von meiner Erklärung abweichen. Diese Ansichten werden im letzten Abschnitte dieses Bandes näher besprochen werden.

ABSCHNITT VIII.

Ponderomotorische und electromotorische Kräfte zwischen linearen Strömen und Leitern.

§. 1. Die Ampère'schen Grundformeln.

Ampère hat bekanntlich die Entwickelung seiner Theorie der ponderomotorischen Kräfte damit begonnen, eine Formel für die gegenseitige Einwirkung zweier Stromelemente abzuleiten. Dabei ist er von gewissen experimentell festgestellten Thatsachen ausgegangen, hat aber noch die Annahme hinzugefügt, dass die von zwei Stromelementen auf einander ausgeübten Kräfte nur in einer gegenseitigen Anziehung oder Abstossung bestehen können.

Der auf diese Weise abgeleiteten Formel hat er verschiedene Gestalten gegeben, von denen, je nach den Rechnungen, welche man mit ihr ausführen will, bald die eine, bald die andere bequemer ist. Eine der einfachsten ist folgende. Seien ds und ds' die beiden Stromelemente, i und i' die Stromintensitäten, r der Abstand der Elemente von einander und (ss') der Winkel zwischen ihren Richtungen, dann ist die Kraft, welche die Elemente auf einander ausüben, nach Ampère, eine Anziehung von der Stärke:

$$k i i' ds\, ds' \left(\frac{\cos(ss')}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right),$$

worin k eine positive Constante bedeutet. Ein negativer Werth dieser Formel stellt natürlich eine Abstossung dar, indem diese als negative Anziehung aufgefasst werden kann.

Will man hieraus die Kraft ableiten, welche das Stromelement ds von einem endlichen Strome s' erleidet, so muss man die in bestimmte Richtungen fallenden Componenten der Kraft betrachten, und für diese kann man dann die Integration ausführen. Es möge dazu ein rechtwinkliges Coordinatensystem eingeführt werden, in welchem die beiden Stromelemente die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben. Die in die Richtungen dieser Coordinaten fallenden Componenten der Kraft, welche das Element ds von dem Elemente ds' erleidet, seien mit $\xi ds ds'$, $\eta ds ds'$, $\zeta ds ds'$ bezeichnet; dann ergiebt sich aus der obigen Anziehungsformel die Gleichung:

$$\xi = kii' \left[\frac{x'-x}{r^3} \cos(ss') + (x'-x) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right]$$

oder anders geschrieben:

$$(1) \qquad \xi = kii' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') + (x'-x) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right],$$

und ebenso für die beiden anderen Coordinatenrichtungen:

$$(1a) \qquad \begin{cases} \eta = kii' \left[\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(ss') + (y'-y) \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right] \\ \zeta = kii' \left[\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(ss') + (z'-z) \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial s'} \right]. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun die drei Componenten der Kraft, welche das Stromelement ds von einem endlichen Strome s' erleidet, mit Ξds, $H ds$, $Z ds$, so gilt für Ξ die Gleichung:

$$\Xi = \int \xi ds'.$$

Für die hierin angedeutete Integration ist es zweckmässig, den unter (1) gegebenen Ausdruck von ξ in folgenden gleichbedeutenden umzuformen:

$$(2) \quad \xi = kii' \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{ds} \right] \right\}.$$

Hierin lässt sich das letzte Glied sofort nach s' integriren und giebt einfach die Differenz der Werthe, welche der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck für die beiden Grenzwerthe von s',

die s'_0 und s'_1 heissen mögen, annimmt, und welche wir dadurch bezeichnen wollen, dass wir 0 und 1 als Indices neben den Ausdruck setzen. Wir erhalten so die Gleichung:

$$(3) \qquad \Xi = kii' \left\{ \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds' + \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_1 - \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_0 \right\}.$$

Nehmen wir nun an, der Strom s' sei ein **geschlossener**, so beziehen sich die Grenzwerthe s'_0 und s'_1 der Stromcurve auf einen und denselben Punct des Raumes, und die beiden Werthe, deren Differenz in der vorigen Gleichung vorkommt, sind somit unter einander gleich und heben sich gegenseitig auf. Es bleibt also nur das Glied übrig, welches das noch unausgeführte Integral enthält. Dasselbe, was hier über die Grösse Ξ gesagt ist, gilt natürlich auch von den Grössen H und Z, und man erhält daher zur Bestimmung der drei Componenten der von einem geschlossenen Strome auf ein Stromelement ausgeübten Kraft die Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Xi = kii' \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right] ds' \\ H = kii' \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{dy} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right] ds' \\ Z = kii' \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \right] ds'. \end{cases}$$

Was nun den Grad der Zuverlässigkeit der vorstehenden Formeln anbetrifft, so muss man sagen, dass die Formeln, welche sich auf die von einem Stromelemente auf ein anderes ausgeübte Kraft beziehen, mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet sind. Die bei ihrer Ableitung gemachte Voraussetzung, dass die Kraft nur eine Anziehung oder Abstossung sein könne, also in die Richtung der Verbindungslinie der beiden Elemente fallen müsse, ist, wie H. Grassmann schon im Jahre 1845 in einer schönen Abhandlung[1])

[1]) Pogg. Ann. Bd. 64, S. 1.

hervorgehoben hat, durch nichts gerechtfertigt. Bei zwei Puncten kann man für diejenigen Kräfte, welche sie unabhängig von ihren etwaigen Bewegungen auf einander ausüben, allerdings im Voraus annehmen, dass sie nur die Richtung der Verbindungslinie haben können, da es für zwei Puncte, wenn man von ihren Bewegungen absieht, keine andere ausgezeichnete Richtung giebt. Bei zwei Stromelementen dagegen sind die Richtungen der Stromelemente ebenfalls ausgezeichnete Richtungen, und es ist gar nicht abzusehen, weshalb die Kraftrichtungen von den Richtungen der Stromelemente unabhängig sein müssen.

Demgemäss darf man die Richtigkeit der Gleichungen (1) und (1a), welche die von einem einzelnen Stromelemente auf ein anderes Stromelement ausgeübte Kraft bestimmen, nicht als bewiesen betrachten. Dasselbe gilt von der Gleichung (3), welche sich auf die von einem ungeschlossenen Strome auf ein Stromelement ausgeübte Kraft bezieht. Die Gleichungen (4) dagegen, welche die von einem geschlossenen Strome auf ein Stromelement ausgeübte Kraft bestimmen, sind der experimentellen Prüfung zugänglich und können als durch die Erfahrung hinlänglich bestätigt angesehen werden, um sie als sicher anzunehmen. Diese wollen wir daher den nächstfolgenden Entwickelungen zu Grunde legen.

§. 2. Umformung der vorstehenden Gleichungen.

Man kann den Gleichungen (4) noch andere, für die weiteren Anwendungen bequeme Formen geben. Für $\cos(ss')$ und $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}$ gelten folgende Ausdrücke:

$$\cos(ss') = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{dx}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (4) ein, so heben sich in jeder derselben unter dem Integralzeichen zwei Glieder auf, und die anderen Glieder lassen sich folgendermaassen zusammenfassen:

$$(5)\begin{cases}\Xi = kii'\left[\frac{\partial y}{\partial s}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds' - \frac{\partial z}{\partial s}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds'\right]\\ H = kii'\left[\frac{\partial z}{\partial s}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)ds' - \frac{\partial x}{\partial s}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds'\right]\\ Z = kii'\left[\frac{\partial x}{\partial s}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds' - \frac{\partial y}{\partial s}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)ds'\right].\end{cases}$$

Von den sechs hierin vorkommenden Integralen sind dreimal je zwei unter sich gleich, so dass nur drei verschiedene Integrale übrig bleiben. Zur Abkürzung wollen wir nach Ampère für diese Integrale, nachdem sie mit ki' multiplicirt sind, vereinfachte Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(6)\quad\begin{cases}A = ki'\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)ds'\\ B = ki'\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds'\\ C = ki'\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds'.\end{cases}$$

Da nun, gemäss der Gleichung

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

zu setzen ist:

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x-x'}{r^3};\quad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y-y'}{r^3};\quad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z-z'}{r^3},$$

so kann man die vorigen Gleichungen auch so schreiben:

$$(6a)\quad\begin{cases}A = ki'\int\left(\frac{z-z'}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{y-y'}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds'\\ B = ki'\int\left(\frac{x-x'}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{z-z'}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds'\\ C = ki'\int\left(\frac{y-y'}{r^3}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{x-x'}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)ds'.\end{cases}$$

Durch Einführung dieser Zeichen nehmen die Gleichungen (5) folgende einfache Formen an:

$$(7)\qquad \begin{cases} \Xi = i\left(C\dfrac{\partial y}{\partial s} - B\dfrac{\partial z}{\partial s}\right) \\ H = i\left(A\dfrac{\partial z}{\partial s} - C\dfrac{\partial x}{\partial s}\right) \\ Z = i\left(B\dfrac{\partial x}{\partial s} - A\dfrac{\partial y}{\partial s}\right). \end{cases}$$

§. 3. Zurückführung der drei Grössen A, B und C auf Eine Grösse.

Die drei Grössen A, B und C lassen sich unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass der Strom s' geschlossen sei, auf eine einzige Grösse zurückführen, von welcher sie die negativ genommenen partiellen Differentialcoëfficienten nach x, y und z sind. Zu dieser Grösse gelangt man am leichtesten durch Anwendung einer aus der analytischen Geometrie bekannten Transformationsgleichung, die ich hier nicht beweisen, sondern nur anführen will.

Es sei irgend eine von einer geschlossenen Curve umgrenzte Fläche gegeben. Das Element der Curve möge ds und das Element der Fläche $d\omega$ heissen. Von der auf dem Flächenelemente $d\omega$ errichteten Normale, welche nach der einen Seite als positiv und nach der anderen als negativ zu rechnen ist, soll ein Element mit dn bezeichnet werden. Die Seite der Normale, nach welcher wir dn als positiv rechnen, soll mit der auf die geschlossene Curve bezüglichen Umlaufsrichtung, nach welcher wir ds als positiv rechnen, so zusammenhängen, dass ein in der Curve im positiven Sinne stattfindender Umlauf, von der positiven Seite der Normale aus betrachtet, als positive Drehung erscheint, d. h. so, wie in der xy-Ebene, wenn man sie von der positiven z-Seite aus betrachtet, eine von der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe hin gehende Drehung erscheint. Zur vollständigeren Fixirung der Ideen möge auch noch über den positiven Sinn der Coordinatenaxen eine Annahme gemacht werden, und zwar wollen wir die Wahl so treffen, dass die erwähnte in der xy-Ebene von der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe hin gehende Drehung von der positiven z-Seite aus als Linksdrehung erscheint, die der

Drehung des Zeigers der Uhr entgegengesetzt ist. Es mögen nun weiter L, M und N drei Functionen von x, y, z darstellen, dann gilt folgende Gleichung:

$$\int\left(L\frac{\partial x}{\partial s}+M\frac{\partial y}{\partial s}+N\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds \tag{8}$$

$$=\int\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}+\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n}+\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\right]d\omega,$$

worin das erste Integral über die ganze geschlossehc Curve und das zweite Integral über die von der Curve begrenzte Fläche auszudehnen ist.

Diese Gleichung wollen wir nun zur Transformation der unter (6a) vorkommenden Integrale anwenden, indem wir uns durch die Stromcurve s' irgend eine Fläche gelegt denken. Da die auf den Strom s' bezüglichen Grössen in (6a) durch accentuirte Buchstaben bezeichnet sind, und es zweckmässig ist, dasselbe auch mit den Grössen zu thun, welche sich auf die durch s' gelegte Fläche beziehen, so wollen wir uns alle in der Gleichung (8) vorkommenden Buchstaben accentuirt denken. Um die so abgeänderte Gleichung zunächst auf die erste der Gleichungen (6a) anzuwenden, setzen wir:

$$L'=0;\ M'=\frac{z-z'}{r^3};\ N'=-\frac{y-y'}{r^3},$$

wodurch (8) übergeht in:

$$\int\left(\frac{z-z'}{r^3}\frac{\partial y'}{\partial s'}-\frac{y-y'}{r^3}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds' \tag{9}$$

$$=\int\left\{\left[-\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{y-y'}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{z-z'}{r^3}\right)\right]\frac{\partial x'}{\partial n'}+\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{y-y'}{r^3}\right)\frac{\partial y'}{\partial n'}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{z-z'}{r^3}\right)\frac{\partial z'}{\partial n'}\right\}d\omega'.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lautet nach Ausführung der angedeuteten Differentiationen:

$$\int\left[\left(3\frac{(x-x')^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial x'}{\partial n'}+3\frac{(x-x')(y-y')}{r^5}\frac{\partial y'}{\partial n'}\right.$$
$$\left.+3\frac{(x-x')(z-z')}{r^5}\frac{\partial z'}{\partial n'}\right]d\omega',$$

wofür man auch schreiben kann:

$$-\int\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'}\frac{\partial x'}{\partial n'}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'}\frac{\partial y'}{\partial n'}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z'}\frac{\partial z'}{\partial n'}\right) d\omega'$$

oder endlich:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\, d\omega'.$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man, wenn man die Gleichung (8) auf die beiden letzten der Gleichungen (6a) anwendet. Setzt man diese Ausdrücke für die in (6a) enthaltenen Integrale ein, so kommt:

$$(10)\quad \begin{cases} A = -\, ki'\,\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\, d\omega' \\[2ex] B = -\, ki'\,\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\, d\omega' \\[2ex] C = -\, ki'\,\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\, d\omega'. \end{cases}$$

Hiernach ist $ki'\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\, d\omega'$ die am Anfange dieses Paragraphen erwähnte Grösse, deren negativ genommene partielle Differentialcoëfficienten die Grössen A, B und C darstellen.

§. 4. Die magnetische Kraft und die magnetische Potentialfunction eines geschlossenen Stromes.

Nachdem wir bisher nur die mathematischen Ausdrücke für die Grössen A, B und C abgeleitet haben, wollen wir nun eine gewisse Vorstellung damit verbinden, welche für physicalische Betrachtungen sehr bequem ist.

Wir wollen uns denken, A, B und C seien die Componenten einer von dem geschlossenen Strome s' am Puncte (x, y, z) ausgeübten Kraft, und da zu einer Kraft auch etwas gehört, worauf sie ausgeübt wird, wollen wir uns vorstellen, die Kraft werde auf eine im Puncte (x, y, z) befindliche Einheit eines Agens ausgeübt,

welches wir Magnetismus nennen wollen, wobei wir aber unter diesem Namen vorläufig nur etwas zur Bequemlichkeit unserer Betrachtungen angenommenes verstehen, was gar keine reelle Existenz zu haben braucht. Nach Einführung dieses Agens können wir die Kraft, von der A, B und C die Componenten sind, die magnetische Kraft des geschlossenen Stromes s' nennen.

Ferner giebt der Umstand, dass in dem in den Gleichungen (10) vorkommenden Ausdrucke, dessen negative Differentialcoëfficienten die Kraftcomponenten A, B und C darstellen, die zu integrirende Grösse der nach n' genommene Differentialcoëfficient von $\frac{1}{r}$ ist, Veranlassung, auch den die Kraft ausübenden geschlossenen Strom durch ein eigenthümliches, nur für die mathematische Betrachtung bestimmtes Gebilde zu ersetzen.

Wir wollen uns denken, von dem Agens, welches wir Magnetismus genannt haben, gebe es ebenso, wie von der Electricität, zwei verschiedene Arten, welche sich so verhalten, dass zwei Mengen einer und derselben Art sich abstossen, und zwei Mengen der beiden verschiedenen Arten sich anziehen. Diese beiden Arten von Magnetismus können, in Uebereinstimmung mit der bei der Electricität angewandten Benennungsweise, positiver und negativer Magnetismus, oder auch, gemäss dem aus anderen Gründen entstandenen Sprachgebrauche, Nord- uud Süd-Magnetismus genannt werden. Von der Kraft, mit welcher zwei Mengen sich abstossen oder anziehen, nehmen wir an, dass sie dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sei, und was die Grösse der Kraft anbetrifft, so wollen wir annehmen, die Kraft, mit welcher zwei Einheiten von positivem Magnetismus sich in der Einheit der Entfernung abstossen, sei gleich k.

Nun kehren wir zu der im vorigen Paragraphen betrachteten, durch die geschlossene Stromcurve gelegten Fläche zurück, und denken uns, neben derselben, an der Seite, nach welcher die Normale als positiv gerechnet wird, noch eine zweite parallele Fläche gelegt, welche nur um den unendlich kleinen Abstand ε von ihr entfernt sei. Die erste Fläche denken wir uns mit negativem und die zweite mit positivem Magnetismus belegt, und zwar in folgender Weise. Auf der ersten sei die Flächendichtigkeit des Magnetismus constant gleich $-\frac{i'}{\varepsilon}$, so dass sich auf einem Flächen-

elemente $d\omega'$ die Menge $-\frac{i'}{\varepsilon}\,d\omega'$ befinde. Betrachten wir nun das diesem Elemente senkrecht gegenüberliegende Element der zweiten Fläche, so soll sich auf diesem eine ebenso grosse Menge von positivem Magnetismus befinden, und dasselbe soll für jede zwei andere sich senkrecht gegenüberliegende Flächenelemente der Fall sein, so dass die zweite Fläche eben so viel positiven Magnetismus enthält, wie die erste negativen Magnetismus.

Wir wollen nun zunächst nur die beiden unendlich kleinen Magnetismusmengen betrachten, welche sich auf dem Flächenelemente $d\omega'$ und dem ihm senkrecht gegenüberliegenden Elemente der anderen Fläche befinden, also die Mengen $-\frac{i'}{\varepsilon}\,d\omega'$ und $+\frac{i'}{\varepsilon}\,d\omega'$. Von diesen beiden Mengen wollen wir die Potentialfunction im Puncte (x, y, z) bilden. Der Abstand des Elementes $d\omega'$ vom Puncte (x, y, z) werde, gemäss unserer früheren Bezeichnungsweise, durch r dargestellt, und der Abstand des gegenüberliegenden Elementes von demselben Puncte heisse r_1. Dann ist die Potentialfunction der beiden Magnetismusmengen:

$$-\frac{k}{r}\frac{i'}{\varepsilon}\,d\omega' + \frac{k}{r_1}\frac{i'}{\varepsilon}\,d\omega'$$

oder:

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\frac{k\,i'}{\varepsilon}\,d\omega'.$$

Nun kann man aber, da das zweite Element vom ersten in der n'-Richtung um ε entfernt ist, setzen:

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,\varepsilon,$$

wodurch der vorige Ausdruck übergeht in:

$$k\,i'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,d\omega'.$$

Wenn man diesen Ausdruck über die ganze erste Fläche integrirt, also den Ausdruck

$$k\,i'\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,d\omega'$$

bildet, so stellt dieser die Potentialfunction der ganzen auf den beiden Flächen befindlichen Magnetismusmengen im Puncte (x, y, z) dar. Hieraus folgt weiter, dass die Componenten der Kraft, welche diese beiden Magnetismusmengen auf eine im Puncte (x, y, z) gedachte Magnetismuseinheit ausüben, durch

$$-ki'\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}d\omega'; \quad -ki'\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}d\omega';$$

$$-ki'\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}d\omega'$$

dargestellt werden.

Dieses sind dieselben Ausdrücke, welche in (10) für die Componenten A, B, C derjenigen Kraft gegeben wurden, welche der geschlossene Strom s' auf jene Magnetismuseinheit ausübt. Demnach können die beiden magnetischen Flächen und der Strom sich in Bezug auf die von ihnen ausgeübte magnetische Kraft gegenseitig ersetzen, und die vorher für die beiden magnetischen Flächen bestimmte Potentialfunction kann daher auch auf den Strom bezogen werden, und wir wollen sie die magnetische Potentialfunction des geschlossenen Stromes nennen.

Da diese Potentialfunction vielfach angewandt werden kann, so ist es zweckmässig, ein einfaches Zeichen dafür einzuführen, und wir wollen setzen:

$$P = ki'\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}d\omega'. \tag{11}$$

Dann können wir die Gleichungen (10) kürzer so schreiben:

$$A = -\frac{\partial P}{\partial x};\ B = -\frac{\partial P}{\partial y};\ C = -\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{12}$$

Setzt man diese Werthe von A, B und C in die Gleichungen (7) ein, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} \Xi &= i\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\\ H &= i\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\\ Z &= i\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\right). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Es ist somit die Bestimmung der von einem geschlossenen Strome auf ein Stromelement ausgeübten Kraft auf die magnetische Potentialfunction des Stromes zurückgeführt.

§. 5. Einführung magnetischer Flächen für den die Wirkung erleidenden Strom.

Es möge nun angenommen werden, dass auch der die Wirkung erleidende Strom s geschlossen sei, und dass es sich darum handele, zu bestimmen, welche Gesammtwirkung die auf alle seine Elemente wirkenden ponderomotorischen Kräfte auf den ganzen Strom ausüben, wenn der Leiter als starr vorausgesetzt wird.

Diese Gesammtwirkung kann in zwei auf den ganzen Strom bezügliche Wirkungen zerlegt werden, deren eine irgend einen mit dem Leiter fest verbundenen Punct, als welchen wir den Anfangspunct der Coordinaten wählen können, zu verschieben sucht, während die andere eine Drehung um diesen Punct hervorzubringen sucht, und es kommt daher darauf an, die drei in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Verschiebungskraft und die Drehungsmomente um die drei Coordinatenaxen zu bestimmen.

Die in die x-Richtung fallende Componente der Verschiebungskraft ist $\int \Xi ds$, und gemäss (13) haben wir:

$$\int \Xi ds = i \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds. \tag{14}$$

Um das in dieser Gleichung an der rechten Seite stehende Linienintegral in ein Flächenintegral verwandeln zu können, denken wir es uns zunächst in der Form

$$\int \left(L \frac{\partial x}{\partial s} + M \frac{\partial y}{\partial s} + N \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds$$

geschrieben, indem wir den hierin vorkommenden Buchstaben L, M und N folgende Bedeutungen beilegen:

$$L = 0; \quad M = -\frac{\partial P}{\partial z}; \quad N = \frac{\partial P}{\partial y}$$

und auf dieses Integral wenden wir die unter (8) gegebene Transformationsgleichung an. Dadurch erhalten wir:

$$\int \Xi ds = i \int \left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] d\omega,$$

und dieser Gleichung können wir folgende Form geben:

$$(15)\qquad \int \Xi\, ds = i\int\left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\frac{\partial x}{\partial n} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right] d\omega.$$

Die hierin vorkommende Grösse P ist die im vorigen Paragraphen besprochene Potentialfunction der Magnetismusmengen, welche sich auf der vom Strome s' begrenzten und der ihr unendlich nahen parallelen Fläche befinden. Denken wir uns nun die vom Strome s begrenzte Fläche, deren Element $d\omega$ in der vorigen Gleichung vorkommt, so gelegt, dass sie jene erstgenannten beiden Flächen nicht schneidet, was immer möglich ist, wenn die Stromcurven s und s' nicht in einander verschlungen sind, so gilt für alle in dem Integrale vorkommenden Flächenelemente $d\omega$ die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

Ferner kann man schreiben:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

Demnach geht die Gleichung (15) über in:

$$(16)\qquad \int \Xi\, ds = -i\int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) d\omega.$$

Entsprechende Gleichungen gelten natürlich auch für die beiden anderen Coordinatenrichtungen.

Was nun ferner die Drehungsmomente anbetrifft, so wird dasjenige um die x-Axe durch $\int (yZ - zH)\, ds$ dargestellt, und nach (13) gilt die Gleichung:

$$(17)\qquad \int (yZ - zH)\, ds = i\int\left[y\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\right) - z\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right] ds.$$

Um hierin wieder das an der rechten Seite stehende Linienintegral in ein Flächenintegral verwandeln zu können, schreiben wir auch dieses Integral in der Form:

$$\int\left(L\frac{\partial x}{\partial s}+M\frac{\partial y}{\partial s}+N\frac{\partial z}{\partial s}\right) ds,$$

indem wir jetzt den Buchstaben L, M und N folgende Bedeutungen beilegen:

$$L = -\left(y\frac{\partial P}{dy} + z\frac{\partial P}{\partial z}\right);\quad M = y\frac{\partial P}{\partial x};\quad N = z\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Wenn wir dann die Transformationsgleichung (8) anwenden, und die dadurch entstehende Gleichung in ähnlicher Weise, wie die obige, umgestalten, so erhalten wir:

$$(18)\qquad \int (yZ - zH)\,ds = i\int \frac{\partial}{\partial n}\left(z\frac{\partial P}{\partial y} - y\frac{\partial P}{\partial z}\right)d\omega.$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die Drehungsmomente um die beiden anderen Coordinatenaxen.

Dieselben Ausdrücke, welche in den Gleichungen (16) und (18) für die x-Componente der Verschiebungskraft und für das Drehungsmoment um die x-Axe gegeben sind, erhält man, wenn man, ganz so, wie es im vorigen Paragraphen für den Strom s' geschehen ist, nun auch für den Strom s zwei magnetische Flächen einführt.

Man denke sich dazu neben der durch den Strom s gelegten Fläche, deren Element $d\omega$ ist, noch eine zweite, nur um den unendlich kleinen Abstand ε von ihr entfernte parallele Fläche, und nehme an, dass die erste mit negativem und die zweite mit positivem Magnetismus bedeckt sei. Auf einem Elemente $d\omega$ der ersten Fläche soll sich die Magnetismusmenge $-\frac{i}{\varepsilon}d\omega$ und auf dem ihm gegenüberliegenden Elemente der zweiten Fläche eine dem absoluten Werthe nach eben so grosse positive Magnetismusmenge befinden. Die auf $d\omega$ befindliche Menge $-\frac{i}{\varepsilon}d\omega$ erleidet eine Kraft, deren in die x-Richtung fallende Componente den Ausdruck

$$\frac{i}{\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial x}d\omega$$

hat, und deren Drehungsmoment um die x-Axe durch den Ausdruck

$$\frac{i}{\varepsilon}\left(y\frac{\partial P}{\partial z} - z\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

dargestellt wird. Die auf dem gegenüberliegenden Flächenelemente befindliche Magnetismusmenge $\frac{i}{\varepsilon}d\omega$, welche von der ersteren in der n-Richtung um ε entfernt ist, erleidet eine Kraft, für deren in die x-Richtung fallende Componente und auf die x-Axe bezügliches Drehungsmoment folgende Ausdrücke gelten:

$$-\frac{i}{\varepsilon}\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\varepsilon\right]d\omega,$$

$$-\frac{i}{\varepsilon}\left[y\frac{\partial P}{\partial z}-z\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial n}\left(y\frac{\partial P}{\partial z}-z\frac{\partial P}{\partial y}\right)\varepsilon\right]d\omega.$$

Für beide Flächenelemente zusammen wird also die x-Componente der Kraft durch

$$-i\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)d\omega$$

und das Drehungsmoment um die x-Axe durch

$$i\frac{\partial}{\partial n}\left(z\frac{\partial P}{\partial y}-y\frac{\partial P}{\partial z}\right)d\omega$$

dargestellt. Durch Integration dieser beiden Ausdrücke erhält man genau die oben unter (16) und (18) gegebenen Ausdrücke, und es folgt daraus, dass man den geschlossenen Strom s in Bezug auf die ponderomotorische Kraft, welche er erleidet, ganz so, wie den Strom s' in Bezug auf die Kraft, welche er ausübt, durch ein magnetisches Flächenpaar ersetzen kann.

§. 6. Das magnetische Potential zweier geschlossener Ströme auf einander.

Die Gesammtwirkung, welche das den Strom s repräsentirende magnetische Flächenpaar von dem den Strom s' repräsentirenden magnetischen Flächenpaare erleidet, lässt sich am bequemsten dadurch bestimmen, dass man zuerst das Potential des einen magnetischen Flächenpaares auf das andere bildet, und dann die Aenderung untersucht, welche dieses Potential erleidet, wenn das den Strom s repräsentirende Flächenpaar irgend eine unendlich kleine Bewegung macht.

Dieses Potential lässt sich sehr leicht aus der schon bestimmten Potentialfunction P des den Strom s' repräsentirenden Flächenpaares ableiten. Das Potential dieses Flächenpaares auf die zu dem anderen Flächenpaare gehörige negativ magnetische Fläche ist:

$$-\int P\frac{i}{\varepsilon}\,d\omega$$

und das Potential auf die positiv magnetische Fläche:

$$\int \left(P + \frac{\partial P}{\partial n}\,\varepsilon\right)\frac{i}{\varepsilon}\,d\omega.$$

Daraus ergiebt sich für das Potential auf beide Flächen zusammen, welches Q heissen möge, die Gleichung:

$$Q = i\int \frac{\partial P}{\partial n}\,d\omega. \tag{19}$$

Setzen wir hierin für P seinen unter (11) gegebenen Werth ein, so kommt:

$$Q = kii' \int d\omega\,\frac{\partial}{\partial n}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\,d\omega'$$

oder anders geschrieben:

$$Q = kii' \int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,d\omega\,d\omega'. \tag{20}$$

Diese Grösse, welche ihrer Entwickelung nach zunächst das Potential der beiden magnetischen Flächenpaare auf einander bedeutet, kann, da die Flächenpaare durch ihre gegenseitigen Wirkungen die gegenseitigen Wirkungen der beiden geschlossenen Ströme vertreten können, auch das magnetische Potential der beiden geschlossenen Ströme auf einander genannt werden.

Man kann diesem Potential auch noch andere Formen geben, in welchen die beiden Integrationen sich direct auf die beiden Stromcurven beziehen.

Wir gehen dazu von folgendem Ausdrucke aus:

$$\int\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{ds}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds\,ds'$$

und wenden auf ihn zweimal die Transformationsgleichung (8) an, um die beiden Linienintegrale in Flächenintegrale zu verwandeln.

Zuerst schreiben wir ihn in der Form:

$$\int ds' \int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial s'}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial z'}{\partial s'}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds$$

und erhalten daraus gemäss (8):

$$\int ds' \int \Bigg[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cdot\frac{\partial z'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)\frac{\partial y}{\partial n}$$

$$+ \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\Bigg]\,d\omega.$$

Diesem Ausdrucke geben wir nun folgende Form:

$$\int d\omega \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \frac{\partial y'}{\partial s'} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \frac{\partial z'}{\partial s'} \right] ds'$$

und wenden hierauf abermals die Transformationsgleichung (8) an, wodurch wir erhalten:

$$\int d\omega \int \left[\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y'} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z'} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z'} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \frac{\partial x'}{\partial n'} \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z'} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z'} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \frac{\partial y'}{\partial n'}$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y'} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \frac{\partial z'}{\partial n'} \right] d\omega'.$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun sehr vereinfachen.

Wir wollen zunächst unsere Aufmerksamkeit nur auf den Factor von $\frac{\partial x'}{\partial n'}$ richten, welchen wir, nachdem wir noch das Glied $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n}$ einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen hinzugefügt haben, so schreiben können:

$$\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z'} \right) \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z'} \frac{\partial z}{\partial n} \right).$$

Nun ist zu bemerken, dass in der Grösse $\frac{1}{r}$ die Coordinaten x, y, z, x', y', z' nur in der Verbindung $x - x'$, $y - y'$ und $z - z'$ vorkommen, und dass man daher jeden Differentialcoëfficienten nach einer der accentuirten Grössen durch den Differentialcoëfficienten nach der entsprechenden unaccentuirten Grösse, und umgekehrt,

ersetzen kann, wenn man zugleich das Vorzeichen umkehrt, dass man also z. B. schreiben kann:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} = - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial y}.$$

Demnach kann man dem vorigen Ausdrucke folgende Form geben:

$$-\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\frac{\partial x}{\partial n} - \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right).$$

Von den beiden Gliedern dieses Ausdruckes ist das erste Null und das zweite lässt sich so schreiben:

$$-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)$$

und dann zusammenziehen in

$$-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right).$$

Ebenso lassen sich die Factoren von $\frac{\partial y'}{\partial n'}$ und $\frac{\partial z'}{\partial n'}$ in die entsprechenden einfachen Formen

$$-\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) \text{ und } -\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)$$

bringen, und das ganze obige Doppelintegral nimmt daher folgende Gestalt an:

$$-\int d\omega \int \left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)\frac{\partial x'}{\partial n'} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)\frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)\frac{\partial z'}{\partial n'}\right] d\omega',$$

welche sich noch weiter vereinfacht in

$$-\int d\omega \int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial n'} d\omega'$$

oder anders geschrieben:

$$-\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,d\omega\,d\omega'.$$

Demnach erhalten wir als Resultat der vorgenommenen Transformationen die Gleichung:

$$\int\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds\,ds'=-\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,d\omega\,d\omega'.$$

Wenn wir diese Gleichung auf (20) anwenden, so kommt:

$$(21)\qquad Q=-\,kii'\int\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)ds\,ds'.$$

Nun ist aber ferner, wenn man den Winkel zwischen den Stromelementen ds und ds' mit (ss') bezeichnet, zu setzen:

$$\cos(ss')=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}$$

und aus der Gleichung

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}=-\,2\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right)$$

und man kann daher die Gleichung (21) auch in folgende Formen bringen:

$$(21a)\qquad Q=-\,kii'\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds'$$

$$(21b)\qquad Q=\tfrac{1}{2}\,kii'\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Setzt man in der letzten Gleichung:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}=\frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}+2\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

und bedenkt, dass das Integral des letzten Gliedes für geschlossene Ströme Null wird, so erhält man:

$$(22)\qquad Q=kii'\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel zwischen der in dem Sinne von ds' nach ds hin positiv gerechneten Richtung von r und den Richtungen von ds und ds' mit (rs) und (rs'), so ist

$$\cos(rs)=\frac{\partial r}{\partial s}\quad\text{und}\quad\cos(rs')=-\,\frac{\partial r}{\partial s'},$$

und demgemäss kann man der Gleichung (22) noch folgende Form geben:

$$(22a) \qquad Q = -kii' \int\int \frac{\cos(rs) \cdot \cos(rs')}{r} ds\, ds'.$$

Die unter (21), (21a), (21b), (22) und (22a) gegebenen Ausdrücke sind es, welche F. Neumann für das magnetische Potential zweier geschlossener Ströme auf einander aufgestellt hat.

Da es für das Folgende zweckmässig ist, in dem Ausdrucke des Potentials den Factor, welcher von den Stromintensitäten unabhängig ist, und ausser von der Grösse k nur noch von der Configuration der beiden Leiter abhängt, kurz bezeichnen zu können, wollen wir dafür das Zeichen w einführen, indem wir setzen:

$$(23) \qquad w = k \int\int \frac{\cos(ss')}{r} ds\, ds'.$$

Dann können wir die zur Bestimmung des magnetischen Potentials dienende Gleichung sehr einfach so schreiben:

$$(24) \qquad Q = -ii'w.$$

Denkt man sich nun, dass der Strom s unter dem Einflusse der ponderomotorischen Kräfte, welche seine Elemente von dem Strome s' erleiden, irgend eine Bewegung mache, so wird dabei von den ponderomotorischen Kräften eine Arbeit gethan, welche sich durch die Abnahme des magnetischen Potentials darstellen lässt. Dasselbe gilt auch für den umgekehrten Fall, wo der Strom s' sich unter dem Einflusse der von dem Strome s auf seine Elemente ausgeübten ponderomotorischen Kräfte bewegt, und ebenso für den allgemeineren Fall, wo beide Ströme sich unter dem Einflusse der gegenseitig auf einander ausgeübten ponderomotorischen Kräfte bewegen. Hierbei ist unter Abnahme des Potentials aber nur diejenige Abnahme verstanden, welche durch die Lagenänderungen der Leiter verursacht wird, und nicht diejenige, welche möglicherweise gleichzeitig durch Aenderung der Stromintensitäten stattfinden kann. Bezeichnen wir also die von den ponderomotorischen Kräften gethane Arbeit mit A_p und den während eines Zeitelementes dt stattfindenden Zuwachs dieser Arbeit mit dA_p, so dürfen wir nicht allgemein setzen:

$$dA_p = -dQ,$$

sondern haben folgende Gleichung zu bilden:

$$(25) \qquad dA_p = ii'dw.$$

§. 7. Die Induction und das electrodynamische Potential zweier geschlossener Ströme auf einander.

Die Induction ist bekanntlich von F. Neumann sehr vollständig behandelt[1]; wir wollen uns hier aber auf die Besprechung des Falles beschränken, wo beide Leiter geschlossen sind, weil das für diesen Fall von Neumann aufgestellte Gesetz als unzweifelhaft richtig betrachtet werden kann.

Wir denken uns also zwei geschlossene Leiter s und s' gegeben, und nehmen an, dass in s' ein Strom von der Stärke i' stattfinde. Wenn nun die beiden Leiter, welche wir der Einfachheit wegen als starr voraussetzen wollen, sich irgendwie bewegen und zugleich die Stromstärke i' sich ändert, so fragt es sich, welche electromotorische Kraft dabei in s inducirt wird. Darüber gilt nach Neumann folgendes Gesetz: Die im Leiter s inducirte electromotorische Kraft ist gleich dem nach der Zeit genommenen Differentialcoëfficienten des magnetischen Potentials des im Leiter s' stattfindenden Stromes i' auf einen im Leiter s gedachten Strom von einer gewissen constanten Stärke, welche vorläufig c heissen möge.

Die hierin vorkommende, vorläufig unbestimmt gelassene Constante c wird die Inductionsconstante genannt.

Das magnetische Potential der Ströme i' und c auf einander wird nach Gleichung (24) durch $-ci'w$ dargestellt. Demnach lässt sich, wenn die in s inducirte electromotorische Kraft mit E bezeichnet wird, folgende Gleichung bilden:

$$E = -c\frac{d(i'w)}{dt}. \tag{26}$$

Findet in dem Leiter s, für welchen vorher nur ein gedachter Strom von gegebener Stärke c in Betracht kam, auch ein wirklicher Strom von irgend einer Stärke i statt, die mit der Zeit veränderlich sein kann, so wird auch in dem Leiter s' eine electromotorische Kraft inducirt, welche mit E' bezeichnet werden möge, und für welche folgende, der vorigen entsprechende Gleichung gilt:

$$E' = -c\frac{d(iw)}{dt}. \tag{27}$$

[1] Abhandlungen der Berliner Academie 1845 und 1847.

Nachdem die inducirte electromotorische Kraft bestimmt ist, kann auch die von dieser Kraft während des Zeitelementes dt gethane Arbeit leicht ausgedrückt werden. Man braucht dazu nur die inducirte electromotorische Kraft mit der Intensität des in dem betreffenden Leiter stattfindenden Stromes und mit dem Zeitelemente zu multipliciren, also für den Leiter s das Product $Eidt$ und für den Leiter s' das Product $E'i'dt$ zu bilden, in welche Producte man dann für E und E' ihre Werthe einsetzen kann. Man erhält daher, wenn man die in beiden Leitern zusammen von den electromotorischen Kräften während der Zeit dt gethane Arbeit mit dA_e bezeichnet, die Gleichung:

$$dA_e = -ic\frac{d(i'w)}{dt}dt - i'c\frac{d(iw)}{dt}dt$$

oder einfacher geschrieben:

$$dA_e = -c\,[id(i'w) + i'd(iw)]. \tag{28}$$

Dem hier in der eckigen Klammer stehenden Ausdrucke kann man auch eine solche Form geben, dass eines seiner Glieder ein vollständiges Differential ist, nämlich:

$$dA_e = -c\,[d(ii'w) + ii'dw]. \tag{29}$$

Diese von den electromotorischen Kräften gethane Arbeit möge nun noch mit der oben in (25) bestimmten, von den ponderomotorischen Kräften gethanen Arbeit in eine Summe vereinigt werden. Wir wollen dabei für die Gesammtarbeit das einfache Zeichen A einführen, so dass wir setzen können:

$$dA_p + dA_e = dA,$$

dann kommt:

$$dA = ii'dw - c[d(ii'w) + ii'dw],$$

oder anders geordnet:

$$dA = -cd(ii'w) + (1-c)\,ii'dw. \tag{30}$$

Nehmen wir nun an, dass für electrische Ströme und die von ihnen gethane Arbeit das Princip von der Erhaltung der Energie gelte, so muss sich die von den ponderomotorischen und electromotorischen Kräften zusammen während des Zeitelementes gethane Arbeit durch das Differential irgend einer Grösse darstellen lassen, welche nur von dem augenblicklichen Zustande der Ströme, also von ihren Lagen und Intensitäten abhängt. Wir wollen, in Uebereinstimmung mit dem in der Electrostatik und beim Magnetismus angewandten Verfahren, diejenige Grösse, deren negatives

Differential die Arbeit darstellt, zur besonderen Benennung und Bezeichnung auswählen. Diese Grösse möge das electrodynamische Potential der beiden Ströme auf einander genannt und durch das Zeichen W dargestellt werden, so dass zu setzen ist:

$$dA = -dW. \tag{31}$$

Halten wir diese Gleichung mit der Gleichung (30) zusammen, so sehen wir, dass an der rechten Seite der letzteren das zweite Glied, nämlich $(1 - c)\, ii'\, dw$, welches kein vollständiges Differential ist, verschwinden muss, woraus folgt, dass die Inductionsconstante c in unseren Gleichungen, in welchen zur Messung der Stromintensitäten das mechanische Maass angewandt ist, den Werth 1 haben muss. Das dann an der rechten Seite von (30) allein übrig bleibende erste Glied muss mit $-dW$ übereinstimmen, und wir erhalten daher zur Bestimmung des electrodynamischen Potentials der beiden Ströme auf einander die Gleichung:

$$W = ii'\, w. \tag{32}$$

Das electrodynamische Potential der beiden Ströme auf einander ist also dem oben mit Q bezeichneten und durch die Gleichung (24) bestimmten magnetischen Potential der beiden Ströme auf einander dem absoluten Werthe nach gleich, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt.

ABSCHNITT IX.

Ableitung eines neuen electrodynamischen Grundgesetzes.

§. 1. Verallgemeinerung des electrischen Kraftgesetzes und Ansichten über die strömende Electricität.

Die im vorigen Abschnitte besprochenen ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte sind von der Bewegung der Electricität abhängig, und man muss daher schliessen, dass bewegte Electricitätstheilchen anders auf einander wirken, als ruhende. Es entsteht nun die Frage, ob sich für die Kräfte, welche zwei bewegte Electricitätstheilchen auf einander ausüben, ein allgemeines Gesetz aufstellen lässt, welches alle electrostatischen und electrodynamischen Wirkungen erklärt, und keiner bekannten Erscheinung widerspricht.

Der erste, welcher die electrischen Wirkungen von diesem allgemeinen Gesichtspuncte aus betrachtet hat, ist W. Weber gewesen, welcher bekanntlich für die Kräfte, welche zwei bewegte Electricitätstheilchen auf einander ausüben, ein Grundgesetz aufgestellt hat, welches zur Erklärung aller electrischen Wirkungen ausreichen soll. Seien nämlich e und e' die beiden in Puncten concentrirt gedachten Electricitätstheilchen, und r ihr gegenseitiger Abstand zur Zeit t, so bestehen die von den Theilchen auf einander ausgeübte Kräfte nach Weber in einer gegenseitigen Abstossung von der Stärke

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}\,r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

worin c eine Constante bedeutet.

Bei der Ableitung dieser Formel ist Weber von der Vorstellung ausgegangen, dass bei einem galvanischen Strome in jedem Leiterelemente gleiche Mengen positiver und negativer Electricität sich mit gleichen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten bewegen. Diese Vorstellung ist eine so complicirte, dass schon viele Physiker daran Anstoss genommen haben. So lange nicht zwingende Gründe für die Annahme einer solchen Doppelbewegung vorliegen, darf man die einfachere Vorstellung, dass ein Strom aus der Bewegung nur Eines Fluidums bestehe, nicht aufgeben, sondern muss versuchen, aus ihr die Wirkungen des galvanischen Stromes zu erklären.

Der letztgenannten, schon lange und oft zum Ausdruck gelangten Vorstellung hat neuerdings besonders Carl Neumann eine bestimmtere Form gegeben [1]), indem er dabei sagt, dass seine Ueberlegungen vollständig mit denen übereinstimmen, welche Riemann schon im Jahre 1854 in der einunddreissigsten Naturforscherversammlung ausgesprochen habe. Neumann nimmt nämlich an, ein metallischer Leiter enthalte zwar in jedem Raumtheilchen positive und negative Electricität, aber nur die erstere sei in der Weise beweglich, dass sie im Leiter strömen könne, während die letztere unlöslich mit den ponderablen Atomen verbunden sei.

Ueber den Punct, ob es überhaupt nöthig ist, neben der beweglichen positiven Electricität noch eine an den ponderablen Atomen haftende negative Electricität anzunehmen, oder ob sich die dieser Electricität zugeschriebenen Kräfte auch auf andere Weise erklären lassen, können vielleicht noch verschiedene Ansichten geltend gemacht werden. Indessen bei der mathematischen Behandlung der Sache kann man, da die Kräfte so stattfinden, wie sie von solcher den Atomen anhaftenden negativen Electricität ausgeübt werden würden, jedenfalls die letztere als vorhanden voraussetzen, ohne dadurch schon eine feste Entscheidung über ihre wirkliche Existenz zu treffen. In diesem Sinne werde ich jene Vor-

---

[1]) Berichte der k. sächsischen Gesellschaft der Wiss. Math.-phys. Classe, 1871, S. 394 und 417.

stellungsweise so, wie sie von Neumann formulirt ist, den nachstehenden Betrachtungen zu Grunde legen.

§. 2. Unvereinbarkeit des Weber'schen Grundgesetzes mit der Vorstellung von nur Einer im festen Leiter beweglichen Electricität.

Es möge nun zunächst die Frage gestellt werden, ob das Weber'sche Grundgesetz mit jener Ansicht, dass nur Eine Electricität im festen Leiter strömen könne, vereinbar ist. Dazu wollen wir als Kriterium den Erfahrungssatz wählen, dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom auf ruhende Electricität keine bewegende Kraft ausübt, und wollen untersuchen, ob das Weber'sche Grundgesetz auch dann noch zu diesem Satze führt, wenn man nur Eine der beiden Electricitäten als beweglich betrachtet.

Im Puncte x, y, z denken wir uns irgend eine Electricitätsmenge, z. B. eine Einheit positiver Electricität, und im Puncte x', y', z' ein Element ds' eines galvanischen Stromes befindlich. Die im letzteren sich bewegende positive Electricität heisse $h'ds'$. Diese übt nach Weber auf die ruhende Electricitätseinheit eine Abstossung aus, welche durch

$$\frac{h'ds'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right]$$

dargestellt wird, wobei natürlich ein negativer Werth des Ausdruckes Anziehung bedeutet. Hierin können wir im vorliegenden Falle, wo die Grösse r sich nur durch die Bewegung der im Leiterelemente ds' befindlichen Electricität ändert, setzen:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

und in dieser letzteren Formel haben wir, wenn wir den Leiter des Stromes als durchweg gleich voraussetzen, so dass h' in allen seinen Theilen einen und denselben Werth hat, für einen constan-

ten Strom $\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0$ zu setzen. Dadurch geht der Ausdruck für die Abstossung über in:

$$\frac{h' ds'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[- \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right\}.$$

Nimmt man nun zunächst mit Weber an, dass in dem Leiterelemente ds' auch eine eben so grosse Menge negativer Electricität sich mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung bewege, so muss man, um die Abstossung, welche diese auf die ruhende Electricitätseinheit ausüben würde, zu erhalten, dem vorigen Ausdrucke im Ganzen das negative Vorzeichen geben, und ausserdem das Vorzeichen des Differentialcoëfficienten $\frac{ds'}{dt}$ umkehren. Da aber dieser Differentialcoëfficient nur quadratisch vorkommt, so bringt die Umkehrung seines Vorzeichens keine Aenderung in dem Ausdrucke hervor. Die von der negativen Electricität ausgeübte Kraft würde also der von der positiven ausgeübten gleich und entgegengesetzt sein, so dass beide sich aufheben, und das Stromelement gar keine Kraft auf die ruhende Electricitätseinheit ausüben würde. Es ergiebt sich also, dass das Weber'sche Grundgesetz, wenn es mit der Weber'schen Vorstellung von der doppelten Electricitätsbewegung in Verbindung gebracht wird, mit dem obigen Erfahrungssatze übereinstimmt, indem nicht nur für einen geschlossenen Strom, sondern auch für jedes einzelne Element desselben die Kraft Null wird.

Nun wollen wir aber die andere Annahme machen, dass die in dem Leiterelemente befindliche negative Electricität nicht ströme, sondern fest mit den ponderablen Atomen verbunden sei. Dann wird die Kraft, welche diese auf die ruhende Electricitätseinheit ausübt, durch die aus der Electrostatik bekannte einfache Formel $-\frac{h' ds'}{r^2}$ dargestellt. Demnach heben sich in diesem Falle die beiden Kräfte nicht vollständig auf, sondern es bleibt eine durch die Formel

$$\frac{h' ds'}{c^2 r^2} \left[- \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2$$

dargestellte Abstossung übrig.

Die in die x-Richtung fallende Componente dieser Kraft erhält man durch Multiplication mit $\frac{x - x'}{r}$, und es ergiebt sich daher, wenn man diese Componente mit $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}\,ds'$ bezeichnet, folgende Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}\,ds' = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{x - x'}{r^3}\left[-\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + 2r\,\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}\right] ds'.$$

Diese Gleichung muss nach s' über den ganzen geschlossenen Strom integrirt werden, um die Grösse $\mathfrak{X}$, nämlich die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche der ganze Strom auf die ruhende Electricitätseinheit ausübt, zu erhalten.

Dazu wollen wir mit dem auf der rechten Seite stehenden Ausdrucke noch einige Umformungen vornehmen. Man kann setzen:

$$\frac{x - x'}{r^{3/2}} = 2\,\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x} \text{ und } \frac{1}{r^{3/2}}\left[-\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + 2r\,\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}\right] = 4\,\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s'^2}.$$

Dadurch geht die Gleichung (1) über in:

$$(2)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}\,ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x}\,\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s'^2}\,ds'.$$

Hierin kann man weiter setzen:

$$\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x}\,\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s'^2} = \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x}\,\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right) - \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\,\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s'\,\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x}\,\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2\right],$$

wodurch (2) übergeht in:

$$(3)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}\,ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\left\{\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x}\,\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2\right]\right\} ds'.$$

Wenn man diese Gleichung über einen geschlossenen Strom integrirt, so giebt das erste innerhalb der Klammer befindliche Glied, welches ein Differentialcoëfficient nach s' ist, den Werth Null. Das zweite Glied, welches ein Differentialcoëfficient nach x ist, kann, da die Veränderliche x von der Veränderlichen s' unabhängig ist, unter dem Differentiationszeichen integrirt werden, und es kommt:

$$(4)\qquad \mathfrak{X} = -\frac{4h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2 ds'.$$

Ganz entsprechende Ausdrücke ergeben sich auch für die in die y- und z-Richtung fallenden Componenten der Kraft.

Man sieht sofort, dass das hierin vorkommende Integral nicht Null ist, und dass auch seine Differentialcoëfficienten nach x, y und z im Allgemeinen nicht Null sein werden. Demnach müsste ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter Strom auf ruhende Electricität eine Kraft ausüben, und zwar eine Kraft, welche ein Ergal hätte, da ihre in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten, der obigen Gleichung nach, durch die negativen Differentialcoëfficienten einer von den Coordinaten der betreffenden ruhenden Electricitätseinheit abhängenden Grösse dargestellt würden. Der galvanische Strom müsste also, ähnlich wie ein mit einem Ueberschuss von positiver oder negativer Electricität geladener Körper, in jedem in seiner Nähe befindlichen leitenden Körper eine veränderte Vertheilung der Electricität hervorrufen [1]). Auch für einen Magneten würde man, wenn man den Magnetismus durch moleculare electrische Ströme erklärt, ähnliche Wirkungen auf die ihn umgebenden leitenden Körper erhalten.

Solche Wirkungen sind aber, trotz der vielen Gelegenheit, die man dazu gehabt haben würde, nie beobachtet worden, und man wird daher den obigen Satz, welcher ausdrückt, dass sie nicht stattfinden, gewiss allgemein als feststehenden Erfahrungssatz anerkennen, woraus dann, da das in der Gleichung (4) ausgedrückte Resultat diesem Satze widerspricht, der Schluss folgt, dass das **Weber'sche Grundgesetz mit der Ansicht, dass bei einem in einem festen Leiter stattfindenden galvanischen Strome nur die positive Electricität sich bewegt, unvereinbar ist.**

§. 3. Betrachtung eines von Riemann aufgestellten Kraftgesetzes unter dem obigen Gesichspuncte.

In neuester Zeit, nachdem ich meine erste Mittheilung über das von mir aufgestellte Grundgesetz schon veröffentlicht hatte,

[1]) Derselbe Schluss ist auch schon i. J. 1873 von Riecke gezogen (Gött. Nachr. 5. Juli 1873), was mir, als ich dieses schrieb, unbekannt war, worauf ich aber, noch während es in Borchardt's Journal gedruckt wurde, durch den damals eben erschienenen neuesten Aufsatz von Riecke (Gött. Nachr. 28. Juni 1876), in welchem jener ältere citirt war, aufmerksam gemacht wurde.

ist ein Werk erschienen [1]), in welchem ein anderes, von Riemann in seinen Vorlesungen mitgetheiltes electrodynamisches Kraftgesetz angeführt wird, und es wird daher zweckmässig sein, im Anschlusse an das Vorige auch dieses Gesetz unter demselben Gesichtspuncte zu betrachten, d. h. zu untersuchen, ob es mit der Ansicht von nur Einer im festen Leiter beweglichen Electricität vereinbar ist.

Seien, wie oben, e und e' zwei in Puncten concentrirt gedachte Electricitätstheilchen, x, y, z und x', y', z' ihre rechtwinkligen Coordinaten zur Zeit t, so gilt für die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche e von e' erleidet, nach Riemann (S. 327) folgende Gleichung:

$$(5)\quad X = \frac{ee'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{ee'}{c^2}\frac{d\left\{\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)\right\}}{dt}$$
$$+\frac{ee'}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\left\{\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right\},$$

und entsprechende Gleichungen sind für die beiden anderen Coordinatenrichtungen zu bilden.

Diese Gleichung wollen wir nun wieder dazu anwenden, die Kraft zu bestimmen, welche ein geschlossener galvanischer Strom auf eine ruhende Electricitätseinheit ausübt. Wir setzen daher:

$$e = 1 \text{ und } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Ferner ersetzen wir, um zunächst die Kraft zu bestimmen, welche von der im Leiterelemente ds' sich bewegenden positiven Electricität ausgeübt wird, e' durch das Product $h'ds'$. Dann geht der vorige Ausdruck über in:

$$h'ds'\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{dt}\right)}{dt}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

Hierin kann das letzte Glied dadurch vereinfacht werden, dass die in der eckigen Klammer stehende Summe durch $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ ersetzt

[1]) Schwere, Electricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearbeitet von Karl Hattendorff, Hannover 1876.

wird, und das zweite Glied möge so umgeändert werden, dass x' und r als Functionen von s' und die Grösse s' als Function von t behandelt und dabei, weil der Strom constant ist, $\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0$ gesetzt wird. Dann kommt:

$$h' ds' \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \left(\frac{2}{r} \frac{dx'}{ds'} \right)}{\partial s'} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \right].$$

Gehen wir nun zunächst wieder von der Voraussetzung aus, dass in dem Leiterelemente ds' eine gleich grosse Menge negativer Electricität mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung ströme, so haben wir, um die x-Componente der von dieser Electricitätsmenge auf die ruhende Electricitätseinheit ausgeübten Kraft darzustellen, denselben Ausdruck, wie vorher, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen zu bilden. Beide Kräfte heben sich somit auf, und es ist daher unter der Voraussetzung zweier in gleicher Weise im Leiter beweglicher Electricitäten auch das Riemann'sche Kraftgesetz mit unserem Erfahrungssatze im Einklange.

Machen wir dagegen die Voraussetzung, dass die im Leiterelemente ds' befindliche negative Electricität in Ruhe sei, so haben wir die x-Componente der von ihr auf die ruhende Electricitätseinheit ausgeübten Kraft durch

$$- h' ds' \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}$$

darzustellen, und wir erhalten daher, wenn wir die x-Componente der Kraft, mit welcher das Stromelement ds' auf die ruhende Electricitätseinheit wirkt, wieder mit $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'} ds'$ bezeichnen, die Gleichung:

$$(6) \qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'} ds' = \frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \left[- \frac{\partial \left(\frac{2}{r} \frac{dx'}{ds'} \right)}{\partial s'} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right] ds'.$$

Denken wir uns diese Gleichung über einen geschlossenen Strom integrirt, so giebt das erste Glied Null, und es kommt:

$$\mathfrak{X} = \frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \int \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} ds',$$

oder anders geschrieben:

$$(7) \qquad \mathfrak{X} = - \frac{h'}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{ds'}{r}.$$

Entsprechende Gleichungen erhält man natürlich auch für die in die beiden anderen Coordinatenrichtungen fallenden Kraftcomponenten.

Das hierin vorkommende Integral ist nicht Null und auch seine Differentialcoëfficienten sind es im Allgemeinen nicht. Wir erhalten also auch aus dem Riemann'schen Gesetze dasselbe Resultat, wie aus dem Weber'schen, dass ein geschlossener galvanischer Strom, und ebenso auch ein Magnet, auf jeden in seiner Nähe befindlichen leitenden Körper eine der electrostatischen Influenz ähnliche Wirkung ausüben müsste. Da dieses unserem Erfahrungssatze widerspricht, so können wir auch von dem Riemann'schen Gesetze sagen, dass es mit der Vorstellung von nur Einer im festen Leiter beweglichen Electricität nicht vereinbar ist.

§. 4. Zulässigkeit gewisser Vorbedingungen bei der Bestimmung der Kräfte.

Wenn wir nun versuchen wollen, ein anderes Grundgesetz aufzufinden, welches von dem vorstehend erwähnten Widerspruche mit der Erfahrung frei ist, so müssen wir uns zunächst darüber klar werden, ob und in wie weit es zulässig ist, in Bezug auf die Richtung und Grösse der Kräfte gewisse Vorbedingungen zu stellen.

Weber hat es als selbstverständlich betrachtet, dass die Kräfte, welche zwei in Puncten concentrirt gedachte Electricitätstheilchen auf einander ausüben, nur in gegenseitigen Anziehungen oder Abstossungen bestehen können, dass sie also gleich und entgegengesetzt sein und ihrer Richtung nach in die Verbindungslinie der beiden Puncte fallen müssen. In dieser Beziehung muss ich aber auf das zurückkommen, was schon in §. 1 des vorigen Abschnittes über die von zwei Stromelementen auf einander ausgeübten Kräfte gesagt wurde.

Wenn Newton die Kräfte, welche zwei materielle Puncte unabhängig von ihrer etwaigen Bewegung auf einander ausüben, ohne weiteres als eine gegenseitige Anziehung betrachtet, und wenn man ebenso von den Kräften, welche zwei ruhende Electricitätstheilchen auf einander ausüben, ohne weiteres annimmt, dass sie nur in gegenseitiger Anziehung oder Abstossung bestehen können, so ist das vollkommen berechtigt, denn zwei ruhenden Puncten

kann man gar keine Kraft zuschreiben, welche von der Verbindungslinie seitlich abwiche, da kein Umstand vorhanden ist, durch welchen Eine seitliche Richtung vor den übrigen ausgezeichnet wäre. Bei derjenigen Kraft dagegen, welche zwei Electricitätstheilchen wegen ihrer Bewegungen auf einander ausüben, verhält es sich ganz anders. In diesem Falle giebt es in der That ausser der Verbindungslinie der Theilchen noch andere ausgezeichnete Richtungen, nämlich die beiden Bewegungsrichtungen der Theilchen, und es ist sehr wohl denkbar, dass diese einen Einfluss auf die Kraftrichtungen haben. Hätte Newton ein Gesetz für solche Kräfte, die durch die Bewegungen der Puncte verursacht werden, aufzustellen gehabt, so würde er bei der Vorsicht, mit welcher er ungerechtfertigte Hypothesen vermied, wohl nicht im Voraus angenommen haben, dass diese Kräfte eine bestimmte von den Bewegungsrichtungen der Puncte unabhängige Richtung haben müssten.

Ich kann daher die in dieser Beziehung stattfindende Einfachheit des Weber'schen Kraftgesetzes nicht als einen Vorzug desselben anerkennen, da es eine Einfachheit ist, die nicht der Natur der Sache entspricht, sondern durch eine der Sache fremde Voraussetzung willkürlich hineingebracht ist.

Riemann hat sich auch in der That bei der Aufstellung seines Kraftgesetzes an die Bedingung, dass die Kraftrichtungen in die Verbindungslinie der beiden Puncte fallen müssen, nicht gebunden. Dagegen hat er an der anderen Bedingung, dass die beiden von den Puncten auf einander ausgeübten Kräfte gleich und entgegengesetzt sein müssen, noch festgehalten. Dadurch hat er erreicht, dass die beiden Kräfte, wenn man sie sich an einen gemeinsamen Angriffspunct verlegt denkt, als Resultante Null geben, was mit dem Verhalten der sonst gewöhnlich betrachteten Kräfte, die von der Bewegung unabhängig sind, übereinstimmt. Ich glaube aber, dass damit nicht viel gewonnen ist, denn, wenn die beiden Kräfte auch nicht eine nach einer bestimmten Richtung gehende Resultante geben, so geben sie doch ein Drehungsmoment, worin eine wesentliche Abweichung von dem Verhalten der von der Bewegung unabhängigen Kräfte liegt. Wenn nun aber einmal in Einer Beziehung eine solche wesentliche Abweichung als möglich zugegeben ist, so liegt meiner Ansicht nach auch kein Grund mehr vor, in einer anderen Beziehung die entsprechende Abweichung für unmöglich zu erklären.

Wir wollen daher im Folgenden über die Richtung und Grösse der Kräfte, welche zwei bewegte Electricitätstheilchen auf einander ausüben, im Voraus gar keine Annahme machen, sondern nur versuchen, durch eine auf der Grundlage von Erfahrungssätzen auszuführende Entwickelung zur Bestimmung der Kräfte zu gelangen.

§. 5. Ausdrücke der Kraftcomponenten für ein specielles Coordinatensystem.

Gemäss der Annahme, dass die Kraft von der gegenseitigen Lage der Theilchen und von ihren durch die Geschwindigkeitscomponenten und Beschleunigungscomponenten bestimmten Bewegungszuständen abhänge, bilden wir für jede der drei in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft einen allgemeinen Ausdruck, welcher von den relativen Coordinaten des einen Theilchens zum anderen, und von den nach der Zeit genommenen Differentialcoëfficienten erster und zweiter Ordnung der Coordinaten beider Theilchen abhängt. In diesen Ausdruck nehmen wir vorläufig alle möglichen Glieder bis zur zweiten Ordnung auf, wobei unter Gliedern zweiter Ordnung alle Glieder von solchen Formen verstanden werden, wie sie durch zweimalige Differentiation nach t entstehen können, die also entweder einen Differentialcoëfficienten zweiter Ordnung oder zwei Differentialcoëfficienten erster Ordnung als Factoren haben.

Es möge nun zunächst ein rechtwinkliges Coordinatensystem von specieller Lage eingeführt werden. Die eine Coordinatenaxe soll nämlich durch die beiden Puncte gehen, in welchen die beiden Electricitätstheilchen sich zur Zeit t gerade befinden, und zwar möge die Richtung von e' nach e als die positive angenommen werden. Die auf dieser Axe gemessenen Coordinaten der beiden Theilchen mögen l und l' sein. Die beiden anderen Coordinatenaxen können irgend welche auf der ersten und unter einander senkrechte Richtungen haben. Wenn dann die auf diesen Axen gemessenen Coordinaten der beiden Theilchen allgemein mit m, n und m', n' bezeichnet werden, so ist zur Zeit t zu setzen:

$$m = n = m' = n' = 0.$$

Demnach sind auch die auf diese beiden Richtungen bezüglichen relativen Coordinaten $m - m'$ und $n - n'$ zur Zeit t gleich Null,

und nur die auf die erste Richtung bezügliche relative Coordinate $l - l'$ hat einen angebbaren Werth, welcher gleich der Entfernung der beiden Theilchen von einander ist und daher, der obigen Bezeichnungsweise entsprechend, durch r dargestellt werden kann. Daraus folgt, dass bei Anwendung dieses Coordinatensystems die Functionen der relativen Coordinaten, welche in den Ausdrücken der Kraftcomponenten vorkommen, nur Functionen von r sein können. Auch in anderer Beziehung bietet dieses Coordinatensystem noch Gelegenheit zu Vereinfachungen dar, indem aus dem Verhalten der in den Gliedern vorkommenden Differentialcoëfficienten unmittelbar ersichtlich ist, dass gewisse Glieder auf die betreffende Kraftcomponente keinen Einfluss haben können, und gewisse Paare von Gliedern einen gleichen Einfluss haben müssen.

Als erste zu untersuchende Kraftcomponente wählen wir die in die l-Richtung fallende aus. Indem wir diese mit Lee' bezeichnen, bilden wir den die Grösse L bestimmenden Ausdruck.

Dieser Ausdruck muss zunächst ein Glied enthalten, welches von den Bewegungen der Theilchen unabhängig ist, und die electrostatische Kraft darstellt. Dieses Glied ist vollkommen bekannt und lautet $\frac{1}{r^2}$.

Von den anderen Gliedern betrachten wir zuerst diejenigen, welche nur Differentialcoëfficienten der Coordinaten des Theilchens e enthalten.

Die Glieder, welche nur Einen Differentialcoëfficienten erster Ordnung enthalten, lauten allgemein:

$$A \frac{dl}{dt}, \quad A' \frac{dm}{dt}, \quad A'' \frac{dn}{dt},$$

worin A, A' und A'' Functionen von r bedeuten; aber in Bezug auf die beiden letzten lässt sich sofort ein Schluss der oben angedeuteten Art ziehen. Das Glied $A' \frac{dm}{dt}$ ändert nämlich mit $\frac{dm}{dt}$ sein Vorzeichen. Nun verhält sich aber für einen in der l-Axe liegenden Punct die negative Seite der m-Richtung ebenso zur l-Richtung, wie die positive Seite, und es ist daher in unserem Falle, wo beide Puncte in der l-Axe liegen, kein Grund abzusehen, weshalb eine Bewegung nach der einen Seite eine andere Kraft in der l-Richtung zur Folge haben sollte, als eine Bewegung nach der anderen Seite. Demnach muss dieses Glied aus dem Aus-

drucke verschwinden, d. h. es muss $A' = 0$ sein. Ebenso kann man auch schliessen, dass $A'' = 0$ sein muss. Es bleibt also von den obigen drei Gliedern nur $A \frac{dl}{dt}$ übrig.

Dasselbe gilt von den drei Gliedern

$$A_1 \frac{d^2 l}{dt^2}, \quad A'_1 \frac{d^2 m}{dt^2}, \quad A''_1 \frac{d^2 n}{dt^2},$$

von denen die beiden letzten ebenfalls verschwinden müssen, so dass nur das erste übrig bleibt.

Was endlich die Glieder anbetrifft, welche zwei gleiche oder verschiedene Differentialcoëfficienten erster Ordnung als Factoren haben, in welchen also eines der folgenden Quadrate und Producte vorkommt:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{dn}{dt}\right)^2, \quad \frac{dl}{dt}\,\frac{dm}{dt}, \quad \frac{dl}{dt}\,\frac{dn}{dt}, \quad \frac{dm}{dt}\,\frac{dn}{dt},$$

so lässt sich auf die Glieder mit den zuletzt erwähnten Producten dasselbe anwenden, was vorher gesagt wurde. Diese Producte ändern nämlich ihr Vorzeichen mit $\frac{dm}{dt}$ und $\frac{dn}{dt}$, während doch sowohl bei der m-Richtung als auch bei der n-Richtung die negative Seite sich zu den beiden anderen Axen gerade so verhält, wie die positive Seite. Glieder mit diesen Producten können also in dem Ausdrucke nicht vorkommen. Da ferner die m- und n-Richtung sich zur l-Axe geometrisch gleich verhalten, so müssen die Quadrate $\left(\frac{dm}{dt}\right)^2$ und $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$ gleiche Coëfficienten haben. Die betreffenden Glieder bilden also eine Summe von der Form:

$$A'_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right].$$

Dieser Summe wollen wir folgende etwas abgeänderte Gestalt geben:

$$A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right],$$

worin A_2 an die Stelle der Differenz $A'_2 - A_3$ gesetzt ist. Nun ist aber, wenn v die Geschwindigkeit des Theilchens e bedeutet:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = v^2,$$

und die vorige Summe lässt sich daher einfacher so schreiben:

$$A_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2.$$

Fassen wir nun alle Glieder, welche nur Differentialcoëfficienten der Coordinaten des Theilchens e enthalten, zusammen und bezeichnen die Summe dieser Glieder mit L_1, so kommt:

$$(8) \qquad L_1 = A\frac{dl}{dt} + A_1\frac{d^2l}{dt^2} + A_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2.$$

Ganz entsprechend können wir, wenn wir die Summe der Glieder, welche nur Differentialcoëfficienten der Coordinaten des Theilchens e' enthalten, mit L_2 bezeichnen, schreiben:

$$(9) \qquad L_2 = A_4\frac{dl'}{dt} + A_5\frac{d^2l'}{dt^2} + A_6\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2 + A_7 v'^2.$$

Nun bleiben noch die Glieder zu betrachten, welche ein Product aus Differentialcoëfficienten der Coordinaten beider Theilchen, also eines der folgenden Producte enthalten:

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt}, \quad \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt}, \quad \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt},$$

$$\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt}, \quad \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}, \quad \frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt}, \quad \frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt}, \quad \frac{dm}{dt}\frac{dn'}{dt}, \quad \frac{dm'}{dt}\frac{dn}{dt}.$$

Bei den sechs letzten Producten kann man wieder aus dem Umstande, dass sie mit $\frac{dm}{dt}, \frac{dm'}{dt}, \frac{dn}{dt}, \frac{dn'}{dt}$ ihr Vorzeichen ändern, ganz in der obigen Weise schliessen, dass Glieder mit diesen Producten in dem Ausdrucke der Kraftcomponente nicht vorkommen können. Auf das zweite und dritte Product aber ist dieser Schluss nicht anwendbar, obwohl die Aenderung des Vorzeichens auch bei ihnen vorkommt. Wenn nämlich der Differentialcoëfficient $\frac{dm}{dt}$ sein Vorzeichen ändert, also das Theilchen e seine in der m-Richtung stattfindende Bewegung umkehrt, so verhält sich die jetzige Bewegung zwar zur l-Richtung ebenso, wie die frühere, aber zu der durch $\frac{dm'}{dt}$ ausgedrückten nach der m-Richtung gehenden Bewegung des Theilchens e' verhält sie sich anders. Wenn sie früher mit ihr nach gleicher Seite ging, so geht sie jetzt nach entgegengesetzter Seite, und umgekehrt. Die Coëfficienten dieser beiden Producte brauchen also nicht Null zu werden, aber sie müssen

unter einander gleich sein, weil die m- und n-Richtung sich zur l-Axe geometrisch gleich verhalten.

Es ergiebt sich also, indem wir die Summe der Glieder, welche Differentialcoëfficienten der Coordinaten beider Theilchen enthalten, mit L_3 bezeichnen, folgende Gleichung:

$$L_3 = A'_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right).$$

Diese Gleichung wollen wir in ähnlicher Weise, wie es weiter oben mit einem anderen Ausdrucke geschehen ist, umgestalten. Wir schreiben zunächst:

$$L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right),$$

worin A_8 an die Stelle der Differenz $A'_8 - A_9$ gesetzt ist. Nun ist aber, wenn ε den Winkel zwischen den Bewegungsrichtungen der beiden Theilchen e und e' bedeutet:

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt} = vv' \cos \varepsilon,$$

und die vorige Gleichung lässt sich daher so schreiben:

$$(10) \qquad L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 vv' \cos \varepsilon.$$

Nachdem wir vorstehend die einzelnen Gruppen der in L enthaltenen Glieder näher bestimmt haben, erhalten wir aus ihnen die ganze Grösse L durch Bildung folgender Gleichung:

$$(11) \qquad L = \frac{1}{r^2} + L_1 + L_2 + L_3.$$

In ganz entsprechender Weise können wir nun auch die in die m- und n-Richtung fallenden Kraftcomponenten, welche mit Mee' und Nee' bezeichnet werden mögen, behandeln; es wird aber nicht nöthig sein, auch diese Behandlung hier vollständig durchzuführen, sondern es wird genügen, die zur Bestimmung von M und N dienenden Systeme von Gleichungen einfach hinzuschreiben. Es sind die folgenden:

$$(12) \qquad \begin{cases} M_1 = B \frac{dm}{dt} + B_1 \frac{d^2m}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt}, \\ M_2 = B_3 \frac{dm'}{dt} + B_4 \frac{d^2m'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt}, \\ M_3 = B_6 \frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}, \\ M = M_1 + M_2 + M_3. \end{cases}$$

$$
(13) \quad \begin{cases} N_1 = B \frac{dn}{dt} + B_1 \frac{d^2 n}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt} \frac{dn}{dt}, \\ N_2 = B_3 \frac{dn'}{dt} + B_4 \frac{d^2 n'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt} \frac{dn'}{dt}, \\ N_3 = B_6 \frac{dl}{dt} \frac{dn'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt} \frac{dn}{dt}, \\ N = N_1 + N_2 + N_3. \end{cases}
$$

§. 6. Ausdrücke der Kraftcomponenten für ein beliebiges Coordinatensystem.

Nachdem für ein specielles Coordinatensystem die drei Kraftcomponenten ausgedrückt sind, können wir daraus auch leicht die Kraftcomponenten für ein beliebiges Coordinatensystem ableiten.

Es sei irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem eingeführt, in welchem die beiden Electricitätstheilchen die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben. Die in diese Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft, welche e von e' erleidet, mögen durch Xee', Yee' und Zee' dargestellt werden, dann handelt es sich darum, die Grössen X, Y und Z auszudrücken.

Um X auszudrücken, bezeichnen wir die Winkel, welche die x-Richtung mit den früher angenommenen Coordinatenrichtungen, nämlich der l-, m- und n-Richtung bildet, mit (lx), (mx) und (nx). Dann ist zu setzen:

$$
(14) \qquad X = L \cos(lx) + M \cos(mx) + N \cos(nx).
$$

Man kann aber auch die einzelnen Bestandtheile von X durch die entsprechenden Bestandtheile von L, M und N ausdrücken. Bezeichnet man die Summe derjenigen in X vorkommenden Glieder, welche nur Differentialcoëfficienten der Coordinaten von e enthalten, mit X_1, die Summe der Glieder, welche nur Differentialcoëfficienten der Coordinaten von e' enthalten, mit X_2, und die Summe der Glieder, welche Producte aus Differentialcoëfficienten der Coordinaten beider Theilchen enthalten, mit X_3, so gilt für X_1 die Gleichung:

$$
(15) \qquad X_1 = L_1 \cos(lx) + M_1 \cos(mx) + N_1 \cos(nx),
$$

und eben solche Gleichungen gelten für X_2 und X_3.

Setzt man nun in die vorige Gleichung für L_1, M_1 und N_1 die unter (8), (12) und (13) gegebenen Werthe ein, und berücksichtigt bei der Addition der drei Glieder die Gleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{dl}{dt}\cos(lx) + \frac{dm}{dt}\cos(mx) + \frac{dn}{dt}\cos(nx) = \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2l}{dt^2}\cos(lx) + \frac{d^2m}{dt^2}\cos(mx) + \frac{d^2n}{dt^2}\cos(nx) = \frac{d^2x}{dt^2}, \end{cases}$$

so kommt:

$$(17)\quad \begin{cases} X_1 = B\frac{dx}{dt} + B_1\frac{d^2x}{dt^2} + B_2\frac{dl}{dt}\frac{dx}{dt} + \Big[(A-B)\frac{dl}{dt} \\ \qquad + (A_1-B_1)\frac{d^2l}{dt^2} + (A_2-B_2)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2\Big]\cos(lx). \end{cases}$$

Hierin substituiren wir für $\cos(lx)$ seinen Werth $\frac{x-x'}{r}$, und zwar multipliciren wir mit $\frac{1}{r}$ die einzelnen innerhalb der eckigen Klammer stehenden Glieder, während wir $x - x'$ als gemeinsamen Factor ausserhalb der Klammer stehen lassen.

Ferner wollen wir für die Differentialcoëfficienten von l diejenigen von r einführen. Es ist schon oben gesagt, dass der Abstand r der Theilchen e und e' von einander zur Zeit t einfach durch die Differenz $l - l'$ dargestellt wird, weil zu dieser Zeit die Coordinaten m, n, m' und n' gleich Null sind. Will man aber die Grösse r differentiiren, so muss man dazu den allgemeinen Ausdruck

$$r = \sqrt{(l-l')^2 + (m-m')^2 + (n-n')^2}$$

anwenden, und erst nach vollzogener Differentiation darf man $m - m' = n - n' = 0$ setzen. Für die Differentiation ist noch zu bemerken, dass sich die Coordinaten l, m, n nur durch die Bewegung des Theilchens e und die Coordinaten l', m', n' nur durch die Bewegung des Theilchens e' ändern, während r sich durch die Bewegung beider Theilchen ändert. Die den beiden einzelnen Bewegungen entsprechenden Aenderungen von r kann man dadurch von einander unterscheiden, dass man r als Function der von den beiden Theilchen beschriebenen Bahnlängen s und s', und diese Bahnlängen ihrerseits als Functionen von t betrachtet. Dann kann man die Differentiationen, welche sich nur auf die Bewegung des Theilchens e beziehen, so ausführen:

$$\frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt}=\frac{1}{r}\left[(l-l')\frac{dl}{dt}+(m-m')\frac{dm}{dt}+(n-n')\frac{dn}{dt}\right]$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{\partial r}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2}=-\frac{1}{r^3}\left[(l-l')\frac{dl}{dt}+(m-m')\frac{dm}{dt}+(n-n')\frac{dn}{dt}\right]^2$$

$$+\frac{1}{r}\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right]$$

$$+\frac{1}{r}\left[(l-l')\frac{d^2 l}{dt^2}+(m-m')\frac{d^2 m}{dt^2}+(n-n')\frac{d^2 n}{dt^2}\right].$$

In diesen Gleichungen kann nun

$$m-m'=n-n'=0 \text{ und } l-l'=r$$

gesetzt werden, und zugleich kann man setzen:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Aus den dadurch entstehenden Gleichungen ergeben sich für die Differentialcoëfficienten von l folgende Ausdrücke:

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt}, \tag{18}$$

$$\frac{d^2 l}{dt^2}=\left[\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2-\frac{1}{r}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{\partial r}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{19}$$

Diese Ausdrücke haben wir in (17) einzusetzen, wobei wir der Gleichförmigkeit wegen auch v^2 durch $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ersetzen wollen. Für die dann in der eckigen Klammer stehenden Functionen von r, mit welchen die Differentialcoëfficienten multiplicirt sind, wollen wir zur Abkürzung die einfachen Zeichen C, C_1, C_2 und C_3 einführen. Dann lautet die Gleichung:

$$(20)\quad \begin{cases} X_1 = B\frac{dx}{dt}+B_1\frac{d^2x}{dt^2}+B_2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt} \\ \quad +\left\{C\frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt}+\left[C_1\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}+C_2\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2+C_3\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right. \\ \quad \left.+C_1\frac{\partial r}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2}\right\}(x-x'). \end{cases}$$

Ganz ebenso erhält man:

$$(21)\quad \begin{cases} X_2 = B_3 \frac{dx'}{dt} + B_4 \frac{d^2x'}{dt^2} + B_5 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx'}{dt} \frac{ds'}{dt} \\ \quad + \left\{ C_4 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \left[C_5 \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + C_6 \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + C_7 \right] \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \right. \\ \quad \left. + C_5 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2} \right\} (x - x'). \end{cases}$$

Was nun noch die dritte zu bestimmende Grösse X_3 anbetrifft, so hat man, um sie auszudrücken, in die Gleichung

$$X_3 = L_3 \cos(lx) + M_3 \cos(mx) + N_3 \cos(nx)$$

für L_3, M_3 und N_3 die unter (10), (12) und (13) gegebenen Werthe einzusetzen. Wenn man dann bei der Addition der drei Glieder wieder die erste der Gleichungen (16) berücksichtigt, so kommt:

$$X_3 = B_6 \frac{dl}{dt} \frac{dx'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt} \frac{dx}{dt}$$
$$+ \left[(A_8 - B_6 - B_7) \frac{dl}{dt} \frac{dl'}{dt} + A_9 vv' \cos \varepsilon \right] \cos(lx),$$

welche Gleichung sich dem Obigen entsprechend auch so schreiben lässt:

$$(22)\quad \begin{cases} X_3 = B_6 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{dt} \frac{ds}{dt} + B_7 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx}{dt} \frac{ds'}{dt} \\ \quad + \left(C_8 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + C_9 \cos \varepsilon \right) (x - x') \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \end{cases}$$

Nachdem die drei Grössen X_1, X_2 und X_3 ausgedrückt sind, kann man die ganze Grösse X aus der Gleichung

$$(23)\qquad X = \frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3$$

erhalten.

Ebenso kann man natürlich auch die Grössen Y und Z darstellen, wozu man in den vorstehenden Gleichungen nur die speciell auf die x-Axe bezüglichen Grössen durch die entsprechenden, auf die y-Axe oder auf die z-Axe bezüglichen Grössen zu ersetzen hat, während man alles auf r bezügliche unverändert beibehält.

Es kommt nun darauf an, die in den Gleichungen (20), (21) und (22) vorkommenden, bisher unbestimmt gelassenen Functionen von r zu bestimmen.

§. 7. Bestimmung der in X_2 vorkommenden Functionen.

Um zunächst die in X_2 vorkommenden Functionen theilweise zu bestimmen, möge von dem Satze Gebrauch gemacht werden, welcher schon in den Paragraphen 2 und 3 angewandt wurde, nämlich dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom auf ruhende Electricität keine bewegende Kraft ausübt.

Zur Vermeidung von Missverständnissen wird es zweckmässig sein, diesem Satze noch einige Erläuterungen beizufügen.

Wenn irgendwo Electricität von Einer Art, also z. B. positive Electricität angehäuft ist, so übt diese auf jeden in ihrer Nähe befindlichen leitenden Körper eine electrostatische Influenzwirkung aus und erleidet demgemäss auch die Gegenwirkung der durch Influenz auf dem Leiter angehäuften Electricität. Diese Art von Wechselwirkung findet natürlich auch zwischen dem Leiter des galvanischen Stromes und jener als vorhanden angenommenen ruhenden Electricitätsmenge statt. Sie ist aber von dem in dem Leiter stattfindenden Strome ganz unabhängig und braucht daher hier nicht in Betracht gezogen zu werden.

Ferner befindet sich auf der Oberfläche eines Leiters, während er von einem Strome durchflossen wird, eine gewisse Menge getrennter Electricität, von welcher die auf die strömende Electricität wirkende, zur Ueberwindung des Leitungswiderstandes nöthige treibende Kraft herrührt. Diese Electricität kann ebenfalls auf die als vorhanden angenommene ruhende Electricitätsmenge eine Kraft ausüben; aber auch von dieser Kraft können wir hier absehen, da sie mit der von uns zu betrachtenden Kraft, welche die strömende Electricität wegen ihrer Bewegung ausübt, in keinem Zusammenhange steht, und nicht nur für die theoretische Betrachtung, sondern auch für die Beobachtung davon getrennt werden kann. Man kann nämlich dem Leiter des galvanischen Stromes eine solche Form geben, dass die Theile, welche am meisten positiv electrisch sind, denen, welche am meisten negativ electrisch sind, sehr nahe liegen, z. B. die Form einer Spirale, welche aus zwei Lagen von Windungen besteht, die so gewickelt sind, dass die Windungen der zweiten Lage nach derselben Seite zurückgehen, von welcher

die der ersten ausgingen. Dann hebt sich die von jener getrennten Electricität ausgeübte Kraft zum grössten Theile auf, während die von der strömenden Electricität ausgeübte Kraft bestehen bleibt. Ferner ist zu bemerken, dass bei einem Magneten, dessen Molecularströme, in Bezug auf die von ihnen ausgeübte Kraft, derselben Betrachtung, wie geschlossene galvanische Ströme, unterworfen werden können, jene getrennte Electricität, welche beim galvanischen Strome auf die strömende Electricität treibend wirkt, überhaupt nicht vorhanden ist.

Demnach können wir von jenen Nebenwirkungen ganz absehen, und uns auf die vom Strome selbst ausgeübten Wirkungen beschränken.

Wir denken uns also, wie in §. 2, im Puncte x, y, z eine ruhende positive Electricitätseinheit, und im Puncte x', y', z' ein Stromelement ds' befindlich, welches letztere aus der sich bewegenden positiven Electricitätsmenge $h'ds'$ und aus der ruhenden negativen Electricitätsmenge $-h'ds'$ besteht. Diese beiden Electricitätsmengen üben auf die ruhende Electricitätseinheit Kräfte aus, deren in die x-Richtung fallende Componenten sind:

$$h'ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_2\right) \quad \text{und} \quad -h'ds'\frac{x-x'}{r^3}.$$

Die Summe dieser beiden ist die x-Componente der von dem Stromelemente auf die Electricitätseinheit ausgeübten Kraft, welche Componente, wie früher, mit $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial s'}ds'$ bezeichnet werden möge. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial s'}ds' = h'ds'\,X_2.$$

Hierin haben wir für X_2 den unter (21) gegebenen Ausdruck zu setzen. Dabei wollen wir statt

$$\frac{dx'}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2x'}{dt^2}$$

die gleichbedeutenden Formeln

$$\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2x'}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}$$

anwenden und wegen der Voraussetzung, dass der Strom constant sei, $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$ setzen. Dann lautet die Gleichung:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial s'}\, ds' = h'\, ds' \Big\{ &\Big[B_3 \frac{dx'}{ds'} + C_4 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'}\Big] \frac{ds'}{dt} \\ &+ \Big[B_4 \frac{d^2 x'}{ds'^2} + B_5 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{dx'}{ds'} \\ &+ \Big(C_5 \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + C_6 \Big(\frac{\partial r}{\partial s'}\Big)^2 + C_7 \Big)(x - x')\Big] \Big(\frac{ds'}{dt}\Big)^2 \Big\}. \end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck muss, jenem Satze nach, bei der Integration über einen beliebigen geschlossenen Strom Null geben. Wenn aber das Integral des ganzen Ausdruckes, unabhängig von der Stromintensität, Null sein soll, so müssen die Integrale der beiden mit $\frac{ds'}{dt}$ und $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ multiplicirten Glieder einzeln Null sein. Die in den beiden eckigen Klammern stehenden Ausdrücke müssen demnach vollständige Differentialcoëfficienten nach s' sein, ohne dass dazu zwischen r und x' irgend eine specielle Relation angenommen zu werden braucht.

Wenn der erste Ausdruck ein Differentialcoëfficient nach s' sein soll, so kann er, wie man sofort aus seiner Form ersieht, nur gleich

$$- \frac{\partial}{\partial s'} [B_3 (x - x')]$$

sein, und dazu ist erforderlich, dass die Gleichung

$$(25)\qquad C_4 = - \frac{dB_3}{dr}$$

erfüllt ist.

Ebenso ist beim zweiten Ausdrucke, wenn man die Glieder, welche Differentialcoëfficienten zweiter Ordnung enthalten, ins Auge fasst, sofort ersichtlich, dass er nur mit folgendem Differentialcoëfficienten übereinstimmen kann:

$$\frac{\partial}{\partial s'} \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right],$$

wozu erforderlich ist, dass die Gleichungen

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} B_5 &= \frac{dB_4}{dr} - C_5, \\ C_6 &= \frac{dC_5}{dr}, \\ C_7 &= 0 \end{aligned}\right.$$

erfüllt sind.

Auf diese Weise sind die in der Gleichung (21) vorkommenden sieben unbestimmten Functionen auf drei zurückgeführt, und jene Gleichung lässt sich nun so schreiben:

$$
(27) \quad \left\{
\begin{aligned}
X_2 = &- \frac{\partial [B_3 (x - x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} \\
&+ \frac{\partial}{\partial s'} \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 \\
&+ \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \frac{d^2 s'}{dt^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

§. 8. Bestimmung der in X_1 vorkommenden Functionen.

Bei der Behandlung der Grösse X_1 können wir einen dem vorigen ähnlichen Erfahrungssatz anwenden, nämlich den folgenden: eine ruhende Electricitätsmenge übt auf einen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen und constanten galvanischen Strom keine Kraft aus.

Für diesen Satz gelten dieselben Erläuterungen, welche dem im vorigen Paragraphen angewandten hinzugefügt sind.

Um diesen Satz anzuwenden, denken wir uns im Puncte x', y', z' eine ruhende Electricitätseinheit und im Puncte x, y, z ein Stromelement ds, welches die bewegte Electricitätsmenge $h\,ds$ und die ruhende Electricitätsmenge $-h\,ds$ enthält. Die x-Componenten der Kräfte, welche diese beiden von der ruhenden Electricitätseinheit erleiden, sind:

$$
h\,ds \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_1 \right) \quad \text{und} \quad -h\,ds \frac{x - x'}{r^3}.
$$

Demnach wird die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement von der Electricitätseinheit erleidet, durch das Product $h\,ds\,X_1$ dargestellt, worin für X_1 der unter (20) gegebene Ausdruck zu setzen ist. Wenn wir dabei wieder für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Formeln

$$
\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}
$$

anwenden, und zugleich, weil der Strom constant sein soll, $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$ setzen, so lautet der Ausdruck:

$$h\,ds \left\{ \left[B \frac{dx}{ds} + C\,(x - x') \frac{\partial r}{\partial s} \right] \frac{ds}{dt} \right.$$
$$\left. + \left[B_1 \frac{d^2 x}{ds^2} + B_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx}{ds} + \left(C_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + C_2 \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + C_3 \right) (x - x') \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right\}.$$

Hieraus können wir nun zunächst ganz entsprechende Schlüsse ziehen, wie im vorigen Paragraphen. Wenn nämlich die Electricitätseinheit auf den ganzen Strom keine nach der x-Richtung gehende Kraft ausüben soll, so muss das auf den ganzen Strom ausgedehnte Integral des Ausdruckes Null sein, und daraus erhält man, entsprechend den Gleichungen (25) und (26), die Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} C = \frac{dB}{dr}, \\ B_2 = \frac{dB_1}{dr} + C_1; \quad C_2 = \frac{dC_1}{dr}; \quad C_3 = 0. \end{cases}$$

Ausserdem können aber im vorliegenden Falle noch weitere Schlüsse gezogen werden. Der Satz sagt nämlich nicht nur aus, dass die Electricitätseinheit den Strom nach keiner Richtung zu bewegen sucht, sondern auch, dass sie ihn um keine Axe zu drehen sucht, und daraus ergeben sich ebenfalls gewisse Gleichungen.

Da die Wahl der Axe beliebig ist, so wollen wir die durch den Punct x', y', z' gehende, der z-Axe parallele Gerade als Axe wählen, und für sie das Drehungsmoment bestimmen. Der obige Ausdruck für die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von der ruhenden Electricitätseinheit erleidet, lässt sich in Folge der Gleichungen (28) in nachstehende Form bringen:

$$h\,ds \frac{\partial P}{\partial s},$$

worin P eine durch folgende Gleichung bestimmte Grösse ist:

$$(29) \quad P = B\,(x - x') \frac{ds}{dt} + \left[B_1 \frac{dx}{ds} + C_1\,(x - x') \frac{\partial r}{\partial s} \right] \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Ebenso gilt für die y-Componente jener Kraft der Ausdruck:

$$h\,ds \frac{\partial Q}{\partial s},$$

worin Q durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(30)\quad Q = B(y-y')\frac{ds}{dt} + \left[B_1\frac{dy}{ds} + C_1(y-y')\frac{\partial r}{\partial s}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich für das Drehungsmoment dieser Kraft der Ausdruck:

$$h\left[(x-x')\frac{\partial Q}{\partial s} - (y-y')\frac{\partial P}{\partial s}\right]ds.$$

Wenn nun die ruhende Electricitätseinheit einen geschlossenen Strom nicht zu drehen sucht, so muss das Integral dieses Ausdruckes für jeden geschlossenen Strom Null sein. Der Ausdruck lässt sich auch so schreiben:

$$h\frac{\partial}{\partial s}[(x-x')\,Q-(y-y')\,P]\,ds - h\left(Q\frac{dx}{ds} - P\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

und da hierin das erste Glied ein Differential ist, welches jedenfalls bei der Integration Null giebt, so muss auch das zweite Glied Null geben. Dieses nimmt aber, wenn für P und Q die in (29) und (30) gegebenen Werthe gesetzt werden, folgende Form an:

$$h\left[(x-x')\frac{dy}{ds} - (y-y')\frac{dx}{ds}\right]\cdot\left[B\frac{ds}{dt} + C_1\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]ds,$$

und man sieht sofort, dass dieser Ausdruck kein vollständiges Differential ist, und nur dann für jeden geschlossenen Strom das Integral Null geben kann, wenn er selbst durch den in der zweiten eckigen Klammer stehenden Factor Null wird. Damit aber dieser Factor, unabhängig von der Stromstärke, Null werde, muss sein:

$$(31)\qquad B = 0 \quad \text{und} \quad C_1 = 0.$$

Verbindet man diese neuen Gleichungen mit den unter (28) gegebenen, so gehen die letzteren über in:

$$(32)\qquad C = 0;\quad B_2 = \frac{dB_1}{dr};\quad C_2 = 0;\quad C_3 = 0.$$

Dadurch sind die sieben in dem Ausdrucke von X_1 vorkommenden unbestimmten Functionen auf Eine reducirt, und die Gleichung (20) geht über in:

$$(33)\qquad X_1 = \frac{\partial}{\partial s}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

§. 9. Bestimmung der in X_3 vorkommenden Functionen.

Um nun die in X_3 vorkommenden Functionen zu bestimmen, wollen wir die gegenseitige Einwirkung zweier in ruhenden Leitern stattfindenden Ströme betrachten.

In den Puncten x, y, z und x', y', z' seien zwei Stromelemente ds und ds', welche die bewegten Electricitätsmengen $h\,ds$ und $h'\,ds'$ und die ruhenden Electricitätsmengen $-h\,ds$ und $-h'\,ds'$ enthalten. Um nun die Kraft zu bestimmen, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, müssen wir die vier Kräfte betrachten, welche die Menge $h\,ds$ von den beiden Mengen $h'\,ds'$ und $-h'\,ds'$ und die Menge $-h\,ds$ von den beiden Mengen $h'\,ds'$ und $-h'\,ds'$ erleidet. Die in die x-Richtung fallenden Componenten dieser vier Kräfte sind:

$$hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1+X_2+X_3\right),$$

$$-hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right),$$

$$-hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_2\right),$$

$$hh'\,ds\,ds'\,\frac{x-x'}{r^3}.$$

Durch Addition derselben erhalten wir für die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, einfach das Product

$$hh'\,ds\,ds'\,X_3,$$

worin wir für X_3 den in (22) gegebenen Ausdruck anzuwenden haben.

Dem letzteren wollen wir aber erst noch eine für die Integration geeignetere Gestalt geben. Die darin vorkommende Grösse $\cos\varepsilon$ können wir durch einen Differentialcoëfficienten ersetzen. Aus der Gleichung

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

erhält man nämlich durch zweimalige Differentiation:

$$(34)\qquad \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} = -2\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

und da der rechts in Klammern stehende Ausdruck nichts anderes ist, als $\cos\varepsilon$, so kommt:

$$(35)\qquad \cos\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck für $\cos\varepsilon$ einsetzen und zugleich statt $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt'}$, wie in den vorigen Paragraphen, die Producte $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$ und $\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{dt'}$ anwenden, so lautet die Gleichung (22):

$$(36)\qquad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\Big[B_6\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'} + B_7\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \left(C_8\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{1}{2}C_9\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}\right)(x-x')\Big].$$

Hieraus soll nun noch das Product $C_8\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}$ fortgeschafft werden.

Dazu möge eine Function E von r eingeführt werden, welche zu C_8 in folgender Beziehung steht:

$$E = \int r\,dr\int\frac{C_8}{r}\,dr,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{r}\frac{dE}{dr} = \int\frac{C_8}{r}\,dr \quad\text{und}\quad r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right) = C_8.$$

Differentiiren wir diese Function E nach s und s', so können wir den Differentialcoëfficienten folgende Formen geben

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \frac{dE}{dr}\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{\partial(r^2)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right)\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial(r^2)}{\partial s}$$

$$= \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} + C_8\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},$$

und wir erhalten daher:

$$C_8\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} = -\frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} + \frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'}.$$

Setzt man diesen Werth von $C_8\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}$ in die Gleichung (36) ein, und wendet dabei für

$$-\frac{1}{2}\left(C_9 + \frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right)$$

das vereinfachte Zeichen E_1 an, so kommt:

$$(37)\quad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left[B_6 \frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'} + B_7 \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \left(E_1 \frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'}\right)(x - x')\right].$$

Ferner kann gesetzt werden:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'}(x - x') = \frac{\partial^2 [E(x - x')]}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial E}{\partial s}\frac{dx'}{ds'} - \frac{\partial E}{\partial s'}\frac{dx}{ds},$$

und wenn man dabei noch zur Vereinfachung die Zeichen E_2 und E_3 mit den Bedeutungen

$$E_2 = B_6 + \frac{dE}{dr} \quad \text{und} \quad E_3 = B_7 - \frac{dE}{dr}$$

einführt, so geht die Gleichung (37) über in:

$$(38)\quad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{E_1(x - x')\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + E_2 \frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 [E(x - x')]}{\partial s \partial s'}\right\}.$$

Den so umgestalteten Ausdruck von X_3 multipliciren wir mit $hh' ds\, ds'$, um die x-Componente der Kraft zu erhalten, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet.

Führt man dann, um die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem ganzen als geschlossen vorausgesetzten Strome s' erleidet, zu erhalten, die Integration nach s' aus, so treten dabei einige Vereinfachungen ein. Das letzte Glied des vorigen Ausdruckes ist nämlich ein Differentialcoëfficient nach s', und im vorletzten Gliede ist der Factor $\frac{dx}{ds}$ von s' unabhängig, so dass er bei der Integration als constant behandelt werden kann, und der andere Factor $E_3 \frac{\partial r}{\partial s'}$ ist wiederum ein Differentialcoëfficient nach s'. Beide Glieder geben also bei der Integration über einen geschlossenen Strom den Werth Null, und es bleibt:

$$(39)\quad hh' ds \int X_3\, ds' = hh' \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} ds \int \left[E_1(x - x')\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + E_2 \frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right] ds'.$$

Wenn man diesen Ausdruck auch noch nach s integrirt, so erhält man die Kraft, mit welcher der Strom s' den ganzen Strom s nach der x-Richtung zu verschieben sucht. Diese Integration bringt für den Fall, dass auch der Strom s geschlossen ist, wiederum ein Glied zum Verschwinden. In dem Gliede $E_2 \frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}$ ist nämlich der Factor $\frac{dx'}{ds'}$ von s unabhängig und der andere Factor $E_2 \frac{\partial r}{\partial s}$ ist ein Differentialcoëfficient nach s und giebt somit bei der Integration Null. Es kommt also:

$$(40)\quad hh'\int\int X_3\, ds\, ds' = hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\int E_1 (x-x')\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds'.$$

Dieses Resultat können wir mit einem vollkommen feststehenden Ergebnisse der Ampère'schen Theorie vergleichen, indem diese Theorie, soweit sie sich auf die von geschlossenen Strömen auf einander ausgeübten Kräfte bezieht, als durchaus zuverlässig anzusehen ist. Nun wird nach dieser Theorie die Kraft, mit welcher ein geschlossener Strom s' einen anderen geschlossenen Strom s nach der x-Richtung zu bewegen sucht, durch den Ausdruck

$$-kii'\int\int\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon\, ds\, ds'$$

dargestellt, worin i und i' die beiden Stromintensitäten sind, und k eine Constante bedeutet. Diesen Ausdruck kann man, wenn man i und i' durch $h\frac{ds}{dt}$ und $h'\frac{ds'}{dt}$ und $\cos\varepsilon$, gemäss Gleichung (35), durch $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\, \partial s'}$ ersetzt, in folgende Gestalt bringen:

$$hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\int\frac{k}{2r^3}(x-x')\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds',$$

und wenn man ihn dann mit dem in (40) gegebenen Ausdrucke vergleicht, so sieht man, dass zu setzen ist:

$$(41)\qquad E_1 = \frac{k}{2r^3}.$$

Um auch noch die andere in (39) vorkommende, mit E_2 bezeichnete Function zu bestimmen, wenden wir den ebenfalls thatsächlich feststehenden Satz an, dass ein in einem ruhenden

Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom einen anderen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen galvanischen Strom in seiner Intensität nicht zu ändern sucht.

Der in (39) gegebene Ausdruck, welcher nach Einsetzung des eben gefundenen Werthes von E_1 lautet:

$$hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left[\frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + E_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds',$$

bedeutet seiner Entwickelung nach die x-Componente derjenigen Kraft, welche der geschlossene Strom s' auf das Stromelement ds, also auf die beiden in dem Leiterelemente ds befindlichen Electricitätsmengen $h\,ds$ und $-h\,ds$ ausübt. Nun ist aber die negative Electricitätsmenge $-h\,ds$ in Ruhe, und auf ruhende Electricität kann nach dem in §. 6 angewandten Satze der geschlossene galvanische Strom keine Kraft ausüben. Demnach lässt sich der obige Ausdruck auch in dem Sinne auffassen, dass er die x-Componente derjenigen Kraft bedeutet, welche der geschlossene Strom s' auf die in dem Leiterelemente ds befindliche positive Electricitätsmenge $h\,ds$ ausübt.

Um auch die in die Richtung des Elementes ds fallende und somit auf Stromverstärkung hinwirkende Componente dieser Kraft bequem darstellen zu können, wollen wir dem Ausdrucke noch eine etwas veränderte Gestalt geben. Aus der Gleichung

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

folgt nämlich:

$$(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial (r^2)}{\partial x} = 2(x-x'), \\[2mm] \dfrac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} = -2 \dfrac{dx'}{ds'}. \end{cases}$$

Wenn man mittelst dieser Gleichungen $x - x'$ und $\frac{dx'}{ds'}$ aus jenem Ausdrucke eliminirt, und zugleich $\frac{\partial r}{\partial s}$ in der Form $\frac{1}{2r}\frac{\partial (r^2)}{\partial s}$ schreibt, so geht er über in:

$$\tfrac{1}{4} hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left[\frac{k}{r^3} \frac{\partial (r^2)}{\partial x} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - \frac{E_2}{r} \frac{\partial (r^2)}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} \right] ds'.$$

Will man nun statt der in die willkürlich gewählte x-Richtung fallenden Componente der Kraft die in die Richtung des Ele-

mentes ds fallende Componente haben, so braucht man nur die Differentialcoëfficienten nach x durch entsprechende Differentialcoëfficienten nach s zu ersetzen, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{4} hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left[\frac{k}{r^3} \frac{\partial (r^2)}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - \frac{E_2}{r} \frac{\partial (r^2)}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \right] ds'$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{1}{8} hh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} ds \int \left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial (r^2)}{\partial s} \right]^2 ds'.$$

Dieser Ausdruck stellt die in einem einzelnen Elemente ds im Sinne der Stromverstärkung wirkende Kraft dar. Soll nun die Intensität des Stromes ungeändert bleiben, so muss das über den ganzen geschlossenen Strom s ausgedehnte Integral dieses Ausdruckes Null sein. Das in dem Ausdrucke schon vorkommende über den Strom s' zu nehmende Integral

$$\int \left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial (r^2)}{\partial s} \right]^2 ds',$$

mit welchem das Element ds multiplicirt ist, muss also entweder die Form eines Differentialcoëfficienten nach s haben, oder Null sein. Da nun das erstere durch keine Form der Function E_2 zu bewirken ist, so muss man E_2 so bestimmen, dass das Integral Null wird, was erfordert, dass man setzt:

$$\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} = c,$$

worin c irgend eine Constante bedeutet, indem nur dadurch der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ein Differential und somit das Integral selbst für jeden geschlossenen Strom Null werden kann.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$E_2 = \frac{k}{r^2} - cr.$$

Da nun aber das hierin vorkommende Glied $-cr$ in dem Ausdrucke von X_3 ein Glied geben würde, welches mit wachsendem Abstande r grösser würde, und ein solches Glied in dem Ausdrucke der Kraftcomponente nicht vorkommen kann, so muss die Constante c gleich Null gesetzt werden, und man erhält somit zur Bestimmung von E_2 die Gleichung:

$$E_2 = \frac{k}{r^2}. \tag{43}$$

Es sind also von den vier in dem unter (38) gegebenen Ausdrucke von X_3 vorkommenden unbestimmten Functionen von r zwei bestimmt, und durch Einsetzung ihrer Werthe geht die Gleichung (38) über in:

$$(44)\quad X_3 = \left\{ \frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} + \frac{k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2[E(x-x')]}{\partial s\,\partial s'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

§. 10. Anwendung der Inductionsgesetze.

Während wir bisher nur constante Ströme in ruhenden Leitern betrachtet haben, wollen wir jetzt von der Beschränkung, dass die Ströme constant seien, absehen und ferner noch die Annahme machen, dass der Leiter s sich bewege. Der Einfachheit wegen wollen wir aber voraussetzen, dieser Leiter ändere seine Gestalt nicht, und bewege sich nur mit sich selbst parallel, so dass alle seine Elemente während des Zeitelementes dt ein gleich grosses Wegelement $d\sigma$ nach gleicher Richtung zurücklegen.

Dann hat jedes in dem Leiter s befindliche positive Electricitätstheilchen gleichzeitig zwei Bewegungen, die, mit welcher es sich im Leiter bewegt, und deren Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist, und die, mit welcher der Leiter sich bewegt, und deren Geschwindigkeit $\frac{d\sigma}{dt}$ ist. Demnach müssen die auf die Bewegung dieses Electricitätstheilchens bezüglichen Differentialcoëfficienten nach t jetzt anders ausgedrückt werden als früher. Statt eines Ausdruckes von der Form

$$\frac{\partial U}{\partial s}\frac{ds}{dt},$$

worin U irgend eine von der Lage des Electricitätstheilchens abhängige Grösse bedeutet, muss jetzt gesetzt werden:

$$\frac{\partial U}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt},$$

und statt eines Ausdruckes von der Form

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(V\frac{\partial U}{\partial s}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + V\frac{\partial U}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2},$$

worin V noch irgend eine zweite von der Lage des Electricitätstheilchens abhängige Grösse bedeutet, muss jetzt gesetzt werden:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(V\frac{\partial U}{\partial s}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(V\frac{\partial U}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(V\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(V\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + V\frac{\partial U}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2} + V\frac{\partial U}{\partial \sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Wollen wir nun die x-Componente der Kraft bestimmen, welche die in ds befindliche positive Electricitätsmenge $h\,ds$ von der in ds' befindlichen positiven Electricitätsmenge $h'ds'$ erleidet, so haben wir für dieselbe, wie früher, den allgemeinen Ausdruck

$$hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3\right)$$

zu bilden, darin aber jetzt für X_1, X_2 und X_3 diejenigen Ausdrücke zu setzen, welche aus (33), (27) und (44) durch die vorstehend angedeuteten Aenderungen hervorgehen, nämlich:

$$(45)\quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial s}\left(B_1\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ \quad + \left[\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(B_1\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(B_1\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt} \\ \quad + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(B_1\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + B_1\frac{\partial x}{\partial s}\frac{d^2 s}{dt^2} + B_1\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} X_2 = -\frac{\partial[B_3(x-x')]}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} \\ \quad + \frac{\partial}{\partial s'}\left[B_4\frac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\frac{\partial r}{\partial s'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \\ \quad + \left[B_4\frac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\frac{\partial r}{\partial s'}\right]\frac{d^2 s'}{dt^2}. \end{cases}$$

$$(47)\quad \begin{cases} X_3 = \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'} + \frac{k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial x}{\partial s}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\partial^2[E(x-x')]}{\partial s\,\partial s'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ \quad + \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial \sigma\,\partial s'} + \frac{k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\partial^2[E(x-x')]}{\partial \sigma\,\partial s'}\right\}\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{cases}$$

Wollen wir ferner die x-Componente der Kraft bestimmen, welche die in ds befindliche positive Electricitätsmenge $h\,ds$ von

der in ds' befindlichen negativen Electricitätsmenge — $h'ds'$ erleidet, so brauchen wir in den vorigen Ausdrücken nur $h'ds'$ durch — $h'ds'$ zu ersetzen und ferner, weil die in ds' befindliche negative Electricität in Ruhe ist, $\frac{ds'}{dt} = 0$ zu setzen. Dadurch wird $X_2 = 0$ und $X_3 = 0$, während X_1 ungeändert bleibt. Demnach reducirt sich der Ausdruck dieser Kraftcomponente auf

$$- hh' ds\, ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_1 \right).$$

Daraus ergiebt sich für die x-Componente der Kraft, welche die in ds befindliche positive Electricitätsmenge $h\,ds$ von dem Stromelemente ds', also, von den beiden Electricitätsmengen $h'ds'$ und $-h'ds'$ zusammen, erleidet, der Ausdruck:

$$hh' ds\, ds' \, (X_2 + X_3).$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach s', so erhält man die x-Componente der Kraft, welche die in ds befindliche positive Electricitätsmenge $h\,ds$ von dem ganzen Strome s' erleidet, und es gilt also, wenn man diese Kraftcomponente mit $\mathfrak{X} h\,ds$ bezeichnet, die Gleichung

$$\mathfrak{X} = h' \int (X_2 + X_3)\, ds', \tag{48}$$

worin man für X_2 und X_3 die unter (46) und (47) gegebenen Ausdrücke zu setzen hat. Bei der Ausführung der Integration geben alle in jenen Ausdrücken vorkommenden Glieder, welche die Form von Differentialcoëfficienten nach s' haben, Null, und können daher fortgelassen werden, so dass man erhält:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} = h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int & \left[B_4 \frac{dx'}{ds'} + C_5 (x - x') \frac{\partial r}{\partial s'} \right] ds' \\ + kh' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \int & \left[\frac{x - x'}{2r^3} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right] ds' \\ + kh' \frac{d\sigma}{dt} \frac{ds'}{dt} \int & \left[\frac{x - x'}{2r^3} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{dx'}{ds'} \right] ds' \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Diese Gleichung kann man noch mittelst der schon im vorigen Paragraphen angewandten Gleichungen:

$$x - x' = r \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{dx'}{ds'} = - \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'}$$

umformen in:

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} = \tfrac{1}{2} h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int \left[- B_4 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds' \\ + \tfrac{1}{2} k h' \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[- \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} \right] ds' \\ + \tfrac{1}{2} k h' \frac{d\sigma}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[- \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial x \partial s'} \right] ds'. \end{aligned}\right.$$

Um aus diesem auf die x-Richtung bezüglichen Ausdrucke den entsprechenden auf die Richtung des Elementes ds bezüglichen Ausdruck abzuleiten, brauchen wir wieder nur die Differentialcoëfficienten nach x durch solche nach s zu ersetzen. Dann heben die unter dem zweiten Integralzeichen stehenden beiden Glieder sich gegenseitig auf, und wir erhalten, wenn wir die in die Richtung des Elementes ds fallende Componente der Kraft, welche die Electricitätsmenge $h\,ds$ von dem Strome s' erleidet, mit $\mathfrak{S}\,h\,ds$ bezeichnen, die Gleichung:

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S} = \tfrac{1}{2} h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int \left[- B_4 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds' \\ + \tfrac{1}{2} k h' \frac{d\sigma}{dt} \frac{ds'}{dt} \int \left[- \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \right] ds'. \end{aligned}\right.$$

Das Product $\mathfrak{S}\,ds$ ist dasjenige, was man die in dem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft nennt, und demnach stellt das Integral $\int \mathfrak{S}\,ds$ die in dem ganzen Leiter s inducirte electromotorische Kraft dar.

Die Integration nach s bringt wieder ein Glied zum Verschwinden. Betrachten wir nämlich das Doppelintegral

$$\int\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} ds\,ds',$$

so ist zu bemerken, dass die Grösse

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} = -2 \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \frac{dy'}{ds'} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{dz'}{ds'} \right),$$

welche wir auch durch $-2 \cos (\sigma s')$ bezeichnen können, wenn $(\sigma s')$ den Winkel zwischen dem von ds zurückgelegten Bahnelemente $d\sigma$ und dem Stromelemente ds' bedeutet, von s unab-

hängig ist, weil der ganze Leiter s sich mit sich selbst parallel bewegt, und somit alle seine Elemente eine und dieselbe Bahnrichtung haben. Man kann also das obige Integral so schreiben:

$$\int ds' \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial \sigma \partial s'} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} ds.$$

Hierin lässt sich die Integration nach s sofort ausführen, und giebt für einen geschlossenen Strom Null.

Betrachten wir ferner das andere Doppelintegral

$$\int\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds\, ds',$$

so können wir hierin, da der Differentialcoëfficient $\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'}$, welcher nach (35) gleich $-2 \cos \varepsilon$ ist, sich bei der Bewegung des Leiters s nicht ändert, und somit von σ unabhängig ist, setzen:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \right],$$

und da ferner die Grösse σ, nach welcher hier differentiirt werden soll, von den Grössen s und s', nach welchen der ganze Ausdruck integrirt werden soll, unabhängig ist, so können wir die Differentiation nach σ auch ausserhalb der Integralzeichen andeuten, und demnach statt des obigen Doppelintegrals schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \int\int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds\, ds'.$$

Wir erhalten daher zur Bestimmung der im Leiter s inducirten electromotorischen Kraft die Gleichung:

$$(52) \begin{cases} \int \mathfrak{S}\, ds \\ = \frac{1}{2} h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int\int \left[- B_4 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds\, ds' \\ + \frac{1}{2} k h' \frac{ds'}{dt} \frac{d\sigma}{dt} \frac{\partial}{\partial \sigma} \int\int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds\, ds'. \end{cases}$$

Auf diese Gleichung wollen wir nun den Satz anwenden, dass, wenn entweder der Leiter s in einer bestimmten Lage in der Nähe des Leiters s' verharrt, aber im letzte-

ren die Stromstärke von Null bis zu einem gegebenen Werthe wächst, oder die Stromstärke in s' unveränderlich diesen Werth hat, aber s sich aus unendlicher Entfernung bis zu jener Lage heranbewegt, in beiden Fällen eine gleich grosse Inductionswirkung in s stattfindet.

Um die während irgend einer Zeit stattfindende Inductionswirkung zu bestimmen, haben wir den Ausdruck, welcher die inducirte electromotorische Kraft darstellt, mit dt zu multipliciren und dann über die betreffende Zeit zu integriren. Im ersten der beiden vorher genannten Fälle ist nun $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, so dass das zweite Glied des in (52) gegebenen Ausdruckes verschwindet, und im ersten Gliede ist das Doppelintegral von der Zeit unabhängig und nur der als Factor vor demselben stehende Differentialcoëfficient $\frac{d^2 s'}{dt^2}$ ist nach t zu integriren und giebt $\frac{ds'}{dt}$. Die in diesem Falle stattfindende Inductionswirkung ist daher:

$$\tfrac{1}{2} h' \frac{ds'}{dt} \int\int \left[- B_4 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds\, ds'.$$

Im zweiten Falle ist $\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0$, so dass das erste Glied des Ausdruckes verschwindet, und das zweite Glied lässt sich sofort nach t integriren, und giebt:

$$\tfrac{1}{2} k h' \frac{ds'}{dt} \int\int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} ds\, ds'.$$

Diese beiden Grössen müssen, jenem Satze nach, unter einander gleich sein, ihre Differenz muss also den Werth Null haben, und man erhält daher die Gleichung:

$$(53) \quad \int\int \left[\left(\frac{k}{r} + B_4 \right) \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \right] ds\, ds' = 0.$$

Das zweite in der eckigen Klammer stehende Glied können wir noch so umändern:

$$C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial (r^2)}{\partial s'} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial (r^2)}{\partial s'} \int C_5\, dr \right] - \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} \int C_5\, dr,$$

und da von den beiden hier auf der rechten Seite stehenden Gliedern das erste bei der Integration über einen geschlossenen Strom s Null wird, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(54)\qquad \int\int\left[\frac{k}{r}+B_4+\int C_5\,dr\right]\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'=0.$$

Wenn diese Gleichung für jede zwei geschlossene Ströme erfüllt sein soll, so muss der vor dem Differentialcoëfficienten zweiter Ordnung als Factor stehende Ausdruck constant sein, und wir können also, wenn a eine Constante bedeutet, setzen:

$$(55)\qquad \frac{k}{r}+B_4+\int C_5\,dr=a.$$

Fassen wir nun das Integral mit der Constanten a in ein Zeichen zusammen, indem wir setzen:

$$G=\int C_5\,dr-a,$$

so erhalten wir:

$$(56)\qquad \begin{cases} B_4=-\left(\frac{k}{r}+G\right),\\ C_5=\frac{dG}{dr}. \end{cases}$$

Hierdurch sind wieder zwei der unbestimmten Functionen, welche in dem Ausdrucke von X_2 noch vorkommen, auf Eine zurückgeführt, und die unter (27) gegebene zur Bestimmung von X_2 dienende Gleichung geht jetzt über in:

$$\begin{aligned} X_2=&-\frac{\partial[B_3(x-x')]}{\partial s'}\frac{ds'}{dt}\\ &+\frac{\partial}{\partial s'}\left[-\left(\frac{k}{r}+G\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{dG}{dr}(x-x')\frac{\partial r}{\partial s'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\ &+\left[-\left(\frac{k}{r}+G\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{dG}{dr}(x-x')\frac{\partial r}{\partial s'}\right]\frac{d^2s'}{dt^2} \end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$(57)\qquad \begin{cases} X_2=-\frac{\partial[B_3(x-x')]}{\partial s'}\frac{ds'}{dt}\\ \qquad+\frac{\partial}{\partial s'}\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{\partial[G(x-x')]}{\partial s'}\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\ \qquad+\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{\partial[G(x-x')]}{\partial s'}\right\}\frac{d^2s'}{dt^2}. \end{cases}$$

§. 11. Zusammenfassung der bisher gewonnenen Resultate.

Nachdem durch die in den Paragraphen 7. bis 10. angestellten Betrachtungen die Ausdrücke von X_1, X_2 und X_3 die unter (33), (57) und (44) gegebenen vereinfachten Formen gewonnen haben, wollen wir sie in die Gleichung (23), nämlich

$$X = \frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3$$

einsetzen. Dadurch erhalten wir zur Bestimmung der x-Componente der Kraft, die ein Electricitätstheilchen, welches während der Zeit dt den Weg ds zurücklegt, von einem anderen, welches während derselben Zeit den Weg ds' zurücklegt, erleidet, die Gleichung:

$$\begin{aligned} X = \frac{x-x'}{r^3} &+ \frac{\partial}{\partial s}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{\partial\left[B_3 (x - x')\right]}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} \\ &+ \frac{\partial}{\partial s'}\left\{- \frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial\left[G(x - x')\right]}{\partial s'}\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \\ &+ \left\{- \frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial\left[G(x - x')\right]}{\partial s'}\right\}\frac{d^2 s'}{dt^2} \\ &+ \left\{\frac{k(x - x')}{2r^3}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right. \\ &\qquad \left. + E_3 \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2\left[E(x - x')\right]}{\partial s \partial s'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}$$

Hierin lassen sich einige Vereinfachungen machen. Bedenkt man, dass x' nur von s', dagegen r von s und s' abhängt, so sieht man, dass man schreiben kann:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - \frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ = - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right), \end{aligned}$$

wodurch sich drei der oben vorkommenden Glieder in eines zusammenziehen. Ferner kann man aus denselben Gründen schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2} \\ &= \frac{d}{dt}\left(B_1 \frac{dx}{dt}\right) - \frac{dB_1}{dr}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}$$

Setzt man sodann zur Abkürzung:

$$E_3 \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{dB_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{\partial F}{\partial s'}$$

und führt noch für B_1 und $-B_3$ die einfacheren Zeichen H und J ein, so nimmt die zur Bestimmung von X dienende Gleichung folgende Form an:

$$(58) \left\{ \begin{aligned} X = & \frac{x - x'}{r^3} + \frac{\partial [J(x - x')]}{\partial s'} \frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 [G(x - x')]}{\partial s'^2} \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \\ & + \frac{\partial [G(x - x')]}{\partial s'} \frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(H \frac{dx}{dt}\right) - k \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt}\right) \\ & + \left\{ \frac{k(x - x')}{2r^3} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial F}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 [E(x - x')]}{\partial s \partial s'} \right\} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung sind neben der Annahme, dass nur Eine Electricität im festen Leiter strömen könne, nur solche Sätze zur Anwendung gebracht, welche sich auf die gegenseitige Einwirkung geschlossener Ströme beziehen, und da diese Sätze als vollkommen sicher zu betrachten sind, so darf behauptet werden, dass der in dieser Gleichung gegebene Ausdruck von X unter der Voraussetzung von nur Einer im festen Leiter beweglichen Electricität der einzig mögliche ist.

Dabei ist noch zu bemerken, dass die Zulässigkeit dieses Ausdruckes nicht auf den Fall, wo nur Eine Electricität als strömend vorausgesetzt wird, beschränkt ist, sondern dass er auch dann zulässig bleibt, wenn man annimmt, der galvanische Strom bestehe aus zwei nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Strömen von positiver und negativer Electricität, wobei es gleichgültig ist, ob man diese beiden Ströme ihrer Stärke nach als gleich oder verschieden annimmt.

Wenn man zu den im Obigen angewandten Sätzen noch die Bedingung hinzufügen wollte, dass die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung nach einem einheitlichen Gesetze stattfinden müsse, so würde man aus der blossen Vergleichung der Glieder, welche noch unbestimmte Functionen von r enthalten, mit denen, in welchen die Functionen schon bestimmt sind, noch weitere Schlüsse über die Form der Functionen ziehen können, und zwar würde man durch diese Betrachtungen zu dem Ergebnisse gelangen, dass die Functionen E, F, G und H sämmtlich die Form $\frac{1}{r} \cdot const.$ haben müssten, so dass also statt jener unbestimmten Functionen

nur noch unbestimmte Constante in dem Ausdrucke von X bleiben würden. Indessen wollen wir uns Schlüsse dieser Art für jetzt nicht erlauben, sondern statt dessen noch einen allgemeinen Satz in Anwendung bringen.

§. 12. Anwendung des Princips von der Erhaltung der Energie.

Wir wollen nun die Annahme machen, dass die Kräfte, welche zwei bewegte Electricitätstheilchen auf einander ausüben, für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen, wozu erforderlich ist, dass die Arbeit, welche diese Kräfte bei der Bewegung der Theilchen während des Zeitelementes dt thun, durch das Differential einer von den augenblicklichen Lagen und Bewegungszuständen der Theilchen abhängigen Grösse dargestellt wird.

Um die Arbeit bestimmen zu können, denken wir uns neben dem unter (58) gegebenen Ausdrucke von X die entsprechenden Ausdrücke von Y und Z gebildet, und ebenso denken wir uns die Grössen X', Y' und Z', welche sich auf die Kraft beziehen, die das Theilchen e' von dem Theilchen e erleidet, in entsprechender Weise ausgedrückt, wozu nur die accentuirten und unaccentuirten Buchstaben gegen einander vertauscht zu werden brauchen. Unter Anwendung dieser Ausdrücke bilden wir die Grösse

$$ee'\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} + X'\frac{dx'}{dt} + Y'\frac{dy'}{dt} + Z'\frac{dz'}{dt}\right)dt.$$

Diese Grösse muss, wenn das Princip von der Erhaltung der Energie erfüllt sein soll, das vollständige Differential, oder, anders gesagt, die in der Klammer stehende Summe von sechs Producten muss der nach t genommene Differentialcoëfficient eines aus den Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der beiden Theilchen gebildeten Ausdruckes sein.

Da der unter (58) gegebene Ausdruck von X etwas lang ist, so wollen wir seine Glieder einzeln oder in kleinen Gruppen nach einander betrachten, um zu sehen, wie bei ihnen die Summe der sechs Producte sich gestaltet.

Das erste Glied ist

$$\frac{x - x'}{r^3} \text{ oder } -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

und die Summe der sechs Producte lautet daher:

$$-\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\frac{dz'}{dt}\right)$$

und lässt sich zusammenziehen in:

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}.$$

Das zweite Glied ist:

$$\frac{\partial[J(x-x')]}{\partial s'}\frac{ds'}{dt}.$$

Um dieses mit dem Differentialcoëfficienten $\frac{dx}{dt}$ zu multipliciren, zerlegen wir den letzteren in das Product $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$ und multipliciren mit dem Factor $\frac{dx}{ds}$, welcher von s' unabhängig ist, unter dem Differentiationszeichen, also:

$$\frac{\partial\left[J(x-x')\frac{dx}{ds}\right]}{\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Bildet man hierzu die entsprechenden Producte für die y- und z-Axe und addirt zunächst nur diese drei Producte, indem man dabei die Gleichung

$$(x-x')\frac{dx}{ds}+(y-y')\frac{dy}{ds}+(z-z')\frac{dz}{ds}=r\frac{\partial r}{\partial s}$$

berücksichtigt, so erhält man:

$$\frac{\partial\left(Jr\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Ebenso geben die drei anderen Producte:

$$\frac{\partial\left(Jr\frac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial s}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Diese beiden Ausdrücke sind unter einander gleich, indem sich, wenn man das Zeichen K mit der Bedeutung

$$K=\int Jr\,dr \tag{59}$$

einführt, der als erster Factor stehende Differentialcoëfficient in beiden durch $\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'}$ darstellen lässt, und die Summe der sechs Producte nimmt daher folgende Form an:

$$2\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Das dritte und vierte Glied von (58), nämlich

$$\frac{\partial^2 [G(x-x')]}{\partial s'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial [G(x-x')]}{\partial s'}\frac{d^2 s'}{dt^2},$$

kann man ganz ähnlich behandeln. Durch Addition der drei ersten Producte erhält man:

$$\frac{\partial^2 \left[Gr\frac{\partial r}{\partial s}\right]}{\partial s'^2}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial \left[Gr\frac{\partial r}{\partial s}\right]}{\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s'}{dt^2},$$

wofür man, wenn man das Zeichen R mit der Bedeutung

$$(60) \qquad R = \int Gr\,dr$$

einführt, schreiben kann:

$$\frac{\partial^3 R}{\partial s \partial s'^2}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s'}{dt^2},$$

und ebenso geben die drei anderen Producte:

$$\frac{\partial^3 R}{\partial s^2 \partial s'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\frac{ds'}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Die Summe aller sechs Producte ist also:

$$\left(\frac{\partial^3 R}{\partial s \partial s'^2}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^3 R}{\partial s^2 \partial s'}\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\left(\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{ds'}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}\right),$$

was sich zunächst zusammenziehen lässt in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)$$

und dann weiter in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right).$$

Das fünfte Glied

$$\frac{d}{dt}\left(H\frac{dx}{dt}\right)$$

giebt, wenn man zuerst die angedeutete Differentiation ausführt, und dann mit $\frac{dx}{dt}$ multiplicirt:

$$\frac{dH}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + H\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2},$$

was sich auch in folgender Form schreiben lässt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[H\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

In gleicher Weise erhält man als anderes, auch auf die x-Axe bezügliches, aber das accentuirte x enthaltendes Product:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[H\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2.$$

Bildet man nun die entsprechenden Producte für die y- und z-Axe, so kann man die Summe aller sechs Producte zusammenziehen in:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\} + \tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right].$$

Das sechste Glied

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$

giebt durch Ausführung der angedeuteten Differentiation und durch Multiplication mit $\frac{dx}{dt}$:

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} - k\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x'}{dt^2}.$$

In gleicher Weise erhält man wieder als anderes auch auf die x-Axe bezügliches Product, in welchem aber das accentuirte und das unaccentuirte x gegen einander vertauscht sind:

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} - k\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Die Summe dieser beiden Producte kann man in folgender Form schreiben:

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right) - k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}.$$

Bildet man nun die entsprechenden Producte für die y- und z-Axe und berücksichtigt dabei die Gleichung

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}=-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

so erhält man als Summe aller sechs Producte:

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)+\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Das siebente Glied

$$\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

oder, anders geschrieben,

$$-\frac{k}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

giebt als Summe der sechs Producte:

$$-\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Dieser Ausdruck hebt sich gegen einen Theil des beim sechsten Gliede erhaltenen Ausdruckes auf, so dass man für das sechste und siebente Glied zusammen als Summe der sechs Producte einfach erhält:

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right).$$

Das achte Glied

$$\frac{\partial F}{\partial s'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

giebt als Summe der sechs Producte, wie man leicht sieht:

$$\frac{\partial F}{\partial s'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{\partial F}{\partial s}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Das neunte und letzte Glied

$$\frac{\partial^2[E(x-x')]}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

schreiben wir zunächst in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial E}{\partial s}(x-x')+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

welche wir auch noch so umändern können:

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left[r\frac{dE}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial x}+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Zugleich setzen wir für $\frac{dx}{dt}$ das Product $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$ und multipliciren mit $\frac{dx}{ds}$ unter dem Differentiationszeichen. Wenn wir dann die entsprechenden Producte für die y- und z-Axe bilden, und die Summe dieser drei Producte nehmen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt},$$

und somit als Summe aller sechs Producte:

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{\partial}{\partial s}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Vereinigen wir nun alle bei den einzelnen Gliedern von (58) als Summe der sechs Producte gewonnenen Ausdrücke, so erhalten wir folgende Gesammtsumme:

$$\begin{aligned}
&-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}+2\frac{\partial^2 K}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}+\tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\\
&+\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)+\frac{\partial F}{\partial s'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{\partial F}{\partial s}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\
&+\frac{\partial}{\partial s'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{\partial}{\partial s}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2,
\end{aligned}$$

welche Gesammtsumme wir auch, unter Zusammenfassung der Glieder, welche Differentialcoëfficienten nach t sind, und etwas veränderter Anordnung der übrigen Glieder, so schreiben können:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{r}+\left(\frac{k}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}+\frac{\partial^2 R}{\partial s\partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\tfrac{1}{2}H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}\\
&\quad+2\frac{\partial^2 K}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial s}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+\tfrac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial s'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^3\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial s'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2+E+F+\tfrac{1}{2}H\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial s}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2+E+F+\tfrac{1}{2}H\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.
\end{aligned}$$

Dieser ganze Ausdruck muss, wenn das Princip von der Erhaltung der Energie für die Kräfte, welche die beiden Electricitätstheilchen auf einander ausüben, erfüllt sein soll, ein Differentialcoëfficient nach t sein. Da nun der erste Theil des Ausdruckes schon äusserlich als Differentialcoëffient nach t bezeichnet ist, so haben wir unser Augenmerk nur auf den übrigen, aus fünf Gliedern bestehenden Theil zu richten. Diese Glieder sind alle in Bezug auf die Differentialcoëfficienten erster Ordnung $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{ds'}{dt}$ von höherem als erstem Grade, während die Differentialcoëfficienten zweiter Ordnung $\frac{d^2 s}{dt^2}$ und $\frac{d^2 s'}{dt^2}$ in ihnen nicht als Factoren vorkommen. Daraus folgt, dass weder ein einzelnes der Glieder noch irgend eine Gruppe derselben ein Differentialcoëfficient nach t sein kann. Demnach muss die Summe dieser fünf Glieder Null sein, und das wiederum kann für beliebige Werthe von $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{ds'}{dt}$ nur dann der Fall sein, wenn alle fünf Glieder einzeln Null sind. Wir erhalten also folgende fünf Bedingungsgleichungen:

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 K}{\partial s \partial s'} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial s'} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s'}\left[r \frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + E + F + \frac{1}{2} H\right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}\left[r \frac{dE}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + E + F + \frac{1}{2} H\right] = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen, welche sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{dK}{dr} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{d^2 K}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} = 0,$$

kann für beliebige Bahnen der Electricitätstheilchen nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{dK}{dr} = 0,$$

woraus nach (59) weiter folgt:

$$(62) \qquad J = 0.$$

Die beiden folgenden der Gleichungen (61), nämlich

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial s'} = 0,$$

geben zunächst:

$$H = const.$$

Da aber der in (58) gegebene Ausdruck von X das Glied $H\frac{d^2x}{dt^2}$ enthält, welches, wenn H einen angebbaren constanten Werth hätte, einen von der gegenseitigen Entfernung der Electricitätstheilchen unabhängigen Bestandtheil der Kraft darstellen würde, und ein solcher nicht vorkommen kann, so muss sein:

$$(63) \qquad H = 0.$$

Die beiden letzten der Gleichungen (61) lauten, wenn man $H = 0$ setzt und die angedeuteten Differentiationen ausführt:

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'} + 2r\frac{dE}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{d(E+F)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s'} = 0,$$

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + 2r\frac{dE}{dr}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{d(E+F)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s} = 0,$$

welche Gleichungen nur dann für beliebige Bahnen der Electricitätstheilchen erfüllt sein können, wenn man hat:

$$(64) \qquad \frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{dr} = 0,$$

wodurch E und F genügend bestimmt sind, da nur die Differentialcoëfficienten dieser Grössen in (58) vorkommen.

Nach diesen Bestimmungen nimmt der Ausdruck der von den gegenseitigen Kräften der beiden Electricitätstheilchen während des Zeitelementes dt geleisteten Arbeit folgende einfache Gestalt an:

$$ee'\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{r} + \left(\frac{k}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right]dt,$$

und die Gleichung (58) geht über in:

$$(65) \quad \left\{\begin{aligned} X = \frac{x-x'}{r^3} &+ \frac{\partial^2\left(\frac{dR}{dr}\frac{x-x'}{r}\right)}{\partial s'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\left(\frac{dR}{dr}\frac{x-x'}{r}\right)}{\partial s'}\frac{d^2s'}{dt^2} \\ &- k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s \partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}, \end{aligned}\right.$$

welche Gleichung sich noch einfacher so schreiben lässt:

$$(66)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(1 + \dfrac{k}{2}\dfrac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\right) - k\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dx'}{dt}\right) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial^2 R}{\partial s'^2}\left(\dfrac{ds'}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial R}{\partial s'}\dfrac{d^2 s'}{dt^2}\right]. \end{cases}$$

§. 13. Das electrodynamische Potential.

Nach dem vorher angeführten Ergebnisse unserer Betrachtungen wird die Arbeit, welche die von zwei bewegten Electricitätstheilchen auf einander ausgeübten Kräfte während des Zeitelementes dt leisten, dargestellt durch das Differential des folgenden Ausdruckes:

$$-ee'\left[\frac{1}{r} - \left(\frac{k}{2r}\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right].$$

Nun wird bekanntlich bei der Betrachtung der electrostatischen Kräfte diejenige Grösse, deren negatives Differential die Arbeit darstellt, das Potential der beiden Electricitätstheilchen auf einander genannt, und dem entsprechend kann man auch den vorstehenden, nur durch Fortlassung des äusseren Minuszeichens abgeänderten Ausdruck als Potential im erweiterten Sinne bezeichnen. Dabei kann man auch die beiden Theile, welche sich auf die electrostatischen und auf die von der Bewegung abhängigen oder electrodynamischen Kräfte beziehen, einzeln betrachten und danach das electrostatische und das electrodynamische Potential von einander unterscheiden. Bezeichnen wir das erstere mit U und das letztere mit V, so ist dem Vorigen nach zu setzen:

$$(67)\qquad U = \frac{ee'}{r},$$

$$(68)\qquad V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Der hier gegebene Ausdruck des electrodynamischen Potentials ist bei der Annahme von nur Einer im festen Leiter beweglichen Electricität der einzig mögliche.

Die in ihm noch vorkommende, mit R bezeichnete unbestimmte Function von r lässt sich aus den Wirkungen geschlossener

Ströme überhaupt nicht bestimmen, und man ist daher, wenn man auch sie noch bestimmen will, für jetzt auf Wahrscheinlichkeitsgründe angewiesen.

Macht man die schon am Ende des §. 10 erwähnte Annahme, dass die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung nach einem einheitlichen Gesetze stattfinden müsse, so gelangt man zu dem Schlusse, dass

$$R = k_1 r \tag{69}$$

zu setzen ist, worin k_1 eine Constante bedeutet. Dadurch geht (68) über in:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'} + k_1\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \tag{70}$$

Sucht man ferner noch durch Bestimmung der Constanten k_1 diesen Ausdruck möglichst einfach zu machen, so findet man zunächst, dass zwei Werthe sich in dieser Beziehung besonders auszeichnen, nämlich $k_1 = 0$ und $k_1 = -k$, welche geben:

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}, \tag{71}$$

$$V = -k\frac{ee'}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \tag{72}$$

Diese beiden Formeln sind äusserlich nahe gleich einfach; benutzt man sie aber zu Rechnungen, indem man aus ihnen die Kraftcomponenten zu bestimmen sucht, so findet man, dass für diese aus der ersteren Formel viel einfachere Ausdrücke entstehen, als aus der letzteren, und man wird also, wenn man dasjenige Kraftgesetz erhalten will, welches, während es allen bis jetzt bekannten Erscheinungen entspricht, zugleich möglichst einfach ist, $k_1 = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $R = 0$ zu setzen haben.

Da der Ausdruck des electrodynamischen Potentials kürzer und übersichtlicher ist, als diejenigen der Kraftcomponenten, so ist er ganz besonders dazu geeignet, die verschiedenen bis jetzt aufgestellten electrodynamischen Grundgesetze (mit Ausnahme des Gauss'schen, welches dem Princip von der Erhaltung der Energie nicht genügt) unter einander zu vergleichen, und es möge hier eine Zusammenstellung der Art Platz finden. Die zur Bestimmung des electrodynamischen Potentials dienende Gleichung ist

1) nach **Weber**[1]):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

2) nach **Riemann**[2]):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

3) nach den von mir ausgeführten Entwickelungen

a) in allgemeinster Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}+\frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

b) in vereinfachter Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}+k_1\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

c) in einfachster und daher wahrscheinlichster Form:

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Dem letzten Ausdrucke kann man auch folgende Gestalt geben:

$$V = k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right), \tag{73}$$

oder, wenn man mit v und v' die Geschwindigkeiten der beiden Electricitätstheilchen und mit ε den Winkel zwischen ihren Bewegungsrichtungen bezeichnet:

$$V = k\frac{ee'}{r}vv'\cos\varepsilon. \tag{74}$$

§. 14. Ableitung der Kraftcomponenten aus dem Potential.

Um nun aus dem electrostatischen und electrodynamischen Potential wiederum die Kraftcomponenten abzuleiten, hat man Gleichungen anzuwenden, in denen das electrodynamische Potential in derselben Weise vorkommt, wie in den auf allgemeine Coordinaten bezüglichen mechanischen Grundgleichungen von **Lagrange**

---

[1]) **Pogg.** Ann. Jubelband S. 212.

[2]) Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von **Bernh. Riemann** bearbeitet von **Hattendorff**, Hannover 1876, S. 326.

die lebendige Kraft. Für die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche das Theilchen e erleidet, lautet die Gleichung:

$$(75)\qquad Xee' = \frac{\partial(V-U)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \frac{dx}{dt}}\right).$$

Hierin hat man für U und V die unter (67) und (68) gegebenen Ausdrücke einzusetzen. Aus dem ersteren erhält man einfach:

$$(76)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = ee' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}.$$

Den letzteren, welcher bei der Differentiation als Function der sechs Coordinaten und der sechs Geschwindigkeitscomponenten zu behandeln ist, wollen wir so umformen, dass die Geschwindigkeitscomponenten explicite in ihm vorkommen. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir dabei V in zwei Theile zerlegen, indem wir setzen:

$$(77)\qquad V = V_1 + V_2,$$

worin V_1 und V_2 folgende Bedeutungen haben:

$$V_1 = -\frac{kee'}{2r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\,\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

$$= \frac{kee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

$$V_2 = -ee'\frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

$$= -ee'\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial x'}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y'}\frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z'}\frac{dx}{dt}\frac{dz'}{dt}\\ &+ \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x'}\frac{dy}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial y'}\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial z'}\frac{dy}{dt}\frac{dz'}{dt}\\ &+ \frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial x'}\frac{dz}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial y'}\frac{dz}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial z'}\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\end{aligned}\right\}.$$

Dann erhalten wir für den ersten Theil:

$$(78)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x} = kee' \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left(\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dx'}{dt} + \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dy'}{dt} + \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dz'}{dt}\right) \\ \qquad = -\dfrac{k}{2} ee' \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \dfrac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \, \partial s'} \dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial \frac{dx}{dt}} = \dfrac{kee'}{r}\dfrac{dx'}{dt}, \end{cases}$$

$$(79)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_1}{\partial \frac{dx}{dt}}\right) = kee' \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right);$$

und für den zweiten Theil erhalten wir:

$$(80)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x} = -ee' \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 R}{\partial s \, \partial s'}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\right), \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial \frac{dx}{dt}} = -ee' \left(\dfrac{\partial^2 R}{\partial x \, \partial x'}\dfrac{dx'}{dt} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial x \, \partial y'}\dfrac{dy'}{dt} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial x \, \partial z'}\dfrac{dz'}{dt}\right) \\ \qquad = -ee' \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial R}{\partial x'}\dfrac{dx'}{dt} + \dfrac{\partial R}{\partial y'}\dfrac{dy'}{dt} + \dfrac{\partial R}{\partial z'}\dfrac{dz'}{dt}\right) \\ \qquad = -ee' \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial R}{\partial s'}\dfrac{ds'}{dt}\right), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \frac{dx}{dt}}\right) = -ee' \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial s'}\frac{ds'}{dt}\right)\right],$$

was sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \frac{dx}{dt}}\right) = -ee' \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial s'}\frac{ds'}{dt}\right)\right]$$

oder endlich:

$$(81)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \frac{dx}{dt}}\right) = -ee' \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial s \, \partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2 R}{\partial s'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial R}{\partial s'}\frac{d^2 s'}{dt^2}\right].$$

Setzt man nun die unter (76), (78), (79), (80) und (81) gegebenen Ausdrücke in die Gleichung (75) ein, nachdem man in der letzteren V durch $V_1 + V_2$ ersetzt hat, so erhält man:

$$X = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial s'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial R}{\partial s'}\frac{d^2 s'}{dt^2}\right],$$

welches die oben unter (66) gegebene Gleichung ist.

Die Rechnung vereinfacht sich offenbar sehr, wenn man für R den Werth Null annimmt, welcher in §. 13 als der wahrscheinlichste bezeichnet wurde. Dann erhält man:

$$(82)\quad \begin{cases} X = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(1 + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) \\ \quad = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) \\ \quad = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}(1 - kvv' \cos \varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right). \end{cases}$$

In dieser Form habe ich die Gleichung, welche zur Bestimmung der in eine Coordinatenrichtung fallenden Kraftcomponente dient, und sich natürlich für die beiden anderen Coordinatenrichtungen auf entsprechende Art bilden lässt, zuerst in einer Mittheilung vom Februar 1876 aufgestellt.

§. 15. Kraftgesetz für Stromelemente.

Will man die x-Componente der Kraft bestimmen, welche ein Stromelement ds von einem Stromelemente ds' erleidet, so hat man die unter (66) gegebene Gleichung auf folgende vier Combinationen von je zwei Electricitätsmengen anzuwenden: $h\,ds$ und $h'\,ds'$, $h\,ds$ und $-h'\,ds'$, $-h\,ds$ und $h'\,ds'$, $-h\,ds$ und $-h'\,ds'$, indem man dabei $h\,ds$ und $h'\,ds'$ als bewegt, dagegen $-h\,ds$ und $-h'\,ds'$ als ruhend betrachtet. Von den dadurch erhaltenen vier Ausdrücken hat man die algebraische Summe zu nehmen. Man gelangt dadurch für die gesuchte Kraftcomponente zu dem Ausdrucke:

$$hh'\,ds\,ds'\,k\left(-\tfrac{1}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

oder anders geschrieben:

$$hh' \, ds \, ds' \, k \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos \varepsilon - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right) \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Bezeichnet man die Stromintensität, d. h. die während der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fliessende Electricitätsmenge, für die beiden Ströme mit i und i', indem man sich dabei die Electricitätsmenge nach demselben mechanischen Maasse gemessen denkt, welches in allen obigen Gleichungen angewandt ist, so kann man i und i' an die Stelle der Producte $h \frac{ds}{dt}$ und $h' \frac{ds'}{dt}$ setzen, und erhält dann für die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, den Ausdruck:

$$k i i' \, ds \, ds' \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos \varepsilon - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right).$$

In diesem Ausdrucke kommt die unbestimmte Function R nicht vor, sondern sie hat sich bei der Bildung der oben erwähnten Summe fortgehoben. Wir haben also für die in eine gegebene Richtung fallende Componente der Kraft, welche ein Stromelement von einem andern erleidet, einen vollkommen bestimmten Ausdruck gewonnen, von dem wir sagen dürfen, dass er der einzige ist, welcher sich mit den beiden Annahmen, dass nur Eine Electricität im festen Leiter beweglich sei, und dass die gegenseitigen Einwirkungen zweier Electricitätstheilchen für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen, vereinigen lässt.

Einen hiermit vollständig übereinstimmenden Ausdruck für die von einem Stromelemente auf ein anderes ausgeübte Kraft hat H. Grassmann schon im Jahre 1845 (Poggendorff's Annalen Bd. 64, S. 1) aus sehr sinnreichen Betrachtungen ganz anderer Art abgeleitet, worin eine erfreuliche Bestätigung unserer oben ausgeführten Entwickelungen liegt.

ABSCHNITT X.

Anwendung des neuen electrodynamischen Grundgesetzes auf die zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindende ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte.

§. 1. Unterscheidende Eigenthümlichkeiten des neuen Grundgesetzes.

Im vorigen Abschnitte ist für die gegenseitige Einwirkung zweier bewegter Electricitätstheilchen ein neues Grundgesetz abgeleitet, welches sich von den früher aufgestellten sehr wesentlich unterscheidet. Dieser Unterschied ist in §. 13 des vorigen Abschnittes schon einmal dadurch ersichtlich gemacht, dass die den verschiedenen Gesetzen entsprechenden Formeln des electrodynamischen Potentials zusammengestellt sind; es wird aber nicht unzweckmässig sein, diese Vergleichung hier noch einmal unter einem besonderen Gesichtspuncte vorzunehmen.

Wenn zwei Puncte sich bewegen, so kann man bekanntlich ausser den absoluten Bewegungen der beiden einzelnen Puncte auch die relative Bewegung beider Puncte zusammen betrachten. Unter der Bezeichnung relativer Bewegung werden aber noch zwei wesentlich von einander verschiedene Begriffe verstanden. Seien x, y, z und x', y', z' die rechtwinkligen Coordinaten der beiden Puncte, so dass $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ die

Geschwindigkeits-Componenten der beiden absoluten Bewegungen darstellen, dann sind

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}$$

die Geschwindigkeits-Componenten der relativen Bewegung im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Ausserdem wird aber von manchen Autoren, insbesondere von W. Weber, die relative Bewegung auch so aufgefasst, dass darunter nur die Zu- oder Abnahme der gegenseitigen Entfernung der beiden Puncte verstanden, und dass daher, wenn r ihre Entfernung zur Zeit t bedeutet, die relative Geschwindigkeit durch $\frac{dr}{dt}$ dargestellt wird. Um diese letztere relative Geschwindigkeit durch die Componenten der absoluten Geschwindigkeiten auszudrücken, hat man die Gleichung

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

nach t zu differentiiren, wodurch man erhält:

$$(1) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left[(x - x')\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right) + (y - y')\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right) + (z - z')\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)\right].$$

Die drei von Weber, Riemann und mir für das electrodynamische Potential zweier bewegter Electricitätstheilchen auf einander aufgestellten Formeln unterscheiden sich nun wesentlich dadurch von einander, dass die eine oder die andere Art von relativer Geschwindigkeit oder die absoluten Geschwindigkeiten in ihnen vorkommen.

In der Weber'schen Formel kommt die relative Geschwindigkeit der letzten Art vor, indem die Formel lautet:

$$(2) \qquad V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Setzt man hierin für $\frac{dr}{dt}$ den obigen Ausdruck ein, so geht die Formel über in:

$$(2a) \quad V = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{ee'}{r^3}\left[(x-x')\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)+(y-y')\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right) + (z-z')\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)\right]^2.$$

In der Riemann'schen Formel kommt die relative Geschwindigkeit der ersten Art vor, indem sie lautet:

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]. \tag{3}$$

In meiner Formel endlich kommen die Componenten der absoluten Geschwindigkeiten vor, indem sie lautet:

$$V = k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right). \tag{4}$$

Eine Vergleichung der drei Formeln (2a), (3) und (4) lässt sofort erkennen, dass für die absoluten Geschwindigkeiten die letzte Formel bedeutend einfacher ist, als die beiden ersten, indem sie sowohl in Bezug auf $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$, als auch in Bezug auf $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ und $\frac{dz'}{dt}$ homogen vom ersten Grade ist, während die beiden ersten Formeln die einzelnen Geschwindigkeits-Componenten auch quadratisch enthalten. Dieser Umstand trägt sehr wesentlich zur Vereinfachung aller mit dem Potential anzustellenden Rechnungen bei, und mit ihm hängt auch der Vorzug zusammen, auf welchen ich das Hauptgewicht legen muss, nämlich dass das durch meine Formel ausgedrückte Kraftgesetz allgemeiner zulässig ist, als die beiden anderen.

Die von Weber und Riemann aufgestellten Kraftgesetze stehen, wie zu Anfang des vorigen Abschnittes nachgewiesen ist, nur dann mit der Erfahrung im Einklange, wenn man die specielle Voraussetzung macht, dass ein galvanischer Strom aus zwei gleichen und entgegengesetzten Strömen von positiver und negativer Electricität bestehe. Anders das von mir aufgestellte Gesetz. Bei der im vorigen Abschnitte ausgeführten Ableitung desselben habe ich zwar der Einfachheit wegen auch eine specielle Voraussetzung über die Art der Electricitätsbewegung in festen Leitern gemacht, nämlich die, dass nur die positive Electricität ströme, während die negative Electricität fest an den ponderablen Atomen hafte. Es wurde aber schon dort in §. 11 darauf hingewiesen, dass die Zulässigkeit des gewonnenen Ausdruckes nicht auf den Fall, wo nur Eine Electricität als strömend vorausgesetzt wird, beschränkt ist, sondern dass er auch dann zulässig bleibt, wenn

man annimmt, der galvanische Strom bestehe aus zwei nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Strömen von positiver und negativer Electricität, wobei es gleichgültig ist, ob man diese beiden Ströme ihrer Stärke nach als gleich oder als verschieden annimmt. In der That kann man sich auch leicht davon überzeugen, dass alle Erfahrungssätze, welche im vorigen Abschnitte der Entwickelung zu Grunde gelegt wurden, auch dann erfüllt bleiben, wenn man den gewonnenen Kraftausdruck auf eine Combination von zwei entgegengesetzten Strömen von positiver und negativer Electricität, deren Intensitäten beliebig sind, anwendet.

Diese grössere Allgemeinheit der Zulässigkeit meiner Formel ist sehr wichtig. Wenn man sich nämlich auch, wie ich es thue, der von C. Neumann gemachten Voraussetzung anschliesst, dass die negative Electricität fest an den ponderablen Atomen hafte, so ist damit doch nur für diejenigen Leiter, welche die Electricität ohne Mitbewegung der Atome leiten, das Strömen der negativen Electricität ausgeschlossen. Bei den electrolytischen Leitern dagegen, bei denen die Electricitätsleitung durch Bewegung der positiv und negativ electrischen Molecültheile vermittelt wird, muss man für die entgegengesetzt electrischen Molecültheile auch entgegengesetzt gerichtete Bewegungen annehmen, die aber wegen der verschiedenen Beweglichkeit der verschiedenen Molecültheile nicht mit gleicher Geschwindigkeit stattzufinden brauchen. Daraus folgt, dass ein Kraftgesetz, dessen Zulässigkeit an eine ganz bestimmte Voraussetzung über die Bewegung der negativen Electricität geknüpft ist (sei es die, dass die negative Electricität sich eben so schnell bewege, wie die positive, oder die, dass sie sich gar nicht bewege), nicht auf alle galvanischen Ströme in metallischen und electrolytischen Leitern angewandt werden darf, sondern dass dieses nur mit einem Kraftgesetze geschehen darf, dessen Zulässigkeit davon, ob und wie schnell die negative Electricität sich bewegt, unabhängig ist.

Wir wollen daher in den folgenden allgemeinen Entwickelungen nicht nur für die positive, sondern auch für die negative Electricität eine Strömungsbewegung in Rechnung bringen, wollen aber das Verhältniss der Geschwindigkeiten der beiden Electricitäten unbestimmt lassen, indem wir zwei verschiedene Zeichen für die beiden Geschwindigkeiten einführen, denen wir nachträglich beliebige Werthe geben können. Dann können wir für jeden

electrolytischen Leiter das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten so annehmen, wie es der Natur des Leiters entspricht, und für metallische Leiter können wir, gemäss der Neumann'schen Vorstellung, die Geschwindigkeit der negativen Electricität gleich Null setzen. Ja man könnte auch, wenn man sich der Weber'schen Vorstellung anschliessen wollte, für die metallischen Leiter die Geschwindigkeit der negativen Electricität gleich der der positiven setzen. Die auf diese Weise abgeleiteten Gleichungen haben also den Vorzug, dass sie den verschiedenen Arten von Leitern und den verschiedenen Vorstellungsweisen über die Electricitätsbewegung gleich gut angepasst werden können.

§. 2. Anwendung des neuen Grundgesetzes auf die in bewegten linearen Leitern strömenden Electricitäten.

Es möge nun das neue Grundgesetz dazu angewandt werden, die zwischen zwei linearen Strömen stattfindenden ponderomotorischen Kräfte und die von einem linearen Strome auf einen linearen Leiter ausgeübten Inductionswirkungen zu bestimmen.

Nach diesem Gesetze gilt, wenn Xee' die x-Componente der Kraft darstellt, welche ein zur Zeit t im Puncte x, y, z befindliches bewegtes Electricitätstheilchen e von einem anderen um die Strecke r von ihm entfernten, im Puncte x', y', z' befindlichen bewegten Electricitätstheilchen e' erleidet, folgende Gleichung:

$$(5)\qquad X = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Um diese Gleichung und ebenso auch die weiter unten folgenden, aus ihr abgeleiteten Gleichungen bequemer schreiben zu können, wollen wir ein Summenzeichen von eigenthümlicher Bedeutung einführen. Wenn nämlich eine Summe aus drei Gliedern besteht, welche sich auf die drei Coordinatenrichtungen beziehen, im Uebrigen aber unter einander gleich sind, so wollen wir nur das auf die x-Richtung bezügliche Glied wirklich hinschreiben und das Vorhandensein der beiden anderen durch das

Summenzeichen andeuten, wie aus nachstehender Gleichung zu ersehen ist:

$$\sum \frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\text{(5a)} \quad X = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(1 - k\sum \frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Diese Gleichung wollen wir nun auf die in zwei linearen Leitern strömenden Electricitäten anwenden. Es mögen also zwei von galvanischen Strömen durchflossene Leiter s und s' gegeben sein, welche sich bewegen können und deren Stromintensitäten veränderlich sein können. In einem Leiterelemente ds denken wir uns gleiche Mengen von positiver und negativer Electricität enthalten, welche wir mit hds und $-hds$ bezeichnen wollen. Die positive Electricität habe die Strömungsgeschwindigkeit c nach der Seite, nach welcher wir die Bogenlänge s als wachsend betrachten, und die negative Electricität habe eine nach der entgegengesetzten Seite gehende Strömungsgeschwindigkeit, welche wir mit $-c_1$ bezeichnen wollen. Ebenso bezeichnen wir die in einem Leiterelemente ds' enthaltenen Electricitätsmengen mit $h'ds'$ und $-h'ds'$ und ihre Strömungsgeschwindigkeiten mit c' und $-c_1'$.

Richten wir nun zunächst unsere Aufmerksamkeit auf irgend zwei in den beiden Leitern sich bewegende Electricitätstheilchen, welche sich zur Zeit t in den Puncten x, y, z und x', y', z' und im gegenseitigen Abstande r befinden, so hat jedes dieser Electricitätstheilchen ausser seiner Bewegung im Leiter, welche wir kurz die S t r ö m u n g s b e w e g u n g nennen und deren Geschwindigkeit wir, wie oben bei der positiven Electricität, beim einen mit c und beim anderen mit c' bezeichnen wollen, noch dadurch eine weitere Bewegung, dass der Leiter selbst sich bewegt. Um die Antheile, welche die beiden Bewegungen an der Veränderung der Coordinaten und des Abstandes haben, von einander unterscheiden zu können, wollen wir folgende Bezeichnungsweise einführen.

Die Coordinaten eines in einem der Leiter festen Punctes betrachten wir einfach als Functionen der Zeit t, die Coordinaten des im Leiter s strömenden Electricitätstheilchens dagegen denken wir uns als Functionen von t und s dargestellt, und betrachten

dabei s selbst wieder als Function von t. Demnach ist für die Coordinate x des Electricitätstheilchens der vollständige Differentialcoëfficient nach t so zu schreiben:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{ds}{dt},$$

oder, wenn wir für den die Strömungsgeschwindigkeit darstellenden Differentialcoëfficienten $\frac{ds}{dt}$ das oben eingeführte Zeichen c anwenden:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + c\,\frac{\partial x}{\partial s}. \tag{6}$$

Ebenso gilt für das im Leiter s' mit der Geschwindigkeit c' strömende Theilchen die Gleichung:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + c'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}. \tag{7}$$

Entsprechende Gleichungen sind natürlich auch für die beiden anderen Coordinatenrichtungen zu bilden.

Der Abstand r der beiden Electricitätstheilchen von einander hängt wegen der Bewegung der beiden Leiter unmittelbar von t, und wegen der Bewegung der Electricitätstheilchen in den Leitern von s und s' und dadurch mittelbar von t ab. Der vollständige Differentialcoëfficient von $\frac{1}{r}$ nach t lautet daher:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dt} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t} + c\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s} + c'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}. \tag{8}$$

Wegen der in der Gleichung (5a) vorkommenden zweiten Differentiation nach t müssen wir unser Augenmerk auch noch auf das Verhalten der Geschwindigkeiten c und c' richten. Bei einem galvanischen Strome kann die Geschwindigkeit der strömenden Electricitäten sich an jeder Stelle des Leiters mit der Zeit ändern, weil die Intensität des Stromes veränderlich sein kann, und ausserdem können, falls der Leiter in Bezug auf Querschnitt und Stoff nicht überall gleich ist, die Geschwindigkeiten an verschiedenen Stellen des Leiters verschieden sein. Wenn wir nun dem entsprechend bei unserem zur Betrachtung ausgewählten, im Leiter s sich bewegenden Electricitätstheilchen die Strömungsgeschwindigkeit c als Function von t und s behandeln, so haben wir zu setzen:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial c}{\partial s}, \tag{9}$$

und ebenso für das im Leiter s' sich bewegende Electricitätstheilchen:

$$\frac{dc'}{dt} = \frac{\partial c'}{\partial t} + c'\frac{\partial c'}{\partial s'}. \tag{10}$$

Nach diesen Vorbemerkungen über die Behandlung der in Betracht kommenden Grössen wollen wir die Kraft bestimmen, welche ein Stromelement ds' auf eine in einem Puncte concentrirt gedachte Electricitätseinheit ausüben würde, wenn diese mit der Geschwindigkeit c im Leiter s strömte.

Zunächst möge die Kraft bestimmt werden, welche die in dem Elemente enthaltene positive Electricitätsmenge $h'ds'$, die mit der Geschwindigkeit c' strömt, auf jene Electricitätseinheit ausüben würde. Die x-Componente dieser Kraft wird durch das Product $h'ds'\,X$ dargestellt, in welchem für X der unter (5a) gegebene Ausdruck zu setzen ist, wodurch kommt:

$$-h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(1 - k\sum\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right) - kh'ds'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Hierin müssen wir das letzte Glied etwas näher betrachten. Die Grösse $\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}$, welche durch Einsetzung des in (7) gegebenen Ausdruckes von $\frac{dx'}{dt}$ die Form:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial x'}{\partial t} + c'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)$$

erhält, ist als Function von t, s und s' anzusehen, und demgemäss ist die angedeutete vollständige Differentiation nach t so auszuführen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + c\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + c'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Diese Gleichung möge mit h' multiplicirt und dann das letzte Glied in folgender Weise umgeformt werden:

$$h'c'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right) - \frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}.$$

Zugleich möge bei der im vorletzten Gliede angedeuteten Differen-

tiation berücksichtigt werden, dass nur r von s abhängig ist. Dann kommt:

$$(11)\qquad h'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) = h'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + h'c\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right) - \frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}.$$

Der hierin vorkommende Differentialcoëfficient $\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}$ lässt sich durch einen anderen ersetzen. Das Leiterelement ds' ist von zwei Querschnitten des Leiters begrenzt, welche sich an den durch die Bogenlängen s' und $s' + ds'$ bestimmten Stellen befinden. Durch den ersten Querschnitt strömt während der Zeit dt die Menge $h'c'dt$ von positiver Electricität in das Element hinein. Durch den zweiten Querschnitt strömt die Menge

$$\left(h'c' + \frac{\partial(h'c')}{\partial s'}ds'\right)dt$$

aus dem Elemente heraus. Die während der Zeit dt stattfindende Zunahme der in dem Elemente enthaltenen positiven Electricitätsmenge ist also:

$$-\frac{\partial(h'c')}{\partial s'}ds'\,dt.$$

Eben diese Zunahme wird aber andererseits durch:

$$\frac{\partial h'}{\partial t}ds'\,dt$$

dargestellt, und man erhält somit die Gleichung:

$$(12)\qquad \frac{\partial(h'c')}{\partial s'} = -\frac{\partial h'}{\partial t},$$

und dadurch geht die Gleichung (11) über in:

$$h'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) = h'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + h'c\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{\partial h'}{\partial t}.$$

Hierin lässt sich an der rechten Seite das erste und letzte Glied in eines zusammenziehen, so dass die Gleichung lautet:

$$(13)\quad h'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{dx'}{dt}\right)+h'c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in das letzte Glied des obigen Ausdruckes der Kraftcomponente geht derselbe über in:

$$-h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(1-k\sum\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right)-kds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\right.$$
$$\left.+h'c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\right].$$

Hierin müssen wir nun endlich noch für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$ ihre unter (6) und (7) gegebenen Werthe einsetzen, wodurch wir folgenden Ausdruck für die x-Componente der von der positiven Electricitätsmenge $h'ds'$ ausgeübten Kraft erhalten:

$$-h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[1-k\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+c'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right]$$
$$-kds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{h'c'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(h'\frac{\partial x'}{\partial t}+h'c'\frac{\partial x'}{ds'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{h'c'^2}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Will man ferner die x-Componente derjenigen Kraft ausdrücken, welche die in dem Elemente ds' enthaltene **negative** Electricitätsmenge $-h'ds'$ auf die im Leiter s gedachte Electricitätseinheit ausüben würde, so hat man dazu im vorigen Ausdrucke nur h' und c' durch $-h'$ und $-c_1'$ zu ersetzen, wodurch man erhält:

$$h'ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[1-k\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}-c_1'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right]$$
$$-kds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{h'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{h'c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(-h'\frac{\partial x'}{\partial t}+h'c_1'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h'c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}-\frac{h'c_1'^2}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhalten wir die x-Componente der zu bestimmenden Kraft, welche das Stromelement ds' auf die im Leiter s gedachte, mit der Geschwindigkeit c strömende Electricitätseinheit ausüben würde. Bei der Ausführung der Addition möge berücksichtigt werden, dass die Summe $h'c' + h'c'_1$ die Stromintensität in s' bedeutet, welche wir mit i' bezeichnen und in allen Theilen des Leiters als gleich annehmen wollen. Wenn wir dann noch unter Einführung eines neuen Zeichens dieselbe x-Componente durch $\mathfrak{x}\, ds'$ darstellen, so erhalten wir die Gleichung:

$$
(14) \quad \mathfrak{x} = k \left[i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - c i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right.
$$
$$
\left. - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c'_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].
$$

Entsprechend lauten natürlich auch die zur Bestimmung der y- und z-Componente derselben Kraft dienenden Gleichungen.

§. 3. Ponderomotorische Kraft zwischen zwei Stromelementen.

Aus der im vorigen Paragraphen bestimmten Kraft, welche die im Leiter s gedachte Electricitätseinheit von dem Stromelemente ds' erleiden würde, können wir nun leicht auch die Kräfte ableiten, welche die in einem Leiterelemente ds wirklich enthaltenen beiden Electricitätsmengen $h ds$ und $- h ds$ von dem Stromelemente ds' erleiden.

Um die x-Componente der Kraft zu erhalten, welche die positive Electricitätsmenge $h ds$, deren Geschwindigkeit c ist, erleidet, brauchen wir nur den obigen Ausdruck von $\mathfrak{x}$ mit $h ds ds'$ zu multipliciren, und diese Componente wird somit dargestellt durch:

$$
k h\, ds\, ds' \left[i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right.
$$
$$
\left. - c i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c'_1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].
$$

Um ferner die x-Componente der Kraft zu erhalten, welche die negative Electricitätsmenge $-hds$ erleidet, brauchen wir in dem vorigen Ausdrucke nur h und c durch $-h$ und $-c_1$ zu ersetzen, wodurch wir erhalten:

$$-khds\,ds'\left[i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}-c_1\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.+c_1 i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{c'-c_1'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke bedeutet die x-Componente der ponderomotorischen Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelement ds' erleidet. In dieser Summe heben sich alle Glieder, welche nicht c oder c_1 als Factor haben, gegenseitig auf, und es bleibt:

$$khds\,ds'\,(c+c_1)\,i'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right).$$

Hierin kann man noch das Product $h(c+c_1)$, welches die Stromintensität in s bedeutet, durch das Zeichen i ersetzen. Indem wir den Ausdruck dann, unserer früheren Bezeichnung gemäss, gleich $\xi\,ds\,ds'$ setzen, erhalten wir die zur Bestimmung von ξ dienende Gleichung, zu welcher wir auch die entsprechenden zur Bestimmung von η und ζ dienenden bilden wollen, nämlich:

$$15)\quad\begin{cases}\xi=kii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\\ \eta=kii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)\\ \zeta=kii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right).\end{cases}$$

Diese Gleichungen kann man noch dadurch umgestalten dass man für die in ihnen vorkommende Summe andere gleichbedeutende Ausdrücke substituirt. Aus der Gleichung:

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} = -2\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y'}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z'}{\partial s'}\right) = -2 \sum \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

Bezeichnet man ferner, wie oben, den Winkel zwischen den Richtungen der beiden Stromelemente ds und ds' mit (ss'), so ist:

$$\cos (ss') = \sum \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

Infolge dieser beiden Gleichungen kann man der ersten der Gleichungen (15) folgende Formen geben:

$$(16) \qquad \xi = -kii'\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)$$

$$(17) \qquad \xi = kii'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos (ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right),$$

und in gleicher Weise lassen sich natürlich auch die beiden letzten der Gleichungen (15) umgestalten.

In Bezug auf diese hier gewonnenen, und auch schon im letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes aus einer weniger allgemeinen Betrachtung abgeleiteten Ausdrücke für die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, ist zunächst zu bemerken, dass sie davon, ob der galvanische Strom aus der Bewegung nur Einer Electricität oder aus der Bewegung beider Electricitäten besteht, ferner davon, ob die Stromelemente in Ruhe oder in Bewegung sind, und ob die Stromintensitäten in ihnen constant oder veränderlich sind, nicht beeinflusst werden.

Ihrer Richtung nach unterscheidet sich die durch diese Ausdrücke bestimmte Kraft von derjenigen, welche Ampère angenommen hat, wesentlich dadurch, dass sie nicht in die Verbindungslinie der beiden Stromelemente fällt.

Die durch den Mittelpunct von ds gehende Gerade, in welcher die Kraft wirkt, lässt sich leicht geometrisch bestimmen. Nach der Form der obigen Ausdrücke, welche aus je zwei Gliedern bestehen, zerfällt die Kraft in zwei Componenten, von denen die erste eine Anziehung von der Stärke:

$$kii'\,ds\,ds'\,\frac{\cos (ss')}{r^2}$$

ist, und die zweite die Richtung des Elementes ds' und die Stärke:

$$- kii' \, ds \, ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \quad \text{oder} \quad kii' \, ds \, ds' \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s}$$

hat. Daraus folgt, dass jene Gerade, in welcher die Kraft wirkt, in der durch r und ds' gelegten Ebene liegen muss. In dieser Ebene bestimmt sich ihre Richtung weiter dadurch, dass sie auf dem Elemente ds senkrecht sein muss. Die in die Richtung des Elementes ds fallende Componente der Kraft wird nämlich dargestellt durch:

$$ds \, ds' \left(\xi \frac{\partial x}{\partial s} + \eta \frac{\partial y}{\partial s} + \zeta \frac{\partial z}{\partial s} \right),$$

und wenn man hierin für ξ, η, ζ die unter (15) gegebenen Ausdrücke einsetzt, und dabei die Gleichung:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}$$

berücksichtigt, so hebt sich Alles auf und der Ausdruck wird Null, woraus folgt, dass die Kraft nur auf dem Elemente senkrecht sein kann.

Ein anderer wesentlicher Punct, in welchem die aus dem neuen Grundgesetze abgeleitete Kraft von der Ampère'schen abweicht, ist folgender. Wenn die beiden Stromelemente so gerichtet sind, dass sie mit ihrer Verbindungslinie zusammenfallen, so würden sie nach der Ampère'schen Formel eine Abstossung oder Anziehung auf einander ausüben, je nachdem die Ströme im gleichen oder entgegengesetzten Sinne stattfinden. Nach den obigen Formeln dagegen ist für diesen Fall die Kraft gleich Null. Ich glaube nicht, dass irgend eine erfahrungsmässig feststehende Thatsache dem letzteren Resultate widerspricht. Man betrachtet zwar gewöhnlich die Bewegung, welche ein auf zwei mit Quecksilber gefüllte parallele Rinnen gesetzter metallischer Schwimmer beim Durchgange eines galvanischen Stromes annimmt, als einen Beweis für die Richtigkeit des aus der Ampère'schen Formel abgeleiteten Ergebnisses; ein solcher Schluss scheint mir aber nicht gerechtfertigt zu sein, da diese Bewegung sich auch auf andere Weise erklären lässt, nämlich aus der Wirkung, welche die Electricität beim Uebergange aus dem Quecksilber in den festen Leiter und aus dem festen Leiter wieder in das Quecksilber auf die ponderablen Atome ausübt, und welche auch in zusammenhängenden Leitern bei der

Ueberwindung des Leitungswiderstandes stattfindet, aber hier keine sichtbare Bewegung, sondern nur Wärme hervorbringen kann.

Zur weiteren Vergleichung unserer oben bestimmten Kraft mit der von Ampère angenommenen kann besonders die in Abschnitt VIII. unter (2) gegebene, aus der Ampère'schen Formel abgeleitete Gleichung dienen, nämlich:

$$\mathfrak{x} = kii' \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(ss') - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x' - x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \right\}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der unter (17) gegebenen nur durch das letzte Glied. Da dieses Glied ein Differentialcoëfficient nach s' ist, so giebt es bei der Integration über einen geschlossenen Strom s' oder auch über ein beliebiges System von geschlossenen Strömen den Werth Null. Daraus folgt, dass in allen Fällen, wo es sich um die von geschlossenen Strömen (zu denen auch Magnete zu rechnen sind), ausgeübten ponderomotorischen Kräfte handelt, die aus der Ampère'schen Formel abgeleiteten Resultate mit den aus dem neuen Grundgesetze sich ergebenden übereinstimmen.

§. 4. Bestimmung der inducirten electromotorischen Kraft.

Wir kehren nun zurück zu der Gleichung (14), nämlich:

$$\mathfrak{x} = k \left[i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) - ci' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right.$$
$$\left. - i' \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].$$

Die durch diese Gleichung bestimmte Grösse $\mathfrak{x}$ ist dadurch definirt, dass das Product $\mathfrak{x} ds'$ die x-Componente der Kraft darstellt, welche eine im Leiter s gedachte, mit der Geschwindigkeit c strömende Electricitätseinheit von dem Stromelemente ds' erleiden würde. Bezeichnet man die y- und z-Componente derselben Kraft mit $\mathfrak{y} ds'$ und $\mathfrak{z} ds'$, so sind die Grössen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ natürlich durch ganz entsprechende Gleichungen zu bestimmen. Bezeichnet man ferner

die in der Richtung des Leiters s fallende Componente derselben Kraft mit $\mathfrak{s}\,ds'$, so gilt für $\mathfrak{s}$ die Gleichung:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{x}\frac{\partial x}{\partial s} + \mathfrak{y}\frac{\partial y}{\partial s} + \mathfrak{z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Diese Grösse, welche dem Folgenden nach von c unabhängig ist, steht nun mit einer anderen, um deren Bestimmung es sich im Folgenden handelt, in unmittelbarer Beziehung. Das Product $\mathfrak{s}\,ds\,ds'$ stellt nämlich dasjenige dar, was man die von dem Stromelemente ds' in dem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft nennt. Bezeichnet man also die von einem endlichen Strome s' in einem endlichen Leiter s inducirte electromotorische Kraft mit E, und demgemäss die von dem Stromelemente ds' in dem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft mit $\frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'$, so hat man zu setzen:

$$\mathfrak{s} = \frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'}.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'} = \mathfrak{x}\frac{\partial x}{\partial s} + \mathfrak{y}\frac{\partial y}{\partial s} + \mathfrak{z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Wenn man hierin für $\mathfrak{x}$ den oben angeführten Ausdruck und für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die entsprechenden Ausdrücke einsetzt, so heben sich die mit dem Factor c behafteten Glieder gegenseitig auf, und die übrigen geben:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'} = k\left[i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) - i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c'-c_1'}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Hierin kann man setzen:

$$i'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'} = i'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) - \frac{i'}{r}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}$$

und dann weiter:

$$-\frac{i'}{r}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right),$$

wodurch die obige Gleichung übergeht in:

$$(19)\quad \frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'} = k\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) + i'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left. - i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{c' - c_1'}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Dieser Gleichung kann man noch etwas andere Formen geben. Wenn $d\sigma$ und $d\sigma'$ die unendlich kleinen Bahnen sind, welche die Leiterelemente ds und ds' während der Zeit dt zurücklegen, so kann man setzen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt} \text{ und } \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial \sigma'}\frac{d\sigma'}{dt},$$

oder unter Einführung der Zeichen:

$$\gamma = \frac{d\sigma}{dt} \text{ und } \gamma' = \frac{d\sigma'}{dt},$$

noch kürzer:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma\frac{\partial x}{\partial \sigma} \text{ und } \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma'\frac{\partial x'}{\partial \sigma'}.$$

Dadurch geht (19) über in:

$$(20)\quad \frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'} = k\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) + i'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left. - i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial \sigma'} + \frac{c' - c_1'}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right].$$

Bezeichnet man nun wieder, wie früher, den Winkel zwischen den Richtungen der beiden Leiterelemente ds und ds' mit (ss'), und ferner den Winkel zwischen den Richtungen des Leiterelementes ds und des Bahnelementes $d\sigma'$ mit $(s\sigma')$, sowie den zwischen den Richtungen von $d\sigma$ und ds' mit $(\sigma s')$, so kann man die obigen Summen durch die Cosinus dieser Winkel ersetzen, und erhält:

$$(21)\quad \frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'} = k\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'\cos(ss')}{r}\right) + i'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r}\right)\right.$$
$$\left. - i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c_1')\cos(ss')}{r}\right)\right].$$

Aus dieser unter (19), (20) und (21) in verschiedenen Formen gegebenen Differentialgleichung kann man durch Integration die inducirte electromotorische Kraft für jedes Stück des inducirenden Stromes und jedes Stück des inducirten Leiters berechnen.

Ist der inducirende Strom s' geschlossen, so giebt das letzte Glied bei der Integration nach s' den Werth Null, und man erhält:

$$(22)\quad \frac{\partial E}{\partial s} = -k\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{i'\cos(ss')}{r}ds' + ki'\frac{\partial}{\partial s}\int\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r}ds'.$$

Diese Gleichung stimmt mit den von Fr. Neumann aufgestellten Inductionsgesetzen überein.

Ist der inducirte Leiter s geschlossen, so giebt bei der Integration nach s das zweite Glied den Werth Null, und es kommt:

$$(23)\quad \frac{\partial E}{\partial s'} = -k\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{i'\cos(ss')}{r}ds$$
$$- ki'\frac{\partial}{\partial s'}\int\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r} + \frac{(c'-c_1')\cos(ss')}{r}\right)ds.$$

Sind endlich s und s' beide geschlossen, so fallen bei der doppelten Integration nach s und s' die beiden letzten Glieder fort, und man erhält daher für die von einem geschlossenen Strome s' in einem geschlossenen Leiter s inducirte electromotorische Kraft die einfache Gleichung:

$$(24)\quad E = -k\frac{\partial}{\partial t}\int\int\frac{i'\cos(ss')}{r}ds\,ds',$$

worin man zur Andeutung der Differentiation nach t statt des runden ∂ auch das aufrechte d anwenden kann, da der zu differentiirende Ausdruck nur noch von t abhängt.

Ganz in derselben Weise, wie wir vorher die vom Strome s' im Leiter s inducirte electromotorische Kraft bestimmt haben, können wir natürlich auch die vom Strome s im Leiter s' inducirte electromotorische Kraft bestimmen. Bezeichnen wir diese mit E' und demgemäss die von einem Stromelemente ds in einem Leiterelemente ds' inducirte electromotorische Kraft mit $\frac{\partial^2 E'}{\partial s\,\partial s'}ds\,ds'$, so ist zu setzen:

$$(25)\quad \frac{\partial^2 E'}{\partial s\,\partial s'} = k\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\cos(ss')}{r}\right) + i\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r}\right)\right.$$
$$\left. - i\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r} + \frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)\right].$$

§. 5. Arbeit der ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte.

Nachdem für zwei von electrischen Strömen durchflossene Leiterelemente ds und ds' die auf einander ausgeübten pondero-

motorischen Kräfte und die gegenseitig in einander inducirten electromotorischen Kräfte bestimmt sind, lässt sich auch die von diesen Kräften gethane Arbeit leicht angeben.

Die Componenten derjenigen ponderomotorischen Kraft, welche ds von ds' erleidet, wurden durch die Producte $\xi ds ds'$, $\eta ds ds'$ und $\zeta ds ds'$ dargestellt und die darin vorkommenden Grössen ξ, η, ζ durch die Gleichungen (15) bestimmt, und wenn man in entsprechender Weise die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche ds' von ds erleidet, durch $\xi' ds ds'$, $\eta' ds ds'$ und $\zeta' ds ds'$ darstellt, so kann man zur Bestimmung von ξ', η', ζ' dieselben Gleichungen anwenden, nachdem man in ihnen die accentuirten und unaccentuirten Buchstaben gegen einander vertauscht hat.

Will man nun die Arbeit bestimmen, welche diese Kräfte bei der Bewegung der Elemente während der Zeit dt leisten, so hat man folgenden Ausdruck zu bilden:

$$ds\,ds'\,dt\left(\xi\frac{\partial x}{\partial t}+\eta\frac{\partial y}{\partial t}+\zeta\frac{\partial z}{\partial t}+\xi'\frac{\partial x'}{\partial t}+\eta'\frac{\partial y'}{\partial t}+\zeta'\frac{\partial z'}{\partial t}\right).$$

Substituirt man hierin für $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ ihre Werthe, so erhält man:

$$kii'\,ds\,ds'\,dt\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right).$$

Hierin kann man weiter setzen:

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x'}{\partial s'\,\partial t}$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)-\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x'}{\partial s'\,\partial t},$$

wodurch entsteht:

$$kii'\,ds\,ds'\,dt\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\right],$$

und wenn man hiermit dieselben Umformungen vornimmt, wie mit (19), so erhält man für die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der zwischen zwei Stromelementen wirkenden ponderomotorischen Kräfte den Ausdruck:

$$kii'\,ds\,ds'\,dt\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(ss')}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r}\right)\right].$$

Um die Arbeit, welche von der in einem Leiter inducirten electromotorischen Kraft während der Zeit dt geleistet wird, auszudrücken, haben wir die electromotorische Kraft mit der im Leiter stattfindenden Stromintensität und dem Zeitelemente zu multipliciren. Wenden wir dieses auf die beiden electromotorischen Kräfte an, welche die Elemente ds und ds' gegenseitig in einander induciren, so kommt:

$$ds\,ds'\,dt\left(i\frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'}+i'\frac{\partial^2 E'}{\partial s\,\partial s'}\right).$$

Setzt man hierin die unter (21) und (25) gegebenen Ausdrücke ein, so heben sich mehrere Glieder gegenseitig auf und es bleibt:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i'\cos(ss')}{r}\right)+i'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\cos(ss')}{r}\right)\right.$$
$$\left.+ii'\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{(c'-c'_1)\cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Hierin lassen sich die beiden ersten in der grossen Klammer stehenden Glieder durch folgende ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'\cos(ss')}{r}\right)+ii'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(ss')}{r}\right),$$

so dass man für die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der von den Elementen ds und ds' in einander inducirten electromotorischen Kräfte folgenden Ausdruck erhält:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'\cos(ss')}{r}\right)+ii'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{(c'-c'_1)\cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Addirt man nun die beiden gefundenen Arbeitsgrössen, so erhält man für die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit aller zwischen den Elementen ds und ds' wirkenden Kräfte den Ausdruck:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'\cos(ss')}{r}\right)+ii'\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r}+\frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r}+\frac{(c'-c_1')\cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Bei der Integration dieser Ausdrücke nach s und s' treten für den Fall, dass es sich um geschlossene Leiter und Ströme handelt, dieselben Vereinfachungen ein, welche schon in den vorigen Paragraphen bei anderen Ausdrücken zur Sprache gekommen sind, indem die Glieder, welche die Form von Differentialcoëfficienten nach s und s' haben, bei der betreffenden Integration, wenn der Leiter geschlossen ist, den Werth Null geben. Sind s und s' beide geschlossen, so bleiben nur die Integrale der Glieder übrig, welche Differentialcoëfficienten nach t enthalten. Führt man dann noch zur Abkürzung das Zeichen w ein mit der Bedeutung:

$$w=k\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds' \tag{26}$$

und bezeichnet die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der ponderomotorischen Kräfte mit dA_p, die der electromotorischen Kräfte mit dA_e und die aller Kräfte einfach mit dA, so lauten die Gleichungen:

$$dA_p = ii'\,dw \tag{27}$$
$$dA_e = -d(ii'w)-ii'\,dw \tag{28}$$
$$dA = -d(ii'w), \tag{29}$$

welche Gleichungen mit den in den beiden letzten Paragraphen des Abschnittes VIII. gegebenen übereinstimmen.

§. 6. Das electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander.

Bei der Aufstellung des neuen Grundgesetzes habe ich eine Grösse gebildet, welche ich das electrodynamische Potential zweier bewegter Electricitätstheilchen e und e' auf einander genannt und durch folgenden Ausdruck dargestellt habe:

$$k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

welchen man abgekürzt so schreiben kann:

$$k \frac{ee'}{r} \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt}.$$

Von dieser Grösse habe ich nachgewiesen, dass ihr negatives Differential die Arbeit darstellt, die während der Zeit dt von den Kräften, welche die Theilchen auf einander ausüben, geleistet wird.

Da nun bei geschlossenen Strömen dieselben Electricitätsmengen, welche einmal in ihnen sind, auch in ihnen bleiben, so kann man unter Anwendung des vorigen Ausdruckes auch das electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander bilden, und dieses Potential muss ebenfalls jener Bedingung genügen, dass die von allen Kräften, welche die Ströme auf einander ausüben, während der Zeit dt geleistete Arbeit durch das negative Differential des Potentials dargestellt wird.

Um das Potential auszudrücken, betrachten wir zunächst zwei Elemente, ds und ds', der beiden Ströme. In diesen sind die Electricitätsmengen hds, $-hds$, $h'ds'$ und $-h'ds'$ enthalten. Die Geschwindigkeiten dieser Electricitätsmengen sind in §. 2 näher bestimmt und die in die x-Richtung fallenden Componenten derselben werden dargestellt:

für die Menge	hds	durch	$\frac{\partial x}{\partial t} + c\,\frac{\partial x}{\partial s}$
„ „ „	$-hds$	„	$\frac{\partial x}{\partial t} - c_1\,\frac{\partial x}{\partial s}$
„ „ „	$h'ds'$	„	$\frac{\partial x'}{\partial t} + c'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}$
„ „ „	$-h'ds'$	„	$\frac{\partial x'}{\partial t} - c_1'\,\frac{\partial x'}{\partial s'}$

und entsprechende Ausdrücke gelten für die in die anderen Coordinatenrichtungen fallenden Geschwindigkeitscomponenten. Indem wir nun die vier Combinationen von je einer in ds und einer in ds' enthaltenen Electricitätsmenge bilden, können wir für jede dieser Combinationen das electrodynamische Potential der beiden Mengen auf einander ausdrücken. Diese Potentiale werden dargestellt

für $h\,ds$ u. $h'\,ds'$ durch $k\frac{hh'\,ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+c'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)$

„ $h\,ds$ „ $-h'\,ds'$ „ $-k\frac{hh'\,ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}+c\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}-c_1'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)$

„ $-h\,ds$ „ $h'\,ds'$ „ $-k\frac{hh'\,ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}-c_1\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+c'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)$

„ $-h\,ds$ „ $-h'\,ds'$ „ $k\frac{hh'\,ds\,ds'}{r}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial t}-c_1\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t}-c_1'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right).$

Die Summe dieser vier Ausdrücke, welche das Potential der beiden in dem einen Stromelemente enthaltenen Electricitätsmengen auf die beiden im anderen Stromelemente enthaltenen darstellt, ist einfach:

$$k\,\frac{hh'\,ds\,ds'}{r}\,(c+c_1)\,(c'+c_1')\sum\frac{\partial x}{\partial s}\,\frac{\partial x'}{\partial s'}$$

oder auch, wenn man die Producte $h\,(c+c_1)$ und $h'\,(c'+c_1')$, welche die Stromintensitäten bedeuten, durch i und i', und die angedeutete Summe durch $\cos\,(ss)$ ersetzt:

$$kii'\,\frac{\cos\,(ss')}{r}\,ds\,ds'.$$

Durch Integration dieses Ausdruckes über die beiden geschlossenen Stromcurven erhalten wir das Potential der beiden Ströme auf einander. Indem wir dieses mit W bezeichnen, gelangen wir zu der Gleichung:

$$W=kii'\int\int\frac{\cos\,(ss')}{r}\,ds\,ds', \tag{30}$$

welche sich unter Anwendung des durch (26) definirten Zeichens w noch kürzer so schreiben lässt:

$$W=ii'\,w. \tag{31}$$

In Abschnitt VIII., §. 6. wurde eine von Fr. Neumann eingeführte Grösse erwähnt, welche wir das magnetische Potential der Ströme auf einander nannten und mit Q bezeichneten, und welche durch folgenden Ausdruck dargestellt wird:

$$-\,kii'\int\int\frac{\cos\,(ss')}{r}\,ds\,ds'$$

oder unter Anwendung des Zeichens w durch:

$$-\,ii'\,w.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem für W gefundenen ergiebt sich, dass das von uns aus dem Grundgesetze abgeleitete electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander dem von Neumann eingeführten Potential dem absoluten Werthe nach gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist.

Betrachten wir nun endlich die am Schlusse der vorigen Paragraphen gegebenen Ausdrücke der während der Zeit dt gethanen Arbeit, so sehen wir, dass die Arbeit aller von geschlossenen Strömen auf einander ausgeübten Kräfte in der That durch das negative Differential ihres electrodynamischen Potentials dargestellt wird. Der für die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte allein gewonnene Ausdruck $ii'\,dw$ dagegen ist nur dann das negative Differential des magnetischen Potentials, wenn die Stromintensitäten constant sind, oder wenigstens ein constantes Product haben.

ABSCHNITT XI.

Discussionen über die mechanische Behandlung der Wärme und Electricität.

§. 1. Aus thermoelectrischen Erscheinungen entnommener Einwand von Tait.

Schon am Schlusse des ersten Bandes dieses Werkes ist davon die Rede gewesen, dass Hr. Tait sein Verfahren, meine Arbeiten über die mechanische Wärmetheorie, trotz ihrer von ihm selbst anerkannten Priorität, doch hinter den entsprechenden Arbeiten englischer Autoren zurückzusetzen, durch die Behauptung motivirt hat, der von mir aufgestellte Grundsatz, dass die Wärme nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, sei falsch. Auf eine Besprechung der zum Beweise seiner Behauptung angeführten, auf thermoelectrische Ströme bezüglichen Gründe konnte ich aber dort, wo von electrischen Erscheinungen noch nicht die Rede gewesen war, nicht eingehen, und ich behielt mir dieselbe daher für den zweiten Band vor. Diese Besprechung will ich nun hier folgen lassen, indem ich aus einer von mir veröffentlichten Erwiderung [1]) das Wesentlichste mittheile.

Von den beiden von ihm zur Widerlegung des Satzes angeführten Erscheinungen will ich zunächst diejenige besprechen, von welcher er sagt, dass sie einen ausgezeichneten Beweis für die Unrichtigkeit des Grundsatzes liefere. Es ist nämlich die Erscheinung, dass eine thermoelectrische Batterie, bei welcher der Siede-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 146, S. 308.

und Gefrierpunct des Wassers als Temperaturen der Löthstellen angewandt werden, im Stande ist, einen feinen Draht zum Glühen zu bringen.

Um die völlige Grundlosigkeit dieses Einwandes nachzuweisen, brauche ich nur an dasjenige zu erinnern, was ich schon im Jahre 1853 in meiner Abhändlung über thermoelectrische Erscheinungen [1]) auseinandergesetzt habe, und was man im siebenten Abschnitte dieses Bandes wiedergegeben findet. Ich habe dort gezeigt, dass ein thermoelectrisches Element (und natürlich ebenso eine thermoelectrische Batterie) sich mit einer Dampfmaschine vergleichen lässt, indem die erwärmte Löthstelle dem Kessel und die kalte Löthstelle dem Condensator entspricht. An der warmen Löthstelle wird einem Wärmereservoir, dessen Temperatur wir t_1 nennen wollen, Wärme entzogen, und an der kalten Löthstelle wird an ein anderes Wärmereservoir, dessen Temperatur t_0 heissen möge, Wärme abgegeben. Die abgegebene Wärmemenge ist aber etwas geringer, als die aufgenommene, und wir wollen daher die abgegebene Wärmemenge für die Zeiteinheit mit Q und die aufgenommene mit $Q + q$ bezeichnen. Der eine Theil q der letzteren Wärmemenge wird zu der für die Erzeugung des electrischen Stromes nöthigen Arbeit verbraucht, und der andere Theil Q geht aus einem Körper von der Temperatur t_1 in einen anderen von der Temperatur t_0 über.

Wenn man die Arbeit, welche von einer Dampfmaschine geleistet wird, dazu verwendet, um Reibungswiderstände oder sonstige passive Widerstände zu überwinden, so verwandelt sie sich dabei wieder in Wärme und kann unter geeigneten Umständen eine Temperatur erzeugen, die weit über der des Dampfkessels liegt. Ebenso kann bei der thermoelectrischen Batterie die Arbeit, welche geleistet werden musste, um die Electricität in Bewegung zu setzen, sich bei der Ueberwindung von Leitungswiderständen wieder in Wärme verwandeln, und kann auch hier unter geeigneten Umständen eine Temperatur erzeugen, die viel höher ist, als diejenige der erwärmten Löthstellen. Es kann z. B., wie Hr. Tait anführt, wenn die erwärmten Löthstellen nur die Temperatur des siedenden Wassers haben, ein Draht bis zum Glühen erhitzt werden.

Bezeichnen wir die Temperatur, welche der Draht annimmt, und welche dann beliebig lange constant erhalten werden kann,

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 90, S. 513.

mit t_2, so können wir sagen: ein Theil derjenigen Wärmemenge q, welche in der Batterie zu Arbeit verbraucht wird, kommt in einem anderen Körper von der Temperatur t_2 wieder als Wärme zum Vorschein. Da nun jene zu Arbeit verbrauchte Wärme aus einem Wärmereservoir von der Temperatur t_1 herstammt, so erhalten wir als ein Resultat des Processes den Uebergang einer gewissen Wärmemenge aus einem Körper von der Temperatur t_1 in einen Körper von der höheren Temperatur t_2.

Die Frage, um deren Entscheidung es sich handelt, ist nun die, ob dieser Wärmeübergang von niederer zu höherer Temperatur von selbst stattgefunden hat.

Unter der kurzen Bezeichnung von selbst verstehe ich, wie ich es vielfach erläutert habe, ohne gleichzeitiges Eintreten einer anderen als Compensation dienenden Veränderung. Sofern wir es mit Kreisprocessen zu thun haben, giebt es zwei Arten von Veränderungen, welche als Compensation dienen können, nämlich erstens den Uebergang von Wärme aus einem wärmeren in einen kälteren Körper, und zweitens den Verbrauch von Arbeit oder, bestimmter ausgedrückt, die Verwandelung von Arbeit in Wärme.

Betrachten wir nun unter diesem Gesichtspuncte unsere thermoelectrische Batterie mit dem dünnen Leitungsdrahte, welcher zum Glühen gebracht wird, so sehen wir, dass zwar die Wärmemenge q zum Theil von der Temperatur t_1 zur höheren Temperatur t_2 übergeht, dass aber gleichzeitig die andere Wärmemenge Q von der Temperatur t_1 zur niederen Temperatur t_0 übergeht. Dieser letztere Wärmeübergang bildet die Compensation des ersteren, und wir dürfen daher nicht sagen, der erstere Wärmeübergang habe von selbst stattgefunden.

Der hier besprochene Fall ist so einfach und klar, dass man ihn als ein ganz geeignetes Beispiel zur Erläuterung und Bestätigung meines Grundsatzes wählen könnte, und gerade diesen Fall hat Hr. Tait zum Beweise seiner Unrichtigkeit ausgewählt.

Als anderen Fall, welcher meinem Grundsatze widersprechen soll, führt Hr. Tait eine thermoelectrische Kette an, in welcher die heisse Löthstelle eine Temperatur hat, die höher ist, als der neutrale Punct. Es handelt sich also um eine solche thermoelectrische Kette, bei welcher durch gesteigerte Erwärmung der einen Löthstelle der Strom nicht fortwährend verstärkt wird, sondern wo der Strom von einer gewissen Temperatur an wieder ab-

nimmt und bei noch weiterer Steigerung der Temperatur sogar seine Richtung ändern kann.

Diese Erscheinung habe ich ebenfalls in meiner oben citirten Abhandlung schon besprochen. Ich habe sie durch die Annahme zu erklären gesucht, dass in einem der beiden Metalle, aus denen eine solche Kette besteht (oder auch in allen beiden), durch die Temperaturveränderung eine Aenderung des Molecularzustandes veranlasst wird, welche bewirkt, dass der veränderte Theil des Metalles sich zum unveränderten Theile in electrischer Beziehung so verhält, wie zwei verschiedene Metalle. Sobald eine Aenderung dieser Art eingetreten ist, wirken nicht nur an den Berührungsstellen verschiedener Metalle, sondern auch da, wo verschieden beschaffene Theile desselben Metalles sich berühren, electromotorische Kräfte. Demnach wird nicht bloss an den Löthstellen, sondern auch an anderen Stellen, welche sich im Inneren der einzelnen Metalle befinden, Wärme erzeugt oder verbraucht, und wir müssen daher, um alle vorkommenden Wärmeübergänge zu bestimmen, nicht bloss die Temperaturen der Löthstellen, sondern auch die Temperaturen jener anderen Stellen berücksichtigen.

Dadurch wird natürlich die Sache complicirter. Auch haben wir von den erwähnten Veränderungen, obwohl ihr Vorhandensein in einzelnen Fällen schon nachgewiesen ist, doch noch zu wenig specielle Kenntnisse, um alle in einer solchen Thermokette stattfindenden Vorgänge ins Einzelne verfolgen zu können. Indessen wird man nicht in Abrede stellen, dass in der von mir gemachten Annahme wenigstens die Möglichkeit einer Erklärung der betreffenden Erscheinungen liegt, und aus der am Ende des siebenten Abschnittes mitgetheilten Entwickelung von Budde kann man ersehen, wie sich diese Erklärung ganz in Uebereinstimmung mit meinem Grundsatze durchführen lässt. Es kann also auch aus diesen Erscheinungen kein Einwand gegen meinen Grundsatz entnommen werden.

§. 2. Einwand von F. Kohlrausch.

In einem interessanten Aufsatze über Thermoelectricität, Wärme- und Electricitätsleitung von F. Kohlrausch[1]) ist ein Einwand gegen die von mir aufgestellte Theorie der thermoelectri-

---

[1]) Göttinger Nachrichten Febr. 1874 und Pogg. Ann. Bd. 156, S. 601.

schen Ströme erhoben, welcher sich auf einen in der mechanischen Wärmetheorie scheinbar hervortretenden Widerspruch stützt, und daher einer näheren Beleuchtung bedarf. Da die Stelle, welche den Einwand enthält, nur kurz ist, so wird es am besten sein, sie hier wörtlich anzuführen.

Nachdem Kohlrausch gesagt hat, die mechanische Wärmetheorie nehme bei der Bestimmung der von der Wärme geleisteten Arbeit auf die durch Leitung ausgeglichene Wärme keine Rücksicht, und wer dieses Verfahren unter allen Umständen als erlaubt ansehe, werde daraus gegen seine Hypothese, dass ein Wärmestrom Arbeit leisten könne, einen erheblichen Einwand ableiten, fährt er fort:

„Nun liegt aber im Gebiete der Electricität ein anderer Fall vor, der nach meiner Ansicht mit den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie, oder mit anderen Worten, mit dem Clausius'schen Satze, dass die Wärme nicht von selbst aus niederer zu höherer Temperatur übergeht, nicht anders in Uebereinstimmung gebracht werden kann, als wenn man der Wärmeleitung eine wesentliche Rolle bei dem Vorgang zuschreibt. In seiner Polemik gegen Clausius hatte Tait den genannten Grundsatz als unrichtig hingestellt, weil man mittelst einer Thermosäule von geringer Temperatur einen Draht zum Glühen bringen könne. Clausius widerlegt diesen Einwand leicht, indem ja die Temperaturerhöhung der in dem Drahte entwickelten Wärme nach Peltier begleitet ist von einem Uebergang einer anderen Wärmemenge von der warmen zur kalten Löthstelle der Thermosäule (Pogg. Ann. Bd. CXLVI, S. 310). Bei dieser Widerlegung wird indessen offenbar vorausgesetzt, was ja auch in Wirklichkeit immer zutrifft, dass die in dem erhitzten Drahte entwickelte Temperatur eine Grenze hat. Könnte man diese Temperatur beliebig steigern, so würde durch den Uebergang einer endlichen Wärmemenge in der Thermosäule zu einer um eine endliche Grösse niedrigeren Temperatur eine andere endliche Wärmemenge zu beliebig hoher Temperatur erhoben werden können."

Die im letzten Satze erwähnte Erhebung einer endlichen Wärmemenge zu beliebig hoher Temperatur ist es, in welcher Kohlrausch einen in meiner Theorie liegenden Widerspruch erblickt, und durch welchen er bewogen wird, auch die Wärmeleitung in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen. Ich glaube aber nachweisen zu können, dass bei einer, wenn auch bisher nicht

bestimmt ausgesprochenen, so doch ganz im Geiste der mechanischen Wärmetheorie liegenden Auffassung der Sache dieser Widerspruch, auch ohne die Hinzuziehung der Wärmeleitung, verschwindet.

Um die Natur des betreffenden Vorganges, welchen Kohlrausch für die Thermosäule hervorgehoben hat, besser beurtheilen zu können, wird es zweckmässig sein, zu zeigen, dass er auch bei anderen thermodynamischen Maschinen, z. B. bei der Dampfmaschine, vorkommen kann. Bei dieser nimmt der die Wirkung der Wärme vermittelnde Stoff (das Wasser) im Kessel, dessen absolute Temperatur T_1 heissen möge, Wärme auf, und im Condensator, dessen absolute Temperatur wir T_0 nennen wollen, giebt er wieder Wärme ab. Die abgegebene Wärmemenge ist aber geringer als die aufgenommene, und den Ueberschuss der letzteren können wir, wenn wir von den durch die Unvollkommenheiten der Maschinen bedingten Verlusten absehen, als in Arbeit verwandelt betrachten. Bezeichnen wir also die während der Zeiteinheit im Kessel aufgenommene Wärmemenge mit $Q + q$, und die im Condensator abgegebene mit Q, so ist q die in Arbeit verwandelte Wärmemenge, während Q die von der Temperatur T_1 zur Temperatur T_0 übergehende Wärmemenge ist.

Wenn nun die von der Maschine geleistete Arbeit dazu verwandt wird, einen Reibungswiderstand zu überwinden, so verwandelt sie sich dabei wieder in Wärme, und es kommt somit jene Wärmemenge q, welche zu der Arbeit verbraucht wurde, in den sich reibenden Körpern, deren absolute Temperatur T_2 sein möge, wieder als Wärme zum Vorschein. Man kann also sagen, diese Wärmemenge sei von der Temperatur T_1, bei welcher sie von der Maschine aufgenommen wurde, zur Temperatur T_2 übergeführt. Da nun die Temperatur T_2 der sich reibenden Körper beliebig hoch sein kann, so gelangen wir auch hier zu jenem Resultate dass durch den Uebergang einer endlichen Wärmemenge (Q) zu einer um eine endliche Grösse niedrigeren Temperatur (von T_1 zu T_0) eine andere endliche Wärmemenge (q) zu einer beliebig hohen Temperatur (T_2) erhoben werden kann.

Um nun zunächst zu sehen, in welcher Weise die Temperatur T_2 in den Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie vorkommt, haben wir den für den Aequivalenzwerth des Ueberganges der Wärmemenge q von der Temperatur T_1 zur Temperatur T_2 geltenden Ausdruck zu bilden, nämlich:

$$q\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right).$$

Dieser Ausdruck stellt, wenn $T_2 > T_1$, eine negative Grösse dar, deren absoluter Werth mit wachsender Temperatur T_2 zunimmt; aber diese Zunahme findet nicht etwa bis ins Unbegrenzte statt, sondern der Ausdruck nähert sich bei fortwährendem Wachsen von T_2 nur dem bestimmten endlichen Werthe

$$-\frac{q}{T_1},$$

welcher der Aequivalenzwerth der Verwandlung der Wärmemenge q von der Temperatur T_1 in Arbeit ist. Dieses Verhalten der Formeln ist ganz mit jenem Umstand in Uebereinstimmung, dass eine einmal in Arbeit verwandelte Wärmemenge auch wieder in Wärme von beliebig hoher Temperatur verwandelt werden kann.

Wenn nun aber hierbei von beliebig hoher Temperatur die Rede ist, so darf darunter doch nicht eine im streng mathematischen Sinne unendlich hohe Temperatur verstanden werden, sondern es ist in dieser Beziehung durch die Natur der Sache selbst, ohne dass man die Wärmeleitung dabei zu Hülfe zu nehmen braucht, eine gewisse Grenze gegeben.

Um dieses zu erkennen und von der Art der Grössen, um welche es sich dabei handelt, einen ungefähren Begriff zu bekommen, wollen wir uns denken, die von der Maschine geleistete Arbeit werde zunächst dazu angewandt, einen Körper von gegebener Masse, z. B. eine Masseneinheit, in Bewegung zu setzen, und diese Massenbewegung sei es nun, welche in Wärme verwandelt werden solle. Dann haben wir es nur noch mit der Verwandlung einer Art von Bewegung in eine andere Art von Bewegung zu thun, wodurch der Schluss über die Höhe der erreichbaren Temperatur erleichtert wird.

Wenn man unter der absoluten Temperatur eines Körpers die mittlere lebendige Kraft der einzelnen bei der als Wärme bezeichneten Bewegung sich selbständig bewegenden Körpertheilchen, nämlich der Atome, versteht, so kann man den Satz, dass ein Körper einen anderen nicht zu einer höheren Temperatur, als er selbst hat, erwärmen kann, so ausdrücken: Die Atome des einen Körpers können den Atomen des anderen keine Bewegungen mittheilen, deren lebendige Kräfte im Mittel grösser sind, als ihre eigenen. Wenden wir diesen Satz nun auch auf den Fall an, wo

eine sich im Ganzen bewegende Masseneinheit die Atome eines Körpers in schnellere Bewegung versetzen und dadurch Wärme erzeugen soll, so können wir sagen, dass die höchste dadurch erreichbare Temperatur diejenige sein würde, bei welcher ein einzelnes Atom eine eben so grosse lebendige Kraft hätte, wie die ganze bewegte Masseneinheit. Hierdurch gelangen wir zu einem ganz ausserordentlich grossen aber nicht gerade zu einem unendlich grossen Werthe, ähnlich wie die Masse eines Atoms gegen eine Masseneinheit ganz ausserordentlich klein, aber nicht gerade unendlich klein ist.

Natürlich soll diese Betrachtung nicht dazu dienen, uns einen bestimmten ein für allemal geltenden Werth als Grenze der erreichbaren Temperaturen zu geben, da ja mit der Grösse der Arbeit auch die lebendige Kraft der Massenbewegung, welche an ihre Stelle gesetzt werden kann, verschieden ist, aber sie giebt wenigstens eine Vorstellung von der Ordnung der betreffenden Grössen.

In den Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie ist die hier besprochene Beschränkung in Bezug auf die erreichbaren Temperaturen nicht ausgedrückt. In diesen Gleichungen kommen nämlich, wie wir es in den oben betrachteten Aequivalenzwerthen gesehen haben, die reciproken Werthe der Temperaturen vor, und dabei sind die reciproken Werthe jener hohen Grenztemperaturen ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt. Darin liegt nun freilich eine Ungenauigkeit, indessen wird man bei der enormen Höhe jener Grenztemperaturen gewiss zugestehen, dass dieses nur eine solche Ungenauigkeit ist, wie sie fast jeder physikalischen Gleichung anhaftet, indem es nur wenige physikalische Gleichungen giebt, die in der Form, in welcher man sie bei den wirklich vorkommenden Processen anwendet, auch in aller Strenge bis ins Unendliche anwendbar sind.

Ich habe mich übrigens schon lange, bevor ich die hier mitgetheilten und zuerst in Pogg. Ann. Bd. 160 veröffentlichten Bemerkungen zu dem Einwande von Kohlrausch schrieb, bei einer anderen Gelegenheit in ähnlicher Weise ausgesprochen. In einer im Jahre 1865 veröffentlichten Abhandlung [1]) ist bei Besprechung

---

[1]) Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, Pogg. Ann. Bd. 125, S. 353, und Abhandlungensammlung Bd. II, S. 1.

des von mir eingeführten Begriffes des Verwandlungswerthes der Wärme davon die Rede, wie man den Verwandlungswerth einer solchen Bewegung, die von einer grösseren ponderablen Masse im Ganzen ausgeführt wird, zu bestimmen hat. Dieser Verwandlungswerth wird in den Formeln der mechanischen Wärmetheorie seiner Kleinheit wegen vernachlässigt; ich habe aber nicht gesagt, dass er Null sei, sondern habe mich folgendermaassen ausgesprochen[1]): „Wenn eine Masse, welche so gross ist, dass ein Atom dagegen als verschwindend klein betrachtet werden kann, sich als Ganzes bewegt, so ist der Verwandlungswerth dieser Bewegung gegen ihre lebendige Kraft gleichermaassen als verschwindend klein anzusehen.“ Hierin ist also nicht nur darauf hingewiesen, dass die betreffende Grösse nicht im streng mathematischen Sinne unendlich klein ist, sondern es ist auch die Ordnung ihrer Kleinheit durch den damit in Zusammenhang gebrachten Vergleich zwischen der Masse eines Atomes und der ganzen Masse, um deren Bewegung es sich handelt, bestimmt festgestellt.

§. 3. Anderer Einwand von Tait.

In einem vor Kurzem erschienenen Buche des Hrn. Tait *„Lectures on some recent advances in Physical Science, second edition, London 1876“* wird auf *p. 119* ein neuer Gegengrund gegen meinen Satz geltend gemacht, welchen ich mir erlauben will, ebenfalls hier zu besprechen.

Hr. Tait führt eine von Maxwell angestellte Betrachtung an, welche sich darauf bezieht, wie man es sich etwa als möglich vorstellen könne, dass Wärme ohne einen gleichzeitigen Verbrauch von Arbeit aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen könne. Maxwell geht von der kinetischen Gastheorie aus, in welcher angenommen wird, dass in einer Gasmasse selbst dann, wenn keine Strömungen in ihr stattfinden und ihre Temperatur durchweg gleich ist, die Molecüle ungleiche Geschwindigkeiten haben, und seine Betrachtung besteht nach Tait in Folgendem: Er setzt den Fall, dass solche imaginäre Wesen, welche Thomson vorläufig Dämonen nennt — kleine Geschöpfe ohne Beharrungs-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 125, S. 399, und Abhandlungensammlung Bd. II, S. 43.

vermögen, von ausserordentlicher Sinnenschärfe und Intelligenz und wunderbarer Beweglichkeit — (*such imaginary beings, whom Sir W. Thomson provisionally calls demons — small creatures without inertia, of extremely acute senses and intelligence, and marvellous agility* —) die Partikelchen eines Gases überwachten, welches sich in einem Gefässe befände, worin eine Scheidewand wäre, die sehr viele, ebenfalls von Beharrungsvermögen freie Klappen hätte, und dass diese Dämonen die Klappen in geeigneten Momenten öffneten und schlössen, und zwar so, dass sie die schnelleren Partikelchen aus der ersten Abtheilung des Gefässes in die zweite und eine ebenso grosse Anzahl langsamerer Partikelchen aus der zweiten Abtheilung in die erste liessen. Wenn dieser Fall stattfände, so würde natürlich das Gas in der zweiten Abtheilung allmählich immer wärmer und das in der ersten immer kälter werden, und somit Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen.

Hr. Maxwell hat diesen von ihm ersonnenen imaginären Vorgang nur dazu angewandt [1]), die Verschiedenheit der Rechnungsmethode, welche bei der Behandlung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie anzuwenden ist, und welche er die statistische Methode nennt, von der eigentlich dynamischen Methode zu veranschaulichen. Hr. Tait dagegen nimmt keinen Anstand, diesen Vorgang einfach als Gegenbeweis gegen meinen Satz geltend zu machen, indem er sagt, dieser Vorgang, für sich allein, sei absolut verhängnissvoll für meine Schlussweise (*which, alone, is absolutely fatal to Clausius' reasoning*).

Dieses kann ich in keiner Weise zugeben. Wenn die Wärme als eine Molecularbewegung betrachtet wird, so ist dabei zu bedenken, dass die Molecüle so kleine Körpertheilchen sind, dass es für uns unmöglich ist, sie einzeln wahrzunehmen. Wir können daher nicht auf einzelne Molecüle für sich allein wirken, oder die Wirkungen einzelner Molecüle für sich allein erhalten, sondern haben es bei jeder Wirkung, welche wir auf einen Körper ausüben oder von ihm erhalten, gleichzeitig mit einer ungeheuer grossen Menge von Molecülen zu thun, welche sich nach allen möglichen Richtungen und mit allen überhaupt bei den Molecülen vorkommenden Geschwindigkeiten bewegen, und sich an der Wirkung in der Weise gleichmässig betheiligen, dass nur zufällige

[1]) *Theory of Heat, London 1871, p. 308.*

Verschiedenheiten vorkommen, die den allgemeinen Gesetzen der Wahrscheinlichkeit unterworfen sind. Dieser Umstand bildet gerade die charakteristische Eigenthümlichkeit derjenigen Bewegung, welche wir Wärme nennen, und auf ihm beruhen die Gesetze, welche das Verhalten der Wärme von dem anderer Bewegungen unterscheiden.

Wenn nun Dämonen eingreifen, und diese charakteristische Eigenthümlichkeit zerstören, indem sie unter den Molecülen einen Unterschied machen, und Molecülen von gewissen Geschwindigkeiten den Durchgang durch eine Scheidewand gestatten, Molecülen von anderen Geschwindigkeiten dagegen den Durchgang verwehren, so darf man das, was unter diesen Umständen geschieht, nicht mehr als eine Wirkung der Wärme ansehen und erwarten, dass es mit den für die Wirkungen der Wärme geltenden Gesetzen übereinstimmt.

Ich glaube daher meine Erwiderung auf den Einwand des Hrn. Tait in die kurze Bemerkung zusammenfassen zu können, dass mein Satz sich nicht darauf bezieht, was die Wärme mit Hülfe von Dämonen thun kann, sondern darauf, was sie für sich allein thun kann.

Nachdem ich die vorstehend mitgetheilten Gegenbemerkungen gegen den Tait'schen Einwand in Wied. Annalen veröffentlicht hatte, hat Hr. Tait in einer neueren Schrift [1]) seinen Einwand durch den Ausspruch wenigstens theilweise aufrecht zu erhalten gesucht, dass das, was Dämonen im grossen Maassstabe thun können, in der Wirklichkeit ohne Hülfe von Dämonen, wenn auch in einem sehr kleinen Maassstabe, in jeder Gasmasse vor sich gehe, [*that what demons could do on a large scale, really goes on without the help of demons* (*though in a very small scale*) *in every mass of gas*].

Hiermit ist, wenn ich es recht verstehe, Folgendes gemeint. Wenn zwei Gasmassen A und B in Berührung sind, so fliegen fortwährend Molecüle von A nach B und umgekehrt von B nach A. Haben die beiden Gasmassen gleiche Temperaturen, so haben auch die von A nach B fliegenden Molecüle durchschnittlich dieselbe lebendige Kraft, wie die von B nach A fliegenden. Da aber die Geschwindigkeiten der einzelnen Molecüle verschieden sind, so können in einzelnen Momenten Abweichungen von

---

[1]) *Sketch of Thermodynamics, second edition, Edinburgh 1877*, in der Vorrede S. XVIII.

dem durchschnittlichen Verhalten stattfinden, und es kann z. B. vorkommen, dass in einem gewissen Momente zufällig unter den von A nach B fliegenden Molecülen diejenigen mit grösseren Geschwindigkeiten und unter den von B nach A fliegenden diejenigen mit kleineren Geschwindigkeiten vorwiegen. Dadurch steigt für einen Augenblick die Temperatur in B und sinkt die Temperatur in A, und es geht also momentan etwas Wärme aus der dadurch kälter werdenden Gasmasse in die wärmer werdende über. Dieses soll nach Hrn. Tait mit meinem Grundsatze im Widerspruche stehen.

Hiergegen brauche ich wieder nur zu sagen, dass es sich im zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und ebenso in meinem Grundsatze gar nicht darum handelt, was in einzelnen Momenten zufällig bald in einem, bald im entgegengesetzten Sinne geschehen kann, sondern darum, was durchschnittlich nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit geschieht. Der Ueberschuss von lebendiger Kraft, welcher durch eine in einem gewissen Momente stattfindende zufällige Abweichung vom durchschnittlichen Verhalten vom kälteren zum wärmeren Gase übergehen kann, ist im Vergleiche zu den für uns messbaren Wärmemengen eine Grösse von derselben Ordnung, wie die Masse eines einzelnen Molecüls im Vergleiche zu den unserer directen Wahrnehmung zugänglichen Massen. Grössen dieser Ordnung werden aber, wie schon im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, bei den Betrachtungen, welche sich auf den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie beziehen, vernachlässigt.

§. 4. Einwand von Tolver Preston.

Hr. Tolver Preston hat in *Nature, Vol. XXVII, p. 202* (Januar 1878) ein Verfahren angegeben, mittelst dessen man durch Diffusion von Gasen mechanische Arbeit gewinnen kann. Die von ihm angestellten Betrachtungen sind sehr sinnreich und in theoretischer Beziehung durch die Schlüsse, zu welchen sie Gelegenheit geben, interessant. Nur in einem Puncte glaube ich eine abweichende Ansicht äussern zu müssen. Hr. Preston meint nämlich, dass das Resultat seines Verfahrens dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie widerspreche, und hiermit kann ich nicht übereinstimmen.

Das Wesentliche seines Verfahrens ist Folgendes. Er denkt sich einen Cylinder, welcher durch einen beweglichen Stempel in zwei Abtheilungen getheilt wird. Der Stempel soll aus einem porösen Stoffe, wie etwa Pfeifenthon oder Graphit, bestehen. In den beiden Abtheilungen des Cylinders sollen sich zwei verschiedene Gase befinden, z. B. Sauerstoff und Wasserstoff.

Wenn nun beide Gase anfangs gleichen Druck haben, so tritt darin durch die Diffusion bald eine Aenderung ein. Der Wasserstoff dringt durch den porösen Stempel schneller hindurch, als der Sauerstoff und es nimmt daher die vorhandene Gasmenge an der Wasserstoffseite ab und an der Sauerstoffseite zu. Dadurch entsteht eine Druckverminderung an der Wasserstoffseite und eine Druckvermehrung an der Sauerstoffseite, so dass der Stempel mit einer gewissen Kraft in Bewegung gesetzt und eine mechanische Arbeit geleistet werden kann, welche sich äusserlich nutzbar machen lässt. Zugleich wird bei der Bewegung des Stempels das Gas an der Seite, wo es sich ausdehnt, kälter und an der Seite, wo es zusammengedrückt wird, wärmer, und es geht somit Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper über.

Diese beiden Umstände nun, dass in dem Processe ohne eine ursprünglich vorhandene Temperaturdifferenz Arbeit aus Wärme gewonnen wird, und dass dabei noch Wärme aus der kälteren Abtheilung in die wärmere übergeht, betrachtet Tolver Preston als dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie widersprechend.

Diesem Schlusse kann ich nicht zustimmen. Wenn die Verwandlung von Wärme in Arbeit und der Wärmeübergang aus dem kälteren in den wärmeren Körper so stattfände, dass dabei der veränderliche Stoff am Schlusse der Operation sich wieder in seinem ursprünglichen Zustande befände, und dass man es daher mit einem Kreisprocesse zu thun hätte, so würde darin allerdings ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie liegen. So verhält sich die Sache aber nicht. Als veränderlichen Stoff haben wir in dem Processe die beiden Gase. Diese sind am Anfange ungemischt und am Schlusse gemischt, und es ist also eine wesentliche Aenderung mit ihnen eingetreten, welche als Compensation der Verwandlung aus Wärme in Arbeit und des Wärmeüberganges aus einem kälteren in einen wärmeren Körper betrachtet werden kann.

Da die Gase durch die Molecularbewegung, welche wir Wärme nennen, sich zu mischen suchen, und zwar in der Weise, dass die Mischung um so schneller erfolgt, je höher die Temperatur ist, so haben wir es hier mit einer Wirkung der Wärme zu thun, welche der Ausdehnung eines Gases durch die Wärme zu vergleichen ist. Wir müssen daher, wenn wir hier schon einen von mir eingeführten Begriff, der erst im nächsten Bande näher besprochen werden wird, in Anwendung bringen wollen, den gemischten Gasen eine grössere Disgregation zuschreiben, als den ungemischten. Da nun die Vermehrung der Disgregation eine positive Verwandlung ist, so kann sie die Verwandlung aus Wärme in Arbeit und den Uebergang von Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper, welche beide negative Verwandlungen sind, compensiren.

Man sieht also, dass der vorliegende Fall zwar gewisse Eigenthümlichkeiten hat, durch welche er sich äusserlich von anderen Fällen unterscheidet, dass er aber in den wesentlichen Puncten, um welche es sich in der mechanischen Wärmetheorie handelt, ganz mit den gewöhnlich betrachteten Fällen übereinstimmt, und nichts enthält, was mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie im Widerspruche stände.

§. 5. Arbeitsverlust in nicht-umkehrbaren Kreisprocessen.

In meiner Abhandlung über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie [1]) habe ich eine Grösse eingeführt, welche ich die uncompensirte Verwandlung genannt und mit N bezeichnet habe, und zu deren Bestimmung, so weit es sich um Kreisprocesse handelt, ich folgende Gleichung aufgestellt habe:

$$N = -\int \frac{dQ}{T}, \tag{1}$$

worin dQ ein Element der dem veränderlichen Körper während des Kreisprocesses mitgetheilten Wärme bedeutet (wobei eine entzogene Wärmemenge als eine mitgetheilte negative Wärmemenge ge-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 93, 1854; Abhandlungensammlung Bd. I, Abhandlung IV; in der zweiten Auflage Abschnitt V.

rechnet wird), und T die absolute Temperatur des Körpers im Momente der Mittheilung ist. Wenn der Kreisprocess umkehrbar ist, so hat man $N = 0$; wenn dagegen in dem Kreisprocesse Veränderungen vorkommen, die nicht umkehrbar sind, so hat N einen angebbaren Werth, welcher aber immer nur positiv sein kann.

Für den in einer thermodynamischen Maschine stattfindenden Kreisprocess ist es nun am vortheilhaftesten, wenn nur umkehrbare Veränderungen in ihm vorkommen, indem jede in nicht umkehrbarer Weise vor sich gehende Veränderung einen Verlust von Arbeit zur Folge hat. Auf diesen Umstand habe ich ein eigenthümliches Verfahren gegründet, die Arbeit einer thermodynamischen Maschine zu bestimmen. Wir wollen annehmen, für den Kreisprocess, welcher in der thermodynamischen Maschine stattfindet, seien sonst alle dem veränderlichen Körper mitgetheilten Wärmemengen und die Temperaturen, welche der Körper bei der Mittheilung hat, gegeben, nur Eine Temperatur T_0 (in der Dampfmaschine etwa die Temperatur des Condensators) komme vor, bei welcher der Körper noch eine positive oder negative Wärmemenge aufnehme, deren Werth unbekannt sei. Wenn wir dann das Arbeitsmaximum, welches man unter diesen Umständen aus den gegebenen Wärmemengen möglicherweise gewinnen könnte, mit $W_{max.}$, und die Arbeit, welche man wirklich gewinnt, mit W bezeichnen, so gilt folgende Gleichung, in welcher E das mechanische Aequivalent der Wärme bedeutet [1]):

$$W = W_{max.} - E T_0 N. \tag{2}$$

Bei Anwendung dieser Gleichung wird die Arbeit der Maschine nicht so bestimmt, dass man die in den verschiedenen nach einander stattfindenden Vorgängen geleisteten Arbeitsgrössen einzeln bestimmt und dann addirt, sondern so, dass man zuerst das Arbeitsmaximum bestimmt, welches man erhalten würde, wenn alle stattfindenden Vorgänge umkehrbar wären, und davon dann den durch Unvollkommenheiten des Kreisprocesses entstehenden Ar-

---

[1]) Abhandlung über die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine, Pogg. Ann. Bd. 97, S. 452; Abhandlungensammlung Bd. I, S. 166; zweite Auflage Bd. I, S. 298. Dabei ist zu bemerken, dass an den beiden ersten Stellen statt des Zeichens E der Bruch $\frac{1}{A}$ angewandt ist, und an der letzten Stelle die Wärme als nach mechanischem Maasse gemessen angenommen und daher $E = 1$ gesetzt ist.

beitsverlust abzieht. Ich habe daher dieses Verfahren, die Arbeit zu bestimmen, das Subtractionsverfahren genannt. Der Arbeitsverlust ist:

$$(3) \qquad E T_0 N = - E T_0 \int \frac{dQ}{T}$$

und die entsprechende Wärmemenge wird dargestellt durch

$$(4) \qquad T_0 N = - T_0 \int \frac{dQ}{T}.$$

In dem von Tait veröffentlichten Buche „*Sketch of Thermodynamics*" kommt nun eine äusserlich ähnliche, aber in unrichtiger Weise ausgeführte Entwickelung vor, deren Resultat einer näheren Besprechung bedarf. Um Missverständnisse unmöglich zu machen, will ich das Resultat wörtlich im englischen Texte mittheilen, wobei ich nur, der leichteren Vergleichung wegen, in der Bezeichnung die kleine Aenderung machen will, dass ich für die kleinen Buchstaben t und q, welche Tait zur Bezeichnung der Temperatur und der Wärmemenge anwendet, die grossen Buchstaben T und Q setze, und statt des Buchstaben J, welchen Tait für das mechanische Aequivalent der Wärme anwendet, den von uns dafür angewandten Buchstaben E setze. Tait nennt die gewonnene mechanische Arbeit „*the practical value*" und spricht das Resultat seiner kurzen Entwickelung so aus[1]: *Hence in any cyclical process whatever, if Q_1 be the whole heat taken in, and Q_0 that given out, the practical value is*

$$E(Q_1 - Q_0) - E T_0 \int \frac{dQ}{T}.$$

Die Unrichtigkeit dieses Resultates lässt sich leicht aus dem blossen Anblicke der Formel erkennen. Wie auch der Kreisprocess beschaffen sein mag, ob umkehrbar oder nicht umkehrbar, immer ist der Ueberschuss der aufgenommenen Wärme über die abgegebene Wärme die in Arbeit verwandelte Wärme. Die durch den Kreisprocess gewonnene Arbeit wird also ein- für allemal durch $E(Q_1 - Q_0)$ dargestellt. Der Tait'sche Ausdruck kann somit nur für umkehrbare Kreisprocesse, bei welchen das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ gleich Null ist, und daher das letzte Glied des Ausdruckes fortfällt, richtig sein; für nicht umkehrbare Kreisprocesse dagegen,

[1]) *Sketch of Thermodynamics*, erste Auflage S. 99, zweite Auflage S. 121.

bei welchen das letzte Glied nicht Null ist, muss er unrichtige Arbeitswerthe geben. Das Letztere wird durch einen besonderen Umstand noch recht augenfällig. Das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ kann nämlich, wenn es nicht Null ist, immer nur negative Werthe haben. Daraus folgt, dass das letzte, äusserlich mit dem Minuszeichen versehene Glied des Tait'schen Ausdruckes positiv sein muss, und dass somit der Tait'sche Ausdruck für nicht-umkehrbare Kreisprocesse grössere Arbeitswerthe giebt, als für umkehrbare, was mit den Principien der mechanischen Wärmetheorie unvereinbar ist.

Hr. Tait selbst äussert sich freilich ganz anders über die Sache, indem er fortfährt:

Now, if the cycle be reversible, the practical value is

$$E(Q_1 - Q_0)$$

by the first law; so that, in this particular case,

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

But in general this integral has a finite positive value, because in non-reversible cycles the practical value of the heat is always less than

$$E(Q_1 - Q_0).$$

Hier ist also in bestimmten Worten ausgesprochen, dass der practische Werth der mitgetheilten Wärme, d. h. die gewonnene Arbeit, nur für umkehrbare Kreisprocesse gleich $E(Q_1 - Q_0)$, für nicht-umkehrbare dagegen von $E(Q_1 - Q_0)$ verschieden sei, was mit dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, welcher für umkehrbare und nicht-umkehrbare Kreisprocesse in ganz gleicher Weise gilt, im Widerspruche steht. Da nun Hr. Tait weiss, dass nicht-umkehrbare Kreisprocesse für die Gewinnung von Arbeit ungünstiger sind, als umkehrbare, so macht er ohne Weiteres die Voraussetzung, dass für nicht-umkehrbare Kreisprocesse die Arbeit kleiner als $E(Q_1 - Q_0)$ sei, und daraus zieht er den Schluss, dass das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ für nicht-umkehrbare Kreisprocesse positiv sei, was mit dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie im Widerspruche steht.

Durch eine solche Reihe falscher Schlüsse, die bei einem hervorragenden Mathematiker, welcher selbst ein Buch über die

mechanische Wärmetheorie geschrieben hat, fast unbegreiflich sind, gelangt Hr. Tait endlich zu dem Resultate, dass die in dem Kreisprocesse nutzlos verlorene Wärme durch

$$T_0 \int \frac{dQ}{T}$$

dargestellt werde, welcher Ausdruck, abgesehen von dem schon erwähnten falschen Vorzeichen, mit dem unter (4) mitgetheilten Ergebnisse meiner Entwickelung übereinstimmt. Hr. Tait nimmt aber von meiner Entwickelung keine Notiz, sondern sagt: *This is Thomson's expression for the amount of heat dissipated during the cycle*, und fügt als Beleg für diese Behauptung folgendes Citat hinzu: *Phil. Mag. and Proc. R. S. E. 1852, „On a Universal Tendency in Nature to Dissipation of Energy."*

Nachdem ich in Pogg. Ann.[1]) und später im ersten Bande dieses Werkes[2]) darauf aufmerksam gemacht habe, dass sich in dem citirten Aufsatze von Thomson weder der in Rede stehende, noch ein ihm gleich bedeutender Ausdruck befindet, führt Hr. Tait in der Vorrede zur zweiten Auflage seines Buches als den Ausdruck, welchen er gemeint hat, folgenden an:

$$w e^{-\frac{1}{J}\int_T^S \mu\, dt}.$$

Dieser Ausdruck hat eine ganz andere Gestalt, wie der oben angeführte, und Hr. Tait durfte daher selbst dann, wenn er beide Ausdrücke dem Sinne nach für gleich hielt, nicht einfach sagen: *this is Thomson's expression*, sondern er musste die Gleichheit erst nachweisen. In der Wirklichkeit aber sind beide Ausdrücke auch dem Sinne nach sehr verschieden von einander.

In Thomson's Ausdruck bedeutet J das mechanische Aequivalent der Wärme und μ den reciproken Werth der Carnot'schen Temperaturfunction, welche in diesem Ausdrucke noch als unbekannt angenommen ist. T stellt die Temperatur des Condensators der Dampfmaschine dar, und kann also der in dem obigen Ausdrucke vorkommenden Grösse T_0 gleich gesetzt werden, während S die Temperatur des Dampfkessels darstellt. Hieraus ist ersichtlich, dass in Thomson's Ausdruck nur zwei Temperaturen vorkommen, während in dem obigen Ausdrucke zu den verschiede-

---

1) Bd. 145, S. 145. — 2) S. 387.

nen Wärmeelementen unendlich viele verschiedene Temperaturen gehören können. Der Hauptunterschied aber liegt in der Bedeutung der in Thomson's Ausdruck vorkommenden Grösse w im Vergleiche mit der in dem obigen Ausdrucke vorkommenden Grösse Q. Während $d\,Q$ das Element der Wärme bedeutet, welche der veränderliche Körper während des Kreisprocesses von Aussen her empfängt, also bei der Dampfmaschine ein Element der theils positiven theils negativen Wärmemengen, welche dem Wasser bei seiner Verdampfung und bei dem dann wieder erfolgenden Niederschlage von Aussen her zugeführt werden, und für welche vorzugsweise das den Kessel umspülende Feuer und das Kühlwasser des Condensators als positive und negative Wärmequellen dienen, definirt Thomson seine Grösse w dadurch dass er sagt, $\frac{1}{J}w$ sei eine Wärmemenge, welche auf Kosten einer Arbeitsgrösse w durch Reibung erzeugt werde, sei es Reibung des Dampfes in den Röhren und Eintrittsöffnungen, sei es Reibung irgend welcher bewegter fester oder flüssiger Körper in irgend welchen Theilen der Maschine (*a quantity of heat produced by the expenditure of a quantity w of work in friction, whether of the steam in the pipes and entrance ports, or of any solids or fluids in motion in any part of the engine).* Man sieht hieraus, dass es sich in Thomson's Ausdruck um eine ganz andere Wärmemenge handelt, als in jenem obigen Ausdrucke, und dass somit durchaus keine Berechtigung vorlag, beide Ausdrücke als gleichbedeutend zu bezeichnen.

§. 6. Tendenz des Buches „*Sketch of Thermodynamics*" von Tait.

In Bezug auf das von Tait veröffentlichte Buch „*Sketch of Thermodynamics*", aus welchem schon im vorigen Paragraphen eine Stelle besprochen ist, hatte ich im Jahre 1872 in meinem Artikel „Zur Geschichte der mechanischen Wärmetheorie"[1]) und im ersten Bande dieses Werkes S. 387 die Ueberzeugung ausgedrückt, dass es seine Entstehung vorwiegend dem Bestreben verdanke, die mechanische Wärmetheorie so viel, wie möglich, für die englische

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 145, S. 132.

Nation in Anspruch zu nehmen. Die Gründe auf welche diese Ueberzeugung sich stützt, habe ich aber bisher nicht angegeben, weil sie zum Theil in einer Privatcorrespondenz liegen, welche ich nicht gern zur Sprache bringen wollte, wenn nicht Hr. Tait selbst mich zu einer weiteren Besprechung der Sache aufforderte. Da nun aber neuerdings Hr. Tait in den Vorreden zu zwei Werken [1]) die Angelegenheit wieder aufgenommen und in der einen [2]) den Wunsch ausgedrückt hat, meine Gründe kennen zu lernen (*I am, indeed, curious to know what these grounds can be*), so bin ich zu meiner eigenen Rechtfertigung genöthigt, näher auf die Sache einzugehen. Ich muss dazu etwas zurückgreifen und einige Vorgänge erwähnen, welche schon vor dem ersten Erscheinen des Buches über die Thermodynamik stattgefunden haben.

Die Arbeiten von Rob. Mayer waren bis zum Anfange der sechziger Jahre sehr wenig bekannt. Nur die erste derselben, ein kurzer Aufsatz, welcher noch gewisse Mängel der Auffassung enthielt, war im Jahre 1842 in einer wissenschaftlichen Zeitschrift [3]) erschienen und dadurch in weiteren Kreisen verbreitet; die anderen dagegen waren als besondere Brochüren gedruckt und waren, da zur Zeit ihres Erscheinens wenige Personen sich für den Gegenstand interessirten, in Vergessenheit gerathen. Auch ich kannte zu jener Zeit nur die erste Arbeit, und daher kam es, dass ich, wie Tyndall in dem gleich zu erwähnenden Vortrage mitgetheilt hat, auf eine von ihm im Jahre 1862 an mich gerichtete Anfrage über den Inhalt der Mayer'schen Schriften antwortete, ich glaube nicht, dass er sehr erhebliches darin finden werde, wolle indessen versuchen, sie ihm zu verschaffen. Als ich dann aber die Brochüren von dem Buchhändler in Heilbronn erhalten hatte und sie, bevor ich sie an Tyndall schickte, selber las, erkannte ich, dass ich mich geirrt hatte, und dass Mayer vielmehr die Mängel, welche anfangs seinen mechanischen Vorstellungen noch angehaftet hatten, und welche bei einem practischen Arzte, der zum ersten Male über einen mechanischen Gegenstand schrieb, sehr erklärlich waren, durch weitere, eingehende Studien beseitigt hatte, und in diesen

---

[1]) *Lectures on some Recent Advances in Science 2. edition, London 1876* und zweite Auflage des erwähnten Buches *Sketch of Thermodynamics, London 1877.*

[2]) Vorrede zu den *Lectures* S. IX.

[3]) Ann. d. Chem. u. Pharm. von Wöhler und Liebig, Bd. 42, S. 239.

Schriften seine Ansichten mit Klarheit und Schärfe auseinandersetzte, und einen Ideenreichthum entwickelte, welchen man bewundern musste, selbst wenn man nicht mit allem dort Gesagten übereinstimmte. Ich nahm daher, als ich Tyndall die Schriften zusandte, meinen früheren Ausspruch zurück und hob dasjenige, was ich in den Schriften für besonders wichtig hielt, hervor.

Gerade damals hatte Tyndall bei Gelegenheit der im Jahre 1862 stattfindenden Londoner Industrieausstellung einen öffentlichen Vortrag in der *Royal Institution* vor einer grossen und gewählten, aus verschiedenen Ländern zusammengekommenen Zuhörerschaft zu halten. Dazu wählte er als Gegenstand die Mayer'schen Schriften und setzte die Hauptresultate derselben in seiner bekannten ansprechenden Weise auseinander, und als er dadurch das grösste Interesse erweckt hatte, und man natürlich gespannt darauf war, zu erfahren, von wem das alles stamme, da nannte er den Mann, welcher in einer kleinen deutschen Stadt, ohne wissenschaftliche Anregung und ohne Ermuthigung seine mit Genialität erfassten Gedanken mit wunderbarer Kraft und Ausdauer entwickelt habe.

Dieser Vortrag, welcher mehrfach gedruckt wurde [1]) und viel besprochen ist, hat für Mayer in Bezug auf die Anerkennung seiner Leistungen den Wendepunct gebildet [2]). Mayer selbst sprach sich darüber in einem an Tyndall gerichteten Briefe [3]) folgendermaassen aus. „*I hardly know how to find words to express the feelings which move me at the present moment. On the 16th of last June Prof. Clausius conveyed to me the pleasant intelligence of your lecture at the Royal Institution. The hopes which in stillness I ventured to cherish were exceeded by the recognition which you there accorded me, and I am still more deeply affected by the receipt of your last communication to the Philosophical Magazine. Your kindness makes all the deeper impression from the fact that for many years I have been forced to habituate myself to a precisely opposite mode of treatment.*"

---

1) „*On Force.*" *Proc. of the Royal Institution, June 6, 1862, Phil. Mag. Ser. 4, Vol. 24, p. 57, Heat considered as a mode of Motion, London 1863, p. 435.*

2) Ich habe daher bei Gelegenheit einer von mir im Literarischen Centralblatt für 1868 veröffentlichten Recension der von Mayer später herausgegebenen gesammelten Schriften schon einmal davon gesprochen.

3) *Phil. Mag. Ser. 4, Vol. 26, p. 66.*

Während Tyndall sich durch die in diesem Vortrage geübte historische Gerechtigkeit einerseits Dank und Anerkennung erworben hat, hat er sich andererseits dadurch auch viele und heftige Anfeindungen in England zugezogen, weil man dort bis dahin den berühmten englischen Physiker Joule, welcher sich um die Feststellung des Satzes von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit und um die Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme unzweifelhafte und grosse Verdienste erworben hat, welcher den Satz aber, obwohl unabhängig, so doch später, als Mayer, ausgesprochen hat, für den ersten und alleinigen Begründer des Satzes gehalten hatte.

Bald nach dem Vortrage erschien in einer viel gelesenen, nicht wissenschaftlichen englischen Zeitschrift „*Good Words*“ ein von Thomson und Tait überschriebener Artikel „*Energy*“, dessen eigentlicher Verfasser aber der Letztere war, wie aus einer später von ihm gemachten Bemerkung [1]) hervorgeht. Hierin heisst es, nachdem der erste Aufsatz von Mayer erwähnt ist: „*On the strength of this publication an attempt has been made to claim for Mayer the credit of being the first to establish in its generality the principle of the Conservation of Energy. It is true that „La science n'a pas de patrie“, and it is highly creditable to British philosophers, that they have so liberally acted according to this maxim. But it is not to be imagined that on this account there should be no scientific patriotism, or that in our desire to do all justice to a foreigner, we should depreciate or suppress the claims of our own countrymen. And it especially startles us that the recent attempts to place Mayer in a position which he never claimed, and which had long before taken by another, should have found support within the very walls wherein Davy propounded his transcendent discoveries.*“

Die hierin vorkommende Hervorhebung des wissenschaftlichen Patriotismus und die Art, wie die Räume, in denen Davy seine grossartigen Entdeckungen gemacht hat (nämlich die Räume der *Royal Institution*), erwähnt sind, um Tyndall's Handlungsweise noch als besonders unpatriotisch erscheinen zu lassen, kennzeichnet von vorn herein den Standpunct, von welchem aus Hr. Tait die Geschichte der Wissenschaft behandelt.

---

[1]) *Phil. Mag. Ser. 4, Vol. 26, p. 144.*

An diesen Artikel schloss sich eine lange Polemik zwischen Tyndall und Tait an, welche sich durch drei Bände des Phil. Mag. (Bd. 25, 26 und 28, 1863 und 1864) hinzog, aber bei der von Tait selbst in jenen Worten „*scientific patriotism*“ so deutlich ausgedrückten Tendenz zu keiner Einigung führen konnte, sondern die Gegensätze nur verschärfte.

Hr. Tait sah sich daher veranlasst, der Sache grössere Dimensionen zu geben, und veröffentlichte im Jahre 1864 in einer damals in Schottland erscheinenden Zeitschrift „*North British Review*“ zwei längere Artikel über die Geschichte der mechanischen Wärmetheorie, welche sich nicht mehr bloss auf die Prioritätsfrage zwischen Mayer und Joule beschränkten, sondern auch die weitere Entwickelung der mechanischen Wärmetheorie behandelten.

Diese Artikel sollten einige Jahre später einem grösseren Publicum zugänglich gemacht werden, und es wurde daher aus ihnen eine besondere Brochüre unter dem Titel „*Historical Sketch of the Dynamical Theory of Heat*“ gebildet, welche aber nicht gleich der Oeffentlichkeit übergeben wurde, sondern von der nur eine beschränkte Anzahl von Abdrücken gemacht wurde, wie es scheint, um vor der Veröffentlichung einigen als competent geltenden Personen zur Beurtheilung vorgelegt zu werden.

Diese Brochüre wurde auch mir im Anfange des Jahres 1867 von Hrn. Tait mit folgendem Schreiben zugesandt. „*Would you kindly look over the little pamphlet which accompanies this, and which is not yet published, so as to tell me whether in trying to give Joule and Thomson the credit they deserve, and which some of their countrymen appear indisposed to grant them, I have inadvertently done injustice to you. If such be the case, I shall be delighted to make the necessary corrections before publishing, as my sole object is to be impartial.*“

Hieraus sieht man, dass es sich in der Schrift vorzugsweise darum handelte, die Verdienste von Joule und Thomson hervorzuheben. Was den Schlusssatz über die Unparteilichkeit anbetrifft, so versteht es sich erstens von selbst, dass niemand seine eigene Schrift als parteiisch bezeichnen wird. Ferner kann ich aber auch hinzufügen, dass es gar nicht meine Absicht ist, die Aufrichtigkeit dieses Ausspruches zu bestreiten, denn, wenn man der Schrift die Tendenz zuschreibt, die Verdienste gewisser Personen hervorzuheben, und diese Tendenz selbst als eine übertriebene bezeichnet, so liegt darin noch nicht die Behauptung, dass der Ver-

fasser in wirklich bewusster Weise parteiisch gewesen sei, sondern man kann gern zugeben, dass er in dem guten Glauben gehandelt habe, gerecht zu sein, und dass nur sein Urtheil durch den Patriotismus und die Freundschaft zu den betreffenden Personen, und vielleicht auch durch die in der voraufgegangenen Polemik entstandene Erregtheit getrübt gewesen sei.

Als ich nun die mir zugesandte Schrift las, fand ich sie in einem wirklich überraschenden Grade einseitig, und erkannte deutlich, dass der Autor, welcher es unternommen hatte, eine Geschichte der mechanischen Wärmetheorie zu schreiben, doch wenig mehr, als die Abhandlungen der englischen Autoren, deren Verdienste er hervorheben wollte, gelesen haben konnte.

Ich theilte ihm diese Wahrnehmung in meiner Antwort ganz offen mit, wobei ich, infolge seiner Frage über meine Arbeiten, verschiedene Einzelnheiten derselben näher besprach, und schrieb dann wörtlich weiter: „Sie sind mir, hochgeehrter Herr, mit sehr anerkennenswerther Freundlichkeit entgegengekommen, indem Sie mir die Schrift vor ihrer Veröffentlichung zur Ansicht zugeschickt haben, und ich habe geglaubt, es nicht bloss mir, sondern auch Ihnen schuldig zu sein, Ihnen aufrichtig und ohne Rückhalt meine Ansicht auszusprechen. Gestatten Sie mir noch zum Schlusse, Ihnen (ganz abgesehen von der Beurtheilung meiner eigenen Arbeiten) offen zu sagen, dass meiner Ueberzeugung nach die Schrift in ihrer jetzigen Form Ihrem eigenen so hoch stehenden wissenschaftlichen Rufe nur schaden kann. Jeder Leser sieht auf den ersten Blick, dass dieses nicht eine unparteiische historische Darstellung der Sache ist, wie man sie von einem Forscher Ihres Ranges erwarten muss, sondern eine blosse Parteischrift, welche nur zum Lobe einiger weniger Personen geschrieben ist. Ich selbst schätze diese Personen sehr hoch, aber ich glaube doch, dass man um ihretwillen nicht andere herabsetzen muss. In Ihrer Schrift erkennt man, dass das Urtheil über alle die Personen, welche mit jenen concurriren, nicht mehr frei und unbefangen geblieben, sondern durch den vorgefassten Zweck getrübt und oft sehr ungerecht geworden ist.“

Zugleich gab ich in dem Briefe folgende bestimmte Erklärung ab. „Wenn Ihr *Historical Sketch* in seiner jetzigen Form veröffentlicht werden sollte, so behalte ich mir vor, eine Entgegnung darauf zu schreiben, und ich glaube, nicht bloss die hier er-

wähnten, sondern auch noch andere Fehler darin nachweisen zu können."

Nach dieser Correspondenz dauerte es, obwohl der Satz des Buches schon vollendet gewesen war, doch mehr als ein Jahr, bis es erschien. Es war dann durch Zusätze bedeutend erweitert, so dass es von 68 Seiten auf 128 Seiten angewachsen war, und von diesen Zusätzen war ein nicht unbeträchtlicher Theil meinen Arbeiten gewidmet. In seinem Titel war jetzt das Wort „*Historical*" fortgelassen, und er lautete einfach „*Sketch of Thermodynamics*"; da aber der ursprüngliche Satz des Buches benutzt war, und die Ergänzungen nur eingefügt oder angehängt waren, so enthielten die Ueberschriften der Capitel, mit Ausnahme des ganz neu entstandenen letzten, und die sämmtlichen Columnenüberschriften der ersten 86 Seiten das Wort „*Historical*", was mit dem Titel, in welchem dieses Wort fehlte, in eigenthümlicher Weise contrastirte und ganz augenfällig zeigte, dass die urprüngliche Bestimmung des Buches dem jetzigen Titel nicht entsprach.

Obwohl nun nach den vielen vorgenommenen Aenderungen für mich keine Veranlassung mehr vorlag, mit einer Gegenschrift aufzutreten, so konnte ich doch bei einer allgemeinen, auf alle besprochenen Autoren bezüglichen Beurtheilung das Buch auch in seiner neuen Form nicht als eine gerechte historische Darstellung anerkennen. Die Tendenz, vorzugsweise die Verdienste englischer Autoren hervorzuheben, kann keinem aufmerksamen Leser des Buches entgehen, und wenn man dabei bedenkt, dass diejenigen Bestandtheile des Buches, welche sich auf fremde Arbeiten beziehen, meistens erst nachträglich auf besondere Anregung hinzugefügt sind, während ursprünglich fast ausschliesslich über englische Arbeiten gesprochen war, und wenn man ferner die oben erwähnten, der Publication vorausgegangenen Vorgänge mit berücksichtigt, so wird man gewiss meinen Ausspruch gerechtfertigt finden, dass das Buch seine Entstehung ganz unzweifelhaft vorwiegend dem Bestreben verdankt, die mechanische Wärmetheorie so viel, wie möglich, für die englische Nation in Anspruch zu nehmen.

§. 7. Spätere Aeusserungen von Tait und Aenderung seines Buches.

Der oben erwähnte im Jahre 1872 von mir gethane Ausspruch über die Tendenz des Tait'schen Buches hatte eine Polemik zur Folge [1]), welche trotz meiner Bemühung, sie auf wissenschaftlichem Gebiete zu erhalten, einen so persönlichen Character annahm, dass ich erklären musste, sie nicht weiter fortsetzen zu können. Ich kann mir den Ton, welchen Hr. Tait darin anschlug, nur aus einer grossen Heftigkeit seines Temperamentes erklären, die ihn, wenn er sich für beleidigt hält, nicht dazu kommen lässt, die betreffenden Stellen mit Ruhe zu lesen und zu prüfen, sondern ihn treibt, sofort nach dem ersten, bei flüchtiger Durchsicht entstandenen Eindrucke in möglichst geharnischter Weise zu antworten.

So führt er aus meinem Artikel die Ausdrücke „Absichtlichkeit“ und „sehr geschickt abgefasst“ als besonders beleidigend an. Nun kommt aber das Wort „Absichtlichkeit“ in einer Stelle vor, welche sich gar nicht auf ihn bezieht, und was den zweiten Ausdruck anbetrifft, so lautet die Stelle, in welcher er vorkommt, folgendermaassen: „Ich hatte gegen die Art, wie meine Arbeiten darin (nämlich in dem *Sketch of Thermodynamics*) neben denjenigen von W. Thomson und Rankine besprochen sind, manches einzuwenden, aber aus Scheu vor persönlichen Erörterungen und aus Hochachtung vor dem Verfasser und vor den beiden letztgenannten hervorragenden Gelehrten, deren Verdienste ich in keiner Weise schmälern wollte, unterliess ich es, obwohl jenes sehr geschickt abgefasste Buch nicht bloss in England grosse Verbreitung fand, sondern auch ins Französische übersetzt wurde.“ Ich glaube, keiner, der diesen Satz ruhig liest, wird in ihm etwas Beleidigendes finden.

Später muss Hr. Tait wohl selber gefunden haben, dass die Worte „sehr geschickt abgefasst“ keine Beleidigung enthalten, denn in der Vorrede zu der im vorigen Jahre erschienenen zweiten Auflage seines Buches (S. XVI) sieht er sich zu folgender Erklärung veranlasst. „*Professor Clausius adds that my book is sehr geschickt abgefasst. Read by the light of the context this*

---

[1]) *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. 43 and 44.*

can only mean that it is skilled special pleading." Hiernach ist also nicht mehr der von mir gebrauchte Ausdruck selbst, sondern dasjenige, was Hr. Tait ihm des Zusammenhanges wegen glaubt unterlegen zu müssen, beleidigend. Ich muss mich aber bestimmt dagegen verwahren, dass meinen Worten etwas anderes untergelegt wird, als was sie wirklich enthalten. Ich bin gewohnt, mich immer offen auszusprechen, und denke nie daran, etwas, was ich nicht wirklich sagen will, doch andeutungsweise durchblicken zu lassen. Jene Worte „sehr geschickt abgefasst" sind von mir einfach als ein auf die gewandte, leicht fassliche Darstellungsweise bezügliches Lob gebraucht, und weiter kann man auch aus dem Zusammenhange nichts schliessen, da sie offenbar dazu dienen sollen, die grosse Verbreitung des Buches in England und seine Uebersetzung ins Französische zu erklären.

Man wird mir zugeben, dass diese Art, einem Autor die Absicht der Beleidigung unterzuschieben, wo er sie gar nicht gehabt hat, und dann sofort mit wirklichen Beleidigungen zu antworten, die Discussion so unerquicklich machen kann, dass nur ein kurzes Abbrechen derselben übrig bleibt. Ich will daher auch auf die damaligen Auseinandersetzungen hier nicht weiter eingehen, sondern nur einige von Hrn. Tait neuerdings, nämlich in der zweiten Auflage seines Buches *Sketch of Thermodynamics*, gethane Aeusserungen und das darin gegen mich eingeschlagene Verfahren kurz beleuchten.

Wie es scheint, will Hr. Tait die Verantwortlichkeit für seine Darstellung der Geschichte der mechanischen Wärmetheorie nicht gern allein tragen, sondern wünscht sich dabei auf andere Autoritäten zu stützen.

Zunächst sagt er auf S. XV der Vorrede: „*and it will be seen that Professor Clausius fancies himself to have received even worse treatment from Clerk-Maxwell than from myself.*" Wenn Hr. Tait sich hier auf die Autorität von Maxwell beruft, so scheint er nicht zu wissen, dass meine Meinungsdifferenz mit Hrn. Maxwell längst dadurch ausgeglichen ist, dass Hr. Maxwell die von mir angefochtenen Stellen der ersten Auflage seiner *Theory of Heat* in der bald darauf erschienenen zweiten Auflage in dem von mir angedeuteten Sinne geändert und auf diese Weise meine Einwendungen als richtig anerkannt hat. Ich glaube hinzufügen zu müssen, dass die loyale Bereitwilligkeit, mit welcher Hr. Maxwell jene Stellen der ersten Auflage, sobald er auf ihre

Unrichtigkeit aufmerksam gemacht war, sofort corrigirt hat, in mir die Ueberzeugung hervorgerufen hat, dass auch bei ihrer ersten Abfassung nicht eine Absichtlichkeit obgewaltet hat, sondern nur eine unvollständige Kenntniss der ausserenglischen Literatur, über welche man bei einem Forscher, dem die Wissenschaft so viele und so durchgreifend wichtige eigene Schöpfungen verdankt, leicht hinfortsehen wird.

Ferner erzählt Hr. Tait, wie schon in der Vorrede zu seinem Buche „*On some Recent Advances etc.*“, so auch wieder in der Vorrede zur zweiten Auflage seines Buches über die Thermodynamik (S. XVI), dass er die auf meine Arbeiten bezüglichen Paragraphen, welche er in der ersten Auflage des letzteren Buches dem ursprünglichen Entwurfe hinzugefügt hat, gar nicht selbst verfasst hat, sondern sich von Rankine hat schreiben lassen, und knüpft daran die Bemerkung, dass ein Theil meines Angriffes (wie er meine Aeusserungen über sein Buch nennt) in Wirklichkeit gegen Rankine's Aufstellungen gerichtet sei.

Das Geständniss, dass Hr. Tait zu der Zeit, wo er sich schon berufen fühlte, eine Geschichte der mechanischen Wärmetheorie zu schreiben, doch die Arbeiten, deren Werth er darin beurtheilte, so wenig kannte, dass er zu einer etwas specielleren Auseinandersetzung fremde Hülfe in Anspruch nehmen musste, hat mich etwas in Erstaunen gesetzt. Die daran geknüpfte Bemerkung verstehe ich aber nicht, da mein Urtheil über sein Buch sich nicht sowohl auf die späteren Zusätze, als auf die ursprüngliche Anlage desselben bezieht, und die Zusätze vielmehr bewirkt haben, dass ich meine Absicht, eine Entgegnung zu schreiben, aufgegeben habe. Sollten aber wirklich in den von Rankine herrührenden Zusätzen noch Differenzpuncte vorkommen, so wird Hr. Tait, wie ich denke, für das, was er unter seinem Namen veröffentlicht hat, auch wohl die Verantwortung übernehmen.

Ganz besonders auffällig ist mir aber ein Punct gewesen, nämlich dass Hr. Tait in der Vorrede zur zweiten Auflage seines Buches (S. XV) sagt, er habe selbst in der ersten Auflage einige für mich günstige Stellen hinzugefügt, welche er in der zweiten Auflage, als ununterstützt durch den Augenschein, wieder habe zurückziehen müssen (*which I have now been obliged to retract as unsupported by evidence*). Ich war gespannt darauf, diese Stellen kennen zu lernen. Ausser einigen Stellen, welche den von mir eingeführten Ausdruck Entropie enthielten, der in der ersten Auf-

lage *excellent term* und *excellent word* genannt und vielfach angewandt war, in der zweiten Auflage aber beseitigt ist, handelt es sich, soviel ich habe finden können, vorzugsweise um folgende Stelle, welche in der ersten Auflage auf S. 29 steht. „*But the grand point of Clausius' work is his proof that Carnot's principle of reversibility still holds, though on other grounds than those from which Carnot deduced ist. This was a step of the utmost importance to thermodynamics, and sufficient (had he done no more) to entitle him to a foremost place in the history of the subject.*“ Diese Stelle ist in der neuen Auflage fortgelassen.

Also im Jahre 1868, wo die hierbei in Betracht kommenden Abhandlungen schon fast zwei Decennien alt waren, und die meinigen nicht nur deutsch, sondern auch in englischer Uebersetzung vorgelegen hatten, wo Hr. Tait daher die reichlichste Gelegenheit zu ihrer Prüfung und Vergleichung gehabt hatte, und bei seinem speciellen Interesse für die Geschichte der mechanischen Wärmetheorie über diesen ihre ersten Grundlagen betreffenden Punct längst im Klaren sein musste, hatte er es für recht gehalten, diesen Satz zu schreiben, und im Jahre 1877, wo zu den wissenschaftlichen Documenten nichts Neues hinzugekommen ist, wo aber unser persönliches Verhältniss sich geändert hat, hält er es für angemessen, ihn wieder zurückzuziehen, ohne zur Erklärung etwas anderes zu sagen, als die paar Worte „*as unsupported by evidence*“. Dieses Verfahren ist so characteristisch, dass ich meinerseits mich jeden Commentars enthalte, und es den Lesern überlasse, selbst zu beurtheilen, welches Vertrauen man hiernach zu der historischen Unparteilichkeit des Autors haben kann.

§. 8. Ansichten von W. Thomson und F. Kohlrausch über thermoelectrische Erscheinungen.

Ueber das Verhalten der Stoffe, und zwar speciell der Metalle, in thermoelectrischer Beziehung sind mehrere sehr werthvolle Arbeiten von W. Thomson veröffentlicht, welche theils theoretischer, theils experimenteller Natur sind. Eine erste kurze Notiz war schon vor meiner im Jahre 1853 publicirten Abhandlung, deren Inhalt in Abschnitt VII. wiedergegeben ist, veröffent-

licht[1]). Die grösseren Abhandlungen dagegen, welche die Entwickelung der Theorie und die Mittheilung ausgedehnter Versuchsreihen enthalten, erschienen etwas später, nämlich in den Jahren 1854 und 1856[2]). Durch die experimentellen Untersuchungen ist eine Reihe wichtiger, früher nur theilweise und unvollständig bekannter Thatsachen über das thermoelectrische Verhalten der Metalle festgestellt und ins Einzelne verfolgt, und der grosse Werth dieser Untersuchungen kann natürlich durch etwaige Meinungsverschiedenheiten über die Ursachen der betreffenden Erscheinungen in keiner Weise beeinträchtigt werden. Was aber die theoretischen Betrachtungen anbetrifft, so muss ich gestehen, dass ich mit einigen derselben nicht übereinstimmen kann.

Bei der Betrachtung der thermoelectrischen Erscheinungen handelt es sich zunächst um die Entstehung des thermoelectrischen Stromes, und in dieser Beziehung kann man zweierlei unterscheiden, erstens den regulären Vorgang, welcher so stattfindet, dass bei einer aus zwei Metallen oder sonstigen Leitern erster Classe gebildeten Kette durch eine Temperaturdifferenz der beiden Verbindungsstellen ein electrischer Strom veranlasst wird, dessen Stärke mit der Grösse der Temperaturdifferenz gleichmässig wächst, und zweitens die Abweichungen von diesem regulären Vorgange, welche bei manchen Metallverbindungen, besonders bei der Eisenkupferkette vorkommen, und darin bestehen, dass der Strom mit wachsender Temperaturdifferenz nicht immer zunimmt, sondern von einer gewissen Höhe der einen Temperatur an wieder abnimmt und bei sehr grosser Höhe sogar die entgegengesetzte Richtung annehmen kann.

Zugleich ist mit der Entstehung des thermoelectrischen Stromes die Erscheinung verbunden, dass ausser derjenigen Wärmeerzeugung, welche in der ganzen Kette bei der Ueberwindung des Leitungswiderstandes stattfindet und dem Quadrate der Stromstärke proportional ist, noch an gewissen Stellen ein Verschwinden und an anderen ein Hervortreten von Wärme stattfindet, wobei die betreffenden Wärmemengen der Stromstärke einfach proportional sind. Wenn man es nur mit dem regulären Vorgange zu thun hat, so

---

1) *Proc. of the Edinb. R. Soc.*, *Dec. 1851* und *Phil. Mag. Ser. IV*, *Vol. III*, *1852*.

2) *Transactions of the Edenb. R. Soc. for 1854* und *Phil. Trans. for 1856*. Fortgesetzt in *Phil. Trans. for 1875*.

braucht man ein solches Verschwinden und Hervortreten von Wärme nur an den Verbindungsstellen verschiedener Stoffe anzunehmen, und es ist dann diejenige Erscheinung, welche man die Peltier'sche zu nennen pflegt. Wenn dagegen auch die oben erwähnten Abweichungen vom regulären Vorgange vorkommen, so muss man annehmen, dass auch im Innern der einzelnen Metalle an verschiedenen Stellen dieses der Stromstärke proportionale Verschwinden und Hervortreten von Wärme stattfindet.

Die Theorie von Thomson bezieht sich nun vorzugsweise auf das zuletzt erwähnte Verschwinden und Hervortreten von Wärme im Innern der einzelnen Metalle. Dieses sucht er auf eine eigenthümliche Wirkung der Electricität zurückzuführen, welche er dadurch ausdrückt, dass er sagt, die Electricität führe beim Strömen durch einen ungleich erwärmten Leiter Wärme mit sich (*carries heat with it*). Speciell über Eisen und Kupfer spricht er sich so aus[1]): Harzelectricität führt Wärme mit sich in einem ungleich erwärmten Leiter von Eisen und Glaselectricität führt Wärme mit sich in einem ungleich erwärmten Leiter von Kupfer. Unter dem hierbei angewandten Ausdrucke des Mitsichführens von Wärme in einem ungleicherwärmten Leiter soll etwas verstanden werden, was man, wie ich glaube, ohne besondere Erklärung nicht leicht darunter verstehen würde, nämlich dass in dem Falle, wo die Electricität von wärmeren zu kälteren Stellen des Leiters strömt, Wärme in dem Leiter entwickelt, und umgekehrt, wenn die Electricität von kalt zu warm strömt, dem Leiter Wärme entzogen wird.

In Verbindung mit dieser Ansicht führt Thomson eine neue Grösse ein, welche er die specifische Wärme der Electricität nennt und folgendermaassen definirt[2]): Wenn in einem Metalle ein Strom von der unendlich kleinen Intensität γ von einer Stelle, deren Temperatur $t + dt$ ist, zu einer Stelle, deren Temperatur t ist, geht, und er zwischen diesen beiden Stellen während der Zeiteinheit die Wärmemenge $\gamma \sigma \, dt$ entwickelt, so ist σ die specifische Wärme der Electricität in diesem Metalle. Die so definirte specifische Wärme der Electricität hat nach Thomson in verschiedenen Metallen verschiedene Werthe und selbst verschiedene Vorzeichen. Den oben angeführten Aussprüchen nach muss

---

[1]) *Transactions of the Edinb. R. Soc. Vol. XXI, p. 143.*
[2]) A. a. O. S. 133.

man beim Kupfer die specifische Wärme der Glaselectricität als positiv annehmen, und beim Eisen muss man die specifische Wärme der Harzelectricität als positiv, und demgemäss die specifische Wärme der Glaselectricität als negativ annehmen.

Ich weiss nicht, ob diese Aussprüche und Definitionen nur dazu dienen sollen, das Verhalten der verschiedenen Metalle in Bezug auf das in ihnen während eines electrischen Stromes stattfindende Verschwinden und Hervortreten von Wärme in bequemer und einheitlicher Weise auszudrücken, oder ob sie eine wirkliche Erklärung der Erscheinungen enthalten sollen. Im letzteren Falle müsste ich sagen, dass ich nicht im Stande bin, eine mir physikalisch annehmbar scheinende Vorstellung mit dieser Erklärung zu verbinden.

Auch würde dann das an den Berührungsstellen verschiedener Stoffe stattfindende Verschwinden und Hervortreten von Wärme, also das Peltier'sche Phänomen, eine Erscheinung von ganz anderer Art sein, als das Verschwinden und Hervortreten von Wärme im Innern eines Metalles, und es würde dafür noch eine besondere Erklärung nöthig sein.

Was endlich die Entstehung des thermoelectrischen Stromes anbetrifft, so hat Thomson von dieser meines Wissens überhaupt keine Erklärung gegeben.

Eine in Bezug auf die verschiedenen in Betracht kommenden Erscheinungen vollständigere Theorie ist in neuerer Zeit von F. Kohlrausch aufgestellt[1]), welche ebenfalls eine neue Eigenschaft der Electricität und zugleich eine entsprechende neue Eigenschaft der Wärme als Grundlage voraussetzt.

Kohlrausch nimmt nämlich an, dass mit einem Wärmestrome in bestimmtem, von der Natur des Leiters abhängigem Maasse ein electrischer Strom verbunden sei, und dass auch umgekehrt durch einen electrischen Strom die Wärme bewegt werde. Diese letztere von Kohlrausch der Electricität zugeschriebene Eigenschaft, beim Strömen die Wärme mit zu bewegen, ist aber anders zu verstehen, als die von Thomson angenommene, welche er dadurch ausdrückt, dass er sagt, die Electricität führe Wärme mit sich. Nach Thomson soll die betreffende Wirkung des Stromes auf die im Leiter vor-

1) Göttinger Nachrichten. Februar 1874 und Pogg. Ann. Bd. 156, S. 601.

handene Wärme nur in einem ungleich erwärmten Leiter stattfinden und zwar in entgegengesetzter Weise, je nachdem die Electricität von warm zu kalt oder von kalt zu warm strömt, indem im einen Falle Wärme entwickelt, im anderen Falle Wärme absorbirt wird. Die von Kohlrausch angenommene Wirkung dagegen soll auch im gleichmässig erwärmten Leiter stattfinden, und ein Gegensatz der zuletzt erwähnten Art kommt bei ihr nicht vor.

Kohlrausch erklärt aus den von ihm angenommenen Eigenschaften der Wärme und der Electricität die Entstehung des thermoelectrischen Stromes und das Verschwinden und Hervortreten von Wärme an den Verbindungsstellen verschiedener Metalle, und zeigt ferner, wie man unter Zuhülfenahme einer besonderen Hypothese auch das Verschwinden und Hervortreten von Wärme im Innern eines einzelnen Metalles erklären kann. Dessenungeachtet kann ich ihr nicht zustimmen, weil sie für die einzelnen zu erklärenden Erscheinungen eben so viele ganz neue Eigenschaften der Wärme und Electricität annimmt, von denen die eine, dass die Wärme bei dem durch Leitung stattfindenden Uebergange von warmen zu kalten Stellen eine Arbeit leisten könne, den sonstigen Annahmen der mechanischen Wärmetheorie widerspricht, während meine Theorie sich nur an die auch sonst in der mechanischen Wärmetheorie gemachten Annahmen über die Umstände, unter welchen die Wärme Arbeit leisten kann, anschliesst.

Zugleich muss ich daran erinnern, dass ich den Einwand, welchen Kohlrausch gegen meine Theorie gemacht hat, und um dessentwillen er gemeint hat, sich gegen dieselbe erklären zu müssen, schon im zweiten Paragraphen dieses Abschnittes widerlegt habe. Ich habe daher keinen Grund, meine Theorie, welche ebenfalls, wenn sie in der von mir gleich anfangs angedeuteten und später von Budde zur Ausführung gebrachten Weise erweitert wird, von allen beobachteten Erscheinungen Rechenschaft giebt, zu verlassen.

§. 9. Einwände von Zöllner gegen die im Abschnitt IX. enthaltenen electrodynamischen Betrachtungen.

Gegen die im Abschnitt IX. enthaltenen electrodynamischen Betrachtungen, welche zur Aufstellung des neuen electrodynamischen Grundgesetzes geführt haben, sind von Zöllner verschiedene

Einwände erhoben [1]), von welchen die wichtigsten hier besprochen werden mögen.

Ich habe dort gezeigt, dass das Weber'sche Grundgesetz, wenn es mit der Annahme in Verbindung gebracht wird, dass im galvanischen Strome nur Eine Electricität sich bewege, zu einer von einem geschlossenen, ruhenden und constanten Strome auf ruhende Electricität ausgeübten Kraft führe, welche in der Wirklichkeit nicht beobachtet wird. Zöllner erkennt nun zwar die betreffenden Gleichungen, welche dort abgeleitet sind, und welche auch schon früher von Riecke aufgestellt waren, als richtig an, meint aber, die durch dieselben bestimmte Kraft sei so klein, dass sie sich der Beobachtung entziehe.

Die x-Componente dieser Kraft wird bestimmt durch die im Abschnitt IX. unter (4) angeführte Gleichung, nämlich:

$$\mathfrak{X} = -\frac{4h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2 ds'.$$

Eine characteristische Eigenthümlichkeit der hier für $\mathfrak{X}$ gegebenen Formel ist die, dass der Differentialcoëfficient $\frac{ds'}{dt}$, welcher die Bewegungsgeschwindigkeit darstellt, nicht blos in der ersten Potenz, sondern quadratisch in ihr als Factor vorkommt. Daraus folgt, dass, wenn die Stromstärke, d. h. die durch das Product $h'\frac{ds'}{dt}$ ausgedrückte während einer Zeiteinheit durch einen Querschnitt fliessende Electricitätsmenge, gegeben ist, der Werth der Formel noch wesentlich davon abhängt, wie man den Strom auffasst, ob man der strömenden Electricitätsmenge einen sehr grossen und ihrer Geschwindigkeit einen geringen Werth zuschreibt, oder ob man die Electricitätsmenge als geringer und dafür die Geschwindigkeit als grösser annimmt.

Zöllner stützt seine Betrachtungen auf die bekannten Untersuchungen von R. Kohlrausch und Weber über die Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maass [2]), aus welchen die Verf. unter andern den Schluss gezogen haben (S. 281), dass in electrolytischen Leitern die Strömungsgeschwindigkeit so klein sei, dass man bei gewissen Annahmen über die Stromstärke und den Querschnitt des Leiters nur eine Fortbewegung um $^1/_2$ mm

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 160, S. 514 und Wied. Ann. Bd. 2, S. 604.

[2]) Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. III, S. 221.

in der Secunde erhalte. Diesen Werth der Geschwindigkeit wendet Zöllner an und gelangt dadurch für $\mathfrak{X}$ zu einem seiner Kleinheit wegen der Beobachtung nicht mehr zugänglichen Werthe. Hiergegen sind aber sehr erhebliche Einwände zu machen.

Betrachten wir zunächst nur die electrolytischen Leiter, so bezieht sich der obige Schluss von Weber und Kohlrausch auf die mittlere Geschwindigkeit aller im Electrolyten enthaltenen Theilmolecüle, also auf diejenige Geschwindigkeit, welche man erhalten würde, wenn man sich dächte, dass alle in dem Electrolyten enthaltenen positiven und negativen Theilmolecüle sich in gleicher Weise nach den beiden entgegengesetzten Richtungen bewegten. Macht man dagegen die, meiner Ansicht nach, viel wahrscheinlichere Annahme, dass nur verhältnissmässig wenige Theilmolecüle die betreffende Bewegung, durch welche die Electricität übertragen wird, ausführen, und dass diese dafür um so grössere Geschwindigkeiten haben, so erhält man dadurch für unsere vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängende Grösse $\mathfrak{X}$ natürlich entsprechend grössere Werthe.

Betrachten wir ferner statt der Electrolyten metallische Leiter, so tritt bei diesen der neue Umstand hinzu, dass nicht die Molecüle selbst mit den ganzen an ihnen haftenden Electricitätsmengen sich fortbewegen, sondern dass ein Uebergang von Electricität von Molecül zu Molecül stattfindet. Dabei ist nun nicht wohl anzunehmen, dass die ganze einem Molecüle angehörende Electricitätsmenge dieses verlasse und zu dem nächsten Molecüle übergehe, sondern es ist viel wahrscheinlicher, dass verhältnissmässig sehr kleine Theile der ganzen Electricitätsmengen übergehen, wodurch man dann zu sehr viel grösseren Geschwindigkeiten gelangt.

Wenn man daher auch, wie Weber und Kohlrausch ganz richtig hervorheben, nicht daran denken darf, die ungeheure, nach Tausenden von Meilen zählende Geschwindigkeit, welche Wheatstone und andere Forscher für die Fortpflanzung der electrischen Wirkung gefunden haben, als die Bewegungsgeschwindigkeit der Electricität selbst zu betrachten, so darf man andererseits, meiner Ueberzeugung nach, auch jenen kleinen Werth von $1/2$ mm, welchen Weber und Kohlrausch für eine gewisse mittlere Geschwindigkeit berechnet haben, nicht auf die wirkliche Bewegungsgeschwindigkeit der Electricität anwenden, besonders wenn es sich um metallische Leiter handelt. In diesen ist die Geschwindigkeit

wahrscheinlich in sehr hohem Maasse grösser, wodurch dann die Zöllner'sche Beweisführung vollkommen hinfällig wird.

Noch viel ungünstiger für die Zöllner'sche Beweisführung gestaltet sich die Sache, wenn man statt der galvanischen Ströme Magnete betrachtet. Bei diesen gelangt man zu einem Resultate, welches dem Zöllner'schen gerade entgegengesetzt ist.

Zunächst möge bemerkt werden, dass bei den Molecularströmen, aus welchen man nach Ampère den Magnetismus erklärt, die von Weber angenommene Doppelströmung noch unwahrscheinlicher ist, als bei galvanischen Strömen in festen Leitern. Wenn man sich denkt, dass die positive Electricität sich um einen negativ electrischen Kern wirbelartig herumbewege, so ist das eine den sonst vorkommenden mechanischen Vorgängen ganz entsprechende Vorstellung. Dass aber zwei verschiedene Fluida sich um denselben Mittelpunct fort und fort in entgegengesetzten Richtungen bewegen sollten, scheint mir fast undenkbar.

Auch Weber selbst, welcher früher, um die moleculare Doppelströmung wenigstens als möglich erscheinen zu lassen, davon gesprochen hatte, dass vielleicht das eine Fluidum eine engere Kreisbahn und das andere Fluidum eine weitere Kreisbahn um das Molecül beschreibe, hat sich in neuerer Zeit von den Ampère'schen Molecularströmen eine andere Vorstellung gebildet, welche mit der vorher erwähnten, den sonstigen mechanischen Vorgängen entsprechenden Vorstellung ganz übereinstimmt. Weber nimmt nämlich an [1]), dass zu einem ponderablen Atom ein positives und ein ebenso grosses negatives Electricitätstheilchen gehöre. Bei der Betrachtung der Bewegung der beiden Electricitätstheilchen um einander spricht er davon, dass das Verhältniss beider Theilchen in Beziehung auf Theilnahme an der Bewegung von dem Verhältniss ihrer Massen abhänge, und dass man, wenn an einem Electricitätstheilchen ein ponderables Atom hafte, die Masse desselben mit zu der des Electricitätstheilchens zu rechnen habe. Nachdem er dann das positive Electricitätstheilchen mit $+ e$ und das negative mit $- e$ bezeichnet hat, sagt er wörtlich weiter: „Nur an diesem letztern hafte ein ponderables Atom, wodurch seine Masse so vergrössert werde, dass die Masse des positiven Theilchens dagegen als verschwindend betrachtet werden dürfe. Das Theil-

[1]) Electrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. Leipzig 1871, S. 41.

chen — e wird dann als ruhend, und blos das Theilchen + e als in Bewegung um das Theilchen — e herum befindlich betrachtet werden können."

Bei dieser Vorstellung kommt die sonst von Weber angenommene Doppelströmung nicht vor, sondern nur eine einfache Herumbewegung der positiven Electricität um einen negativ electrischen Kern, für welche Art von Bewegung aus dem Weber'schen Grundgesetze die oben angeführte Gleichung folgt. Wenn sich nun weiter nachweisen lässt, dass die durch diese Gleichung bestimmte Kraft so gross ist, dass sie sich, wenn sie vorhanden wäre, der Beobachtung nicht entziehen könnte, so muss man aus dem Umstande, dass diese Kraft in der Wirklichkeit nicht beobachtet wird, schliessen, dass das von Weber aufgestellte Grundgesetz bei der von ihm selbst in den Molecularströmen angenommenen Bewegungsart zu einem Widerspruche mit der Erfahrung führt.

Nun ist zunächst zu bemerken, dass schon die gewöhnliche electrodynamische Gesammtwirkung der Molecularströme eines Magnetes so gross ist, dass, wenn man einen einigermaassen starken Magnet durch ein ihn äusserlich umgebendes Solenoid von gleich grosser electrodynamischer Wirkung ersetzen wollte, man in demselben einen sehr starken Strom oder sehr viele Windungen anwenden müsste.

Zu diesem für den Magnet günstigen Umstande kommt aber noch ein anderer hinzu, welcher dem Magnete in Bezug auf die Kraft, welche er nach dem Weber'schen Grundgesetze auf ruhende Electricität ausüben müsste, ein so grosses Uebergewicht giebt, dass selbst die stärksten Ströme in Leitern von gewöhnlichen Dimensionen ganz dagegen zurücktreten.

Aus der schon oben angeführten, für die Kraftcomponente $\mathfrak{X}$ geltenden Formel, nämlich

$$\mathfrak{X} = -\frac{4h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2 ds'$$

geht hervor, dass die hier in Rede stehende Kraft sich in einer gewissen Beziehung ganz anders verhält, als die gewöhnlich betrachteten electrodynamischen Kräfte. Bestimmt man nämlich für einen sehr kleinen geschlossenen Strom, den wir der Einfachheit wegen als kreisförmig annehmen wollen, die auf einen anderen kleinen geschlossenen Strom oder auf einen Magnetpol ausgeübte Kraft, also die gewöhnliche electrodynamische Kraft, so findet man

sie dem Flächeninhalte des Kreises proportional. Bestimmt man aber nach der obigen Formel die vom Kreisstrome auf eine ruhende Electricitätseinheit ausgeübte Kraft, so findet man, dass diese dem Umfange des Kreises proportional ist. Wie wesentlich dieser Unterschied ist, ergiebt sich leicht aus folgender Betrachtung.

Construirt man innerhalb eines grossen Kreises sehr viele kleine Kreise, welche so nahe neben einander liegen, dass sie den Flächeninhalt des grossen Kreises zum grössten Theile ausfüllen, und denkt sich einerseits den grossen Kreis und andererseits alle kleinen Kreise von gleich starken und in gleichem Sinne herumgehenden Strömen umflossen, so kann man die von dem grossen Kreisstrome ausgeübte Kraft mit der von allen kleinen Kreisströmen zusammen ausgeübten Kraft vergleichen. Thut man dieses in Bezug auf die gewöhnliche electrodynamische Kraft, so findet man, dass die Gesammtkraft aller kleinen Ströme geringer ist, als die Kraft des einen grossen Stromes, wie es dem Umstande entspricht, dass die von allen kleinen Strömen umflossenen Flächen zusammen nicht so gross sind, als die von dem einen grossen Strome umflossene Fläche. Stellt man die Vergleichung dagegen in Bezug auf die Kraft an, welche der Formel nach auf ruhende Electricität ausgeübt wird, so findet man, dass die Kraft der vielen kleinen Ströme die des einen grossen Stromes bei Weitem übertrifft, wie es dem Umstande entspricht, dass die Bahnlängen der kleinen Ströme zusammen viel grösser sind, als die Bahnlänge des einen grossen Stromes. Dieses Ueberwiegen der Gesammtkraft der kleinen Ströme über die Kraft des grossen Stromes ist um so stärker, je kleiner die ersteren sind, und je grösser demgemäss ihre Anzahl ist.

Kehren wir nun zur Betrachtung eines Magnetes zurück und denken uns um denselben ein Solenoid gebildet, welches so viele Windungen und eine solche Stromstärke hat, dass es, soweit es sich um die gewöhnliche electrodynamische Kraft handelt, ebenso stark wirkt, wie der Magnet, also wie alle in dem Magnete enthaltenen Molecularströme zusammengenommen, so findet in Bezug auf die der obigen Formel nach auf ruhende Electricität ausgeübte Kraft diese Gleichheit nicht statt, sondern die Molecularströme übertreffen das Solenoid in einem Verhältnisse, welches wegen der alle Vorstellung übersteigenden Menge von Molecularströmen, die in einem Magnete anzunehmen sind, ganz ungeheuer gross sein muss.

Hieraus folgt, dass selbst dann, wenn man in der Formel eine so kleine Geschwindigkeit der Electricität, wie sie Zöllner annimmt, in Rechnung bringen wollte, und dadurch für das Solenoid zu einer sehr kleinen Kraft gelangte, man doch für den Magnet umgekehrt zu einer sehr grossen Kraft gelangen würde. Der Umstand, dass eine solche Kraft weder bei permanenten Magneten, noch auch bei Electromagneten, bei denen man den Magnetismus plötzlich entstehen und vergehen lassen kann, wahrgenommen wird, kann also als ein sicherer Beweis dafür angesehen werden, dass das Weber'sche Gesetz mit der Annahme, dass in den Molecularströmen eines Magnetes nur die positive Electricität ströme, nicht vereinbar ist.

Während Zöllner in den erwähnten beiden Aufsätzen, aus welchen hier nur die wichtigsten, rein sachlichen Auseinandersetzungen hervorgehoben sind, mein Grundgesetz entschieden und mit einer gewissen Heftigkeit bekämpft, kommt andererseits eine Stelle vor, in welcher er zu zeigen sucht, dass mein Grundgesetz eigentlich gar nicht neu sei, sondern im Wesentlichen mit dem Weber'schen übereinstimme, indem meine Potentialformel durch einige „rationelle Vereinfachungen“ auf die Weber'sche zurückgeführt werden könne.

In dieser Beziehung brauche ich nur auf die im ersten Paragraphen des vorigen Abschnittes (S. 283) enthaltene Zusammenstellung der von Weber, Riemann und mir aufgestellten Potentialformeln zu verweisen. Ein blosser Blick auf die drei dort unter (2 a), (3) und (4) gegebenen Formeln genügt, um zu erkennen, dass sie wesentlich von einander verschieden sind, und dass die Operationen, welche Zöllner rationelle Vereinfachungen nennt, und durch welche er meine Formel auf die Weber'sche zurückführt, vielmehr als vollständige principielle Umänderungen meiner Formel zu bezeichnen sind.

§. 10. Einwände von W. Weber.

In der in neuester Zeit erschienenen zweiten Abtheilung des zweiten Bandes von Zöllner's wissenschaftlichen Abhandlungen ist noch ein weiterer Einwand gegen mein electrodynamisches Grundgesetz geltend gemacht. Zöllner sagt dabei, dass er die betreffende Untersuchung der Güte Wilhelm Weber's ver-

danke, mit dessen Einwilligung ihre Publication an dieser Stelle stattfinde. Zugleich theilt Zöllner dabei mit, dass auch ein Nachtrag, welchen er seiner früheren Abhandlung hinzugefügt hatte, und welcher ebenfalls einen Einwand gegen mein Grundgesetz enthielt, von Weber herstamme.

Unter diesen Umständen muss den betreffenden Einwänden ein ganz besonderes Gewicht beigelegt werden, und wir wollen sie daher hier näher betrachten. Zunächst wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf den erwähnten Nachtrag zu der früheren Abhandlung richten.

Derselbe lautet wörtlich folgendermaassen:

„Clausius bezeichnet in seiner Potentialformel:

$$\frac{ee'}{r}(1 + kvv' \cos \varepsilon)$$

mit v und v' die absoluten Geschwindigkeiten der Theilchen e und e' und mit ε den Winkel ihrer Richtungen. Jene Geschwindigkeiten lassen sich zerlegen in zwei entgegengesetzt gleiche u, welche den Winkel $\varepsilon = \pi$ mit einander bilden, und in zwei gleiche und gleichgerichtete w, welche den Winkel $\varepsilon = o$ mit einander bilden. Ist $u = o$, so ist $v = v' = w$ und $\cos \varepsilon = + 1$; folglich ist das Potential $= \frac{ee'}{r}(1 + kw^2)$. Ist $w = o$, so ist $v = v' = u$ und $\cos \varepsilon = - 1$; folglich das Potential $= \frac{ee'}{r}(1 - ku^2)$. Der erstere Fall findet statt bei zwei auf der Erde in Ruhe befindlichen Theilchen, die sich mit der Erde im Weltenraume fortbewegen. Für solche Theilchen ist das Gesetz der Electrostatik experimentell begründet worden, wonach ihr Potential $= \frac{ee'}{r}$ ist, womit das Clausius'sche Gesetz im Widerspruch steht. Im letzteren Falle ist die relative Geschwindigkeit beider Theilchen $= 2\,u$, und es ergiebt sich daraus das Clausius'sche Gesetz in vollkommener Uebereinstimmung mit dem Weber'schen, wenn die Clausius'sche Constante $k = \frac{4}{c^2}$ gesetzt wird. Nach Verbesserung des Clausius'schen Gesetzes, dem Grundgesetze der Electrostatik gemäss, wird daher aus dem Clausius'schen Gesetze das Weber'sche als allgemeines Gesetz erhalten.“

Auf die hierin enthaltenen Auseinandersetzungen ist zweierlei zu entgegnen.

Erstens wird der Umstand erwähnt, dass zwei auf der Erde in Ruhe befindliche Electricitätstheilchen sich mit der Erde im Weltenraume fortbewegen und daher gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten haben, deren Grösse Weber mit w bezeichnet. Für diesen Fall giebt mein Gesetz die Potentialformel $\frac{ee'}{r}(1+kw^2)$, und Weber sagt nun, dieses stehe mit dem experimentell begründeten Gesetze der Electrostatik im Widerspruche, nach welchem das Potential gleich $\frac{ee'}{r}$ sei.

Betrachtet man aber die Sache etwas näher, so sieht man diesen scheinbaren Widerspruch mit der Erfahrung vollständig verschwinden. Bezeichnet man nämlich die Coordinaten der beiden in relativer Ruhe zur Erde befindlichen Electricitätstheilchen e und e' in Bezug auf ein im Raume festes rechtwinkliges Coordinatensystem mit x, y, z und x', y', z', so erhält man aus meiner Potentialformel $\frac{ee'}{r}(1+kw^2)$, in welcher man die Geschwindigkeit w des betreffenden Punctes der Erde für die experimentelle Untersuchung als geradlinig und constant ansehen kann, für die Componenten der Kraft, welche e von e' erleidet, folgende Ausdrücke:

$$-ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}(1-kw^2);\quad -ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}(1-kw^2);\quad -ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}(1-kw^2),$$

während man aus der electrostatischen Potentialformel $\frac{ee'}{r}$ die folgenden Ausdrücke erhalten würde:

$$-ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x};\quad -ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y};\quad -ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Die für die beiden Fälle geltenden Ausdrücke unterscheiden sich also nur durch den constanten Factor $1-kw^2$. Dieser constante Factor hat auf die Formeln denselben Einfluss, wie wenn die Maasseinheit, nach welcher die Electricitätsmengen e und e' gemessen werden, ein wenig geändert würde. Da wir nun aber die Maasseinheit, nach welcher wir die Electricität messen, nur aus der von ihr ausgeübten Kraft entnehmen, so können wir natürlich

eine in constanter Weise stattfindende Aenderung der Kraft nicht bemerken, wodurch jener Widerspruch fortfällt.

Zweitens sagt Weber, wenn man wegen jenes (vermeintlichen) Widerspruches mit dem electrostatischen Gesetze meine Formel dadurch abändere, dass man bei ihrer Bildung die gleichen und gleichgerichteten Geschwindigkeiten w unberücksichtigt lasse und nur die gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten u in Betracht ziehe, und ihr somit folgende Gestalt gebe: $\frac{ee'}{r}(1-ku^2)$, so stimme diese Formel mit seiner Potentialformel überein, und es werde daher nach dieser Verbesserung aus meinem Gesetze das seinige als allgemeines Gesetz erhalten. Dieses ist aber ein Versehen, denn die Formel $\frac{ee'}{r}(1-ku^2)$ ist nicht die Weber'sche, sondern die Riemann'sche Potentialformel, da die Grösse $2u$ nicht gleich $\frac{dr}{dt}$ ist, sondern die relative Geschwindigkeit im gewöhnlichen Sinne des Wortes darstellt.

Es kann natürlich keinem Zweifel unterliegen, dass dieses Versehen nur durch eine zu flüchtige Behandlung des Gegenstandes veranlasst ist, und in der That hat Weber selbst in seinem späteren, von Zöllner in der zweiten Abtheilung des zweiten Bandes seiner Abhandlungen veröffentlichten Aufsatze die Behandlung vervollständigt. Er sagt zwar nicht, dass seine frühere Behauptung, nach welcher die Formel $\frac{ee'}{r}(1-ku^2)$ mit seiner Potentialformel übereinstimmen soll, unrichtig sei, aber er nimmt doch mit der gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeit u noch die weitere Zerlegung vor, welche nothwendig ist, um überhaupt die in seiner Formel vorkommende Grösse $\frac{dr}{dt}$ zu erhalten. Er zerlegt nämlich u in zwei Componenten, deren eine in die Richtung der Verbindungslinie der beiden Theilchen fällt, und daher gleich $\frac{1}{2}\frac{dr}{dt}$ ist, während die andere auf der Verbindungslinie senkrecht ist. Diese beiden Componenten mögen im Folgenden mit u_1 und u_2 bezeichnet werden.

Nach dieser Zerlegung stellt Weber nun eine andere Betrachtung an, aus welcher er einen neuen Einwand gegen meine Potentialformel ableitet.

Er bildet nämlich meine electrodynamische Potentialformel sowohl für die ganzen Geschwindigkeiten v und v', als auch für die einzelnen Componenten dieser Geschwindigkeiten, und vergleicht dann die letzteren Ausdrücke mit dem ersten. Das auf die ganzen Geschwindigkeiten bezügliche electrodynamische Potential V wird bestimmt durch die Gleichung:

$$V = k \frac{ee'}{r} vv' \cos \varepsilon.$$

Zerlegt man die Geschwindigkeiten in je zwei Componenten w und u und bezeichnet die auf sie bezüglichen Potentiale mit W und U, so lauten die Gleichungen:

$$W = k \frac{ee'}{r} w^2; \quad U = - k \frac{ee'}{r} u^2.$$

Zerlegt man die Geschwindigkeiten in je drei Componenten w, u_1 und u_2 und bezeichnet die auf sie bezüglichen Potentiale mit W, U_1 und U_2, so lauten die Gleichungen:

$$W = k \frac{ee'}{r} w^2; \quad U_1 = - k \frac{ee'}{r} u_1^2; \quad U_2 = - k \frac{ee'}{r} u_2^2.$$

Weber sagt nun, man müsse erwarten, dass bei der ersten Zerlegung die Summe $W + U$ und bei der zweiten Zerlegung die Summe $W + U_1 + U_2$ gleich V sei; dieses sei aber nicht der Fall, denn die Grösse $vv' \cos \varepsilon$ sei den algebraischen Summen $v^2 - u^2$ und $v^2 - u_1^2 - u_2^2$ nicht gleich, sondern werde durch einen viel complicirteren Ausdruck dargestellt.

Wenn dieses wirklich richtig wäre, so würde dadurch in der That meine Potentialformel unwahrscheinlich werden. Bei näherer Betrachtung findet man aber, dass es nicht richtig ist, sondern dass auch diese Weber'sche Behauptung nur durch zu flüchtige Behandlung des Gegenstandes veranlasst ist, indem sie auf einem einfachen Rechenfehler beruht.

Von jenen beiden algebraischen Summen $w^2 - u^2$ und $w^2 - u_1^2 - u_2^2$ brauchen wir nur die erste näher zu betrachten, da die zweite mittelst der ganz selbstverständlichen Gleichung $u_1^2 + u_2^2 = u^2$ auf die erste zurückgeführt werden kann. Es lässt sich nun sehr leicht beweisen, dass (entgegen der Weber'schen Behauptung), die Gleichung:

$$vv' \cos \varepsilon = w^2 - u^2 \tag{5}$$

gültig ist.

Dazu betrachten wir von v, v', w und u die in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten. Die x-Componenten der Geschwindigkeiten v und v' sind $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$. Daraus folgt, dass die x-Componenten der gleichen und gleichgerichteten Geschwindigkeiten w für beide Theilchen durch $\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dx'}{dt}\right)$ und die x-Componenten der gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten u für das erste und zweite Theilchen resp. durch $\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)$ dargestellt werden. Entsprechende Ausdrücke sind für die beiden anderen Coordinatenrichtungen zu bilden. Demnach gelten für w und u die Gleichungen:

$$w^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}+\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}+\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

$$u^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right].$$

Durch Subtraction der zweiten dieser Gleichungen von der ersten erhält man:

$$w^2 - u^2 = \frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt},$$

und der hierin an der rechten Seite stehende Ausdruck ist gleich $vv' \cos \varepsilon$, wodurch die Gleichung (5) bewiesen ist.

Statt dieser sehr einfachen Rechnung macht Weber eine viel complicirtere, von der ich hier nur so viel anzuführen brauche, wie nöthig ist, um den Rechenfehler nachzuweisen. Indem er den Winkel zwischen der w-Richtung und der einen u-Richtung mit γ bezeichnet, bildet er die Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} v^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cos \gamma \\ v'^2 = u^2 + w^2 + 2uw \cos \gamma. \end{cases}$$

Indem er ferner die Winkel zwischen der w-Richtung und den v- und v'-Richtungen mit α und β bezeichnet, bildet er die Gleichungen:

$$\sin \gamma = \frac{v}{u} \sin \alpha = \frac{v'}{u} \sin \beta,$$

woraus folgt:

$$(7)\qquad u \cos \gamma = \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{u^2 - v'^2 \sin^2 \beta}.$$

Nun sagt Weber weiter, aus diesen Gleichungen resultiren di folgenden:

$$(8)\quad \begin{cases} v^2 = u^2 + w^2 \cos 2\alpha \left(1 \pm \sqrt{\frac{u^2}{w^2} - \sin^2 \alpha}\right) \\ v'^2 = u^2 + w^2 \cos 2\beta \left(1 \pm \sqrt{\frac{u^2}{w^2} - \sin^2 \beta}\right), \end{cases}$$

und die durch diese Gleichungen bestimmten Werthe von v und v' sind es, von welchen er meint, dass sie in meine Potentialforme $k \frac{ee'}{r} vv' \cos \varepsilon$ einzusetzen seien, wodurch diese dann allerding eine sehr complicirte Form annehmen würde.

In der Wirklichkeit resultiren aber aus den Gleichungen (6 und (7) gar nicht die Gleichungen (8), sondern vielmehr folgend Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} v^2 = u^2 + w^2 \left(\cos 2\alpha \pm 2 \cos \alpha \sqrt{\frac{u^2}{w^2} - \sin^2 \alpha}\right) \\ v'^2 = u^2 + w^2 \left(\cos 2\beta \pm 2 \cos \beta \sqrt{\frac{u^2}{w^2} - \sin^2 \beta}\right). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich, wenn man noch eine gewiss zwischen den Geschwindigkeiten u und w und den Winkeln α und β bestehende Relation mit berücksichtigt, die Gleichung

$$v v' \cos (\alpha + \beta) = w^2 - u^2$$

ableiten, wobei zu bemerken ist, dass die Summe der Winkel α und β gleich dem von mir mit ε bezeichneten Winkel ist. Man gelangt also auch durch diese Entwickelung, wenn auch auf weitem Umwege, zu der von Weber bestrittenen Gleichung (5), wodurch sein Einwand fortfällt.

§. 11. Untersuchung von Lorberg.

In der zu Anfange des vorigen Paragraphen citirten zweiten Abtheilung des zweiten Bandes von Zöllner's wissenschaftlichen Abhandlungen wird auch die im 84sten Bande von Borchard's Journal veröffentlichte Abhandlung von Lorberg „über das electrodynamische Grundgesetz“ erwähnt und dabei gesagt, in dieser Abhandlung werde die Unhaltbarkeit meines Gesetzes und (unter selbstverständlichen Voraussetzungen) die Nothwendig-

keit des Weber'schen Gesetzes nachgewiesen. Was von dieser Behauptung zu halten ist, wird am besten aus einer näheren Betrachtung der von Lorberg gewonnenen Resultate klar werden.

Lorberg wendet in seiner Abhandlung zunächst das Weber'sche Grundgesetz und mein Grundgesetz auf einige specielle Fälle an. Dabei stellen sich natürlich gewisse Unterschiede in den sich ergebenden Kräften heraus, aber immer nur in solchen Fällen, in denen eine Entscheidung über die Richtigkeit des einen oder anderen der differirenden Ergebnisse durch irgend welche bisher angestellte experimentelle Untersuchungen nicht möglich ist. Es kann also gar keine Rede davon sein, dass dadurch die Unhaltbarkeit meines Gesetzes nachgewiesen sei.

Ferner macht Lorberg eine ähnliche Entwickelung, wie ich sie gemacht habe, indem er unter Zugrundelegung gewisser Voraussetzungen die mathematische Form des Grundgesetzes ableitet. Diese Voraussetzungen sind, soweit sie auf Erfahrungen beruhen, im Wesentlichen dieselben, wie die von mir gemachten; aber eine Voraussetzung ist noch hinzugefügt, welche meinen ausdrücklich ausgesprochenen Ansichten widerspricht, nämlich die, dass die electrodynamischen Kräfte zwischen zwei bewegten Electricitätstheilchen nur von der relativen Bewegung der Electricitätstheilchen abhänge, und zwar von der relativen Bewegung im Weber'schen Sinne des Wortes, welche sich nur auf die gegenseitige Annäherung oder Entfernung der Theilchen bezieht.

Ich habe von vorn herein bei meinen Entwickelungen gesagt, dass sie sich dadurch von den früheren ähnlichen Entwickelungen unterscheiden, dass in ihnen nicht nur die relative Bewegung sondern auch die absoluten Bewegungen der Theilchen berücksichtigt sind. Um zu zeigen, wie dieser Unterschied sich auch in den Resultaten äussert, habe ich eine oben in Abschnitt X., §. 1 wiedergegebene Zusammenstellung der drei von Weber, Riemann und mir aufgestellten Potentialformeln gemacht, und dabei hervorgehoben, dass sie sich dadurch wesentlich von einander unterscheiden, dass die Weber'sche Potentialformel die relative Geschwindigkeit im Weber'schen Sinne des Wortes, die Riemann'sche die relative Geschwindigkeit im gewöhnlichen Sinne des Wortes und die meinige die Componenten der absoluten Geschwindigkeiten enthält. Wer also, wie Zöllner, die Voraussetzung, dass die electrodynamischen Kräfte nur von der relativen Bewegung im Weber'schen Sinne des Wortes abhängen können, als selbst-

verständlich betrachtet, der bedarf, um zwischen den drei Formeln zu entscheiden, nicht noch erst weiterer Untersuchungen, sondern kann die Entscheidung unmittelbar aus den Formeln selbst ablesen.

Die Lorberg'sche Untersuchung ist für die Klarstellung des Gegenstandes insofern sehr werthvoll, als sie die Folgerungen, welche sich aus gewissen Voraussetzungen ergeben, schärfer feststellt, als es bisher geschehen war; aber im Widerspruche mit meiner Untersuchung kann sie gar nicht stehen, weil sie eben auf anderen Voraussetzungen beruht.

Um deutlich erkennen zu lassen, wie die Ergebnisse der beiden Untersuchungen sich zu einander verhalten, wird es am besten sein, sie in möglichst ähnlichen Fassungen neben einander zu stellen. Das Ergebniss der Lorberg'schen Untersuchung lässt sich so aussprechen. Wenn man von der Voraussetzung ausgeht, dass nur die relative Bewegung im Weber'schen Sinne des Wortes auf die electrodynamischen Kräfte Einfluss haben könne, so gelangt man zu dem Schlusse, dass das Weber'sche Grundgesetz das einzig mögliche sei und dass in einem galvanischen Strome beide Electricitäten mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit fliessen müssen. Das Ergebniss meiner Untersuchung dagegen ist folgendes. Wenn man die Annahme, dass in den galvanischen Strömen und den sonstigen electrischen Strömen, für welche die electrodynamischen Gesetze gelten, beide Electricitäten mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit fliessen, nicht machen will, so darf man auch nicht annehmen, dass nur die relative Bewegung (sei es im Weber'schen oder im gewöhnlichen Sinne des Wortes), auf die electrodynamischen Kräfte Einfluss habe, sondern muss auch den absoluten Bewegungen einen Einfluss zuschreiben, und gelangt dann zu meinem Grundgesetze als dem einzig möglichen.
